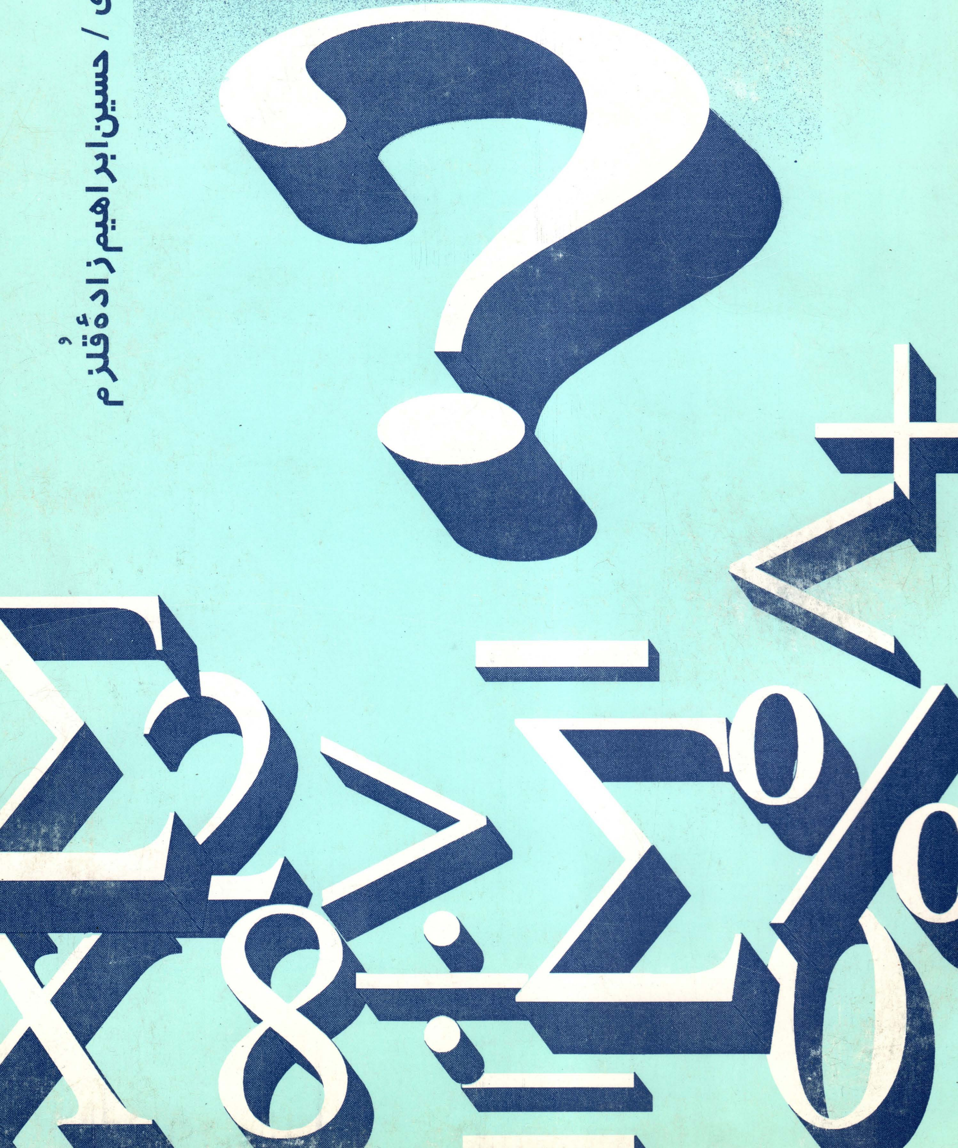
بهترین مسأله های
جبر و مثلثات

نوشتهٔ وی. آ. کریچ مار

ترجمهٔ: پرویز شهریاری / حسین ابراهیم زادهٔ قلزم



بهترین مسأله‌های

جبر و مثلثات

برای دانش‌آموزان سال سوم و پیش‌دانشگاهی
نظام جدید آموزشی و داوطلبان کنکور و المپیاد

نوشتهٔ: وی. آ. کریچ‌مار

ترجمهٔ:
پرویز شهریاری / حسین ابراهیم‌زادهٔ قُلزم

انتشارات تهران

این کتاب ترجمه‌ای است از:

A PROBLEM BOOK IN ALGEBRA

By: V. A. Krechmar

انتشارات تهران

انتشارات تهران

تهران ـ خ پاسداران، چهارراه پاسداران،

شمارهٔ ۲۶ تلفن: ۲۵۴۵۲۱۹

صندوق پستی ۴۸۷ ـ ۱۹۵۸۵

بهترین مسأله‌های جبر و مثلثات

نوشتهٔ: وی. آ. کریچ‌مار

ترجمهٔ: پرویز شهریاری / حسین ابراهیم‌زاده قُلزم

چاپ اول: ۱۳۷۶

تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

حروفچینی: گنجینه ۶۴۱۴۰۱۴

لیتوگرافی و چاپ: چاپخانهٔ دیبا

ISBN 964 - 5609 - 29 - 1 شابک ۱ ـ ۲۹ ـ ۵۶۰۹ ـ ۹۶۴

مقدمه مترجمین

بخش اساسی برنامهٔ «ریاضیات دبیرستانی» به «ریاضیات مقدماتی» مربوط است و «ریاضیات مقدماتی» یعنی «ریاضیات با کمیت‌های ثابت» همهٔ آن‌چه که به نام‌های «حساب»، «جبر»، «مثلثات» و «هندسهٔ اقلیدسی» خوانده می‌شود، در این برنامه جای گرفته است.

اگر از عنصرهای «آنالیز ریاضی» که کم‌وبیش در برنامهٔ ریاضی دبیرستانی آمد و از اندک اشاره‌هایی که به «ریاضیات گسسته» شده است، بگذریم، مجموعهٔ ریاضیات دبیرستانی را به دو بخش اصلی می‌توان تقسیم کرد: ۱) ریاضیات محاسبه‌ای (شامل حساب، جبر و مثلثات) و هندسه (شامل بخش‌هایی از هندسهٔ اقلیدسی). درضمن، باید پذیرفت که، این دو بخش، از یک طرف بسیار گسترده و پرمضمون‌اند و، از طرف دیگر، پایه‌های اصلی تمامی ریاضیات امروزی را تشکیل می‌دهند. به این علت، گسترده و پرمضمون است که هر روز نکته‌های تازه‌ای در آن کشف و روش‌های تازه‌ای برای گشودن برخی دژهای مستحکم آن بنیان گذاشته می‌شود. می‌توان گفت که «ریاضیات مقدماتی» به جزیره‌ای قدیمی و مسکونی می‌ماند که، گرچه در طول هزاران سال زیستگاه آدمیان بوده است، ولی هر روز بخش تازه‌ای در آن کشف و رازهای تازه‌ای از گوشه‌های ناشناختهٔ آن روشن می‌شود و درست به همین دلیل، پایه‌های اصلی ریاضیات امروزی را تشکیل می‌دهد. کسانی که با ریاضیات نظری سروکار دارند و یا از جنبه‌های کاربردی آن استفاده می‌کنند، هرگز از «ریاضیات مقدماتی» بی‌نیاز نمی‌شوند و هرچه تسلط بیشتری بر آن داشته باشند، در کار خود موفق‌ترند.

این کتاب، به طرح و حل مساله‌هایی از «ریاضیات محاسبه‌ای» اختصاص دارد و به‌صورتی هوشمندانه تنظیم شده است. کتابی که به‌صورت مجموعه‌ای از مساله‌ها تنظیم شده باشد، به‌شرطی می‌تواند سودمند باشد که خواننده را با روش‌های حل مساله آشنا کند و با

طرح و حل گونه‌های مختلف مساله، ذهن را برای برخورد با دشواری‌های ناشی از تازگی مساله‌ها آماده کند . . . و این کتاب، در همین راستا آماده شده است. کتاب، مجموعه‌ای ناهمگون از چند مساله نیست، بلکه با دنبال کردن روشی درست و آگاهانه، خواننده را با گوشه‌های شناخته و ناشناختهٔ «ریاضیات محاسبه‌ای» (و به‌طور عمده، جبر و مثلثات) آشنا می‌کند و او را وامی‌دارد تا برای شکافتن دشواری‌های مربوط به حل مساله‌های ریاضی، ذهنی آماده و خلاق داشته باشد.

این کتاب، درضمن، سرچشمه‌ای برای دبیران علاقه‌مند است تا بتوانند از مساله‌های آن، برای پویاتر کردن کلاس‌های ریاضی استفاده کنند.

۱۸/خرداد/۱۳۷۶

پرویز شهریاری / حسین ابراهیم زادهٔ قُلزم

فهرست مطالب

فصل ۱. عبارت‌های گویا

مساله‌هایی که در این بخش آمده، در اساس، به اتحادهایی مربوط می‌شوند که روی عبارت‌های گویا درست شده‌اند. برای حل این مساله‌ها، کافی است از عمل‌های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چندجمله‌ای‌ها، روش به توان رساندن و تجزیه آن‌ها (به صورت ضرب عامل‌های اول) آگاه باشیم. برای حل مساله‌هایی که در زمینهٔ مثلثات‌اند، تعریف تابع‌های مثلثاتی، بستگی‌های اصلی بین این تابع‌ها، ویژگی تناوبی این تابع، قضیهٔ مربوط به مجموع دو تابع مثلثاتی و همهٔ نتیجه‌های ناشی از آن را دانسته به حساب آورده‌ایم.

توجه خواننده را به دستورهایی جلب می‌کنیم که، به یاری آن‌ها، می‌توان، صورت ضرب تابع‌های مثلثاتی را به صورت جمع جبری آن‌ها تبدیل کرد:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\ ,$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\ ,$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

۱. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$$

۲. نشان دهید:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)=(ax-by-cz-dt)^2$$
$$+(bx+ay-dz+ct)^2+(cx+dy+az-dt)^2+(dx-cy+bz+at)^2$$

۳. ثابت کنید از برابری‌های

$$ax - by - cz - dt = 0 \text{ ، } bx + ay - dz + ct = 0$$
$$cx + dy + az - bt = 0 \text{ ، } cx - cy + bz + at = 0$$

می‌توان نتیجه گرفت:

$$x = y = z = t = 0 \text{ یا } a = b = c = d = 0$$

۴. ثابت کنید:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 =$$
$$= (bx - ay)^2 + (cy - bz)^2 + (az - cx)^2$$

۵. نشان دهید اتحاد مساله ۴ را می‌توان به این صورت تعمیم داد:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) =$$
$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 +$$
$$+(a_1b_3 - a_3b_1)^2 + \ldots + (a_{n-1}b_1 - a_nb_{n-1})^2$$

۶. با فرض $n(a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + l^2) = (a + b + c + \ldots + l)^2$ که در آن، n برابر تعداد کمیت‌های $a, b, c, \ldots, l$ است، ثابت کنید:

$$a = b = c = \ldots = l$$

۷. ثابت کنید از برابری‌های

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1 \text{ ، } b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = 1$$

نتیجه می‌شود:

$$-1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq +1$$

۸. ثابت کنید از برابری

$$(y-z)^۲+(z-x)^۲+(x-y)^۲=(y+z-۲x)^۲+$$
$$+(z+x-۲y)^۲+(x+y-۲z)^۲$$

نتیجه می‌شود:

$$x=y=z$$

۹. درستی این اتحادها را ثابت کنید:

$$(a^۲-b^۲)^۲+(۲ab)^۲=(a^۲+b^۲)^۲\ ,$$
$$(۶a^۲-۴ab+۴b^۲)^۳=(۳a^۲+۵ab-۵b^۲)^۳+$$
$$(۴a^۲-۴ab+۶b^۲)^۳+(۵a^۲-۵ab-۳b^۲)^۳$$

۱۰. نشان دهید:

$$(p^۲-q^۲)^۴+(۲pq+q^۲)^۴+(۲pq+p^۲)^۴=۲(p^۲+pq+q^۲)^۴$$

۱۱. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$X^۲+XY+Y^۲=Z^۳$$

شرطی که:

$$X=q^۳+۳pq^۲-p^۳ \ ،\ Y=-۳pq(p+q)$$
$$Z=p^۲+pq+q^۲$$

۱۲. ثابت کنید که به‌ازای $k=۱,۲,۳$، داریم:

$$(۳a+۳b)^k+(۲a+۴b)^k+a^k+b^k=(۳a+۴b)^k+$$
$$(a+۳b)^k+(۲a+b)^k$$

۱۳. الف. نشان دهید که اگر $x+y+z=۰$ آنگاه به‌ازای $n=۰,۱,۲,۴$ داریم:

$$(ix-ky)^n+(iy-kz)^n+(iz-kx)^n=(iy-kx)^n$$
$$+(iz-ky)^n+(ix-kz)^n$$

ب. ثابت کنید به‌ازای $n=۰,۱,۲,۳$:

$$x^n+(x+۳)^n+(x+۵)^n+(x+۶)^n+(x+۹)^n+(x+۱۰)^n+$$
$$(x+۱۲)^n+(x+۱۵)^n=(x+۱)^۲+(x+۲)^n+(x+۴)^n+$$
$$+(x+۷)^n+(x+۸)^n+(x+۱۱)^n+(x+۱۳)^n+(x+۱۴)^n$$

۱۴. درستی این اتحادها را ثابت کنید:

الف) $(a+b+c+d)^۲+(a+b-c-d)^۲+(a+c-b-d)^۲$
$+(a+d-b-c)^۲=۴(a^۲+b^۲+c^۲+d^۲)$

ب) $(a^۲-b^۲+c^۲-d^۲)^۲+۲(ab-bc+dc+ad)^۲$
$=(a^۲+b^۲+c^۲+d^۲)^۲-۲(ab-ad+bc+dc)^۲$

ج) $(a^۲-c^۲+۲bd)^۲+(d^۲-b^۲+۲ac)^۲=$
$=(a^۲-b^۲+c^۲-d^۲)^۲+۲(ab-bc+dc+ad)^۲$

۱۵. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$(a+b+c)^۴+(b+c-a)^۴+(c+a-b)^۴+(a+b-c)^۴$$
$$=۴(a^۴+b^۴+c^۴)+۲۴(b^۲c^۲+c^۲a^۲+a^۲b^۲)$$

۱۶. فرض کنید $s=a+b+c$. ثابت کنید:

$$s(s-۲b)(s-۲c)+(s-۲c)(s-۲a)+s(s-۲a)(s-۲b)$$
$$=(s-۲a)(s-۲b)(s-۲c)+۸abc$$

۱۷. ثابت کنید، اگر $a+b+c=۲s$، آنگاه

$$a(s-a)^۲+b(s-b)^۲+c(s-c)^۲+۲(s-a)(s-b)(s-c)=abc$$

۱۸. با شرط $\text{۲}\sigma^{\text{۲}} = a^{\text{۲}} + b^{\text{۲}} + c^{\text{۲}}$؛ $\text{۲}s = a + b + c$ نشان دهید:

$$(\sigma^{\text{۲}} - a^{\text{۲}})(\sigma^{\text{۲}} - b^{\text{۲}}) + (\sigma^{\text{۲}} - b^{\text{۲}})(\sigma^{\text{۲}} - c^{\text{۲}}) + \\ +(\sigma^{\text{۲}} - c^{\text{۲}})(\sigma^{\text{۲}} - a^{\text{۲}}) = \text{۴}s(s-a)(s-b)(s-c)$$

۱۹. این عبارت را به ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

$$(x+y+z)^{\text{۳}} - x^{\text{۳}} - y^{\text{۳}} - z^{\text{۳}}$$

۲۰. این عبارت را تجزیه کنید:

$$x^{\text{۳}} + y^{\text{۳}} + z^{\text{۳}} - \text{۳}xyz$$

۲۱. این عبارت را ساده کنید:

$$(a+b+c)^{\text{۳}} - (a+b-c)^{\text{۳}} - (b+c-a)^{\text{۳}} - (c+a-b)^{\text{۳}}$$

۲۲. این عبارت را تجزیه کنید:

$$(b-a)^{\text{۳}} + (c-a)^{\text{۳}} + (a-b)^{\text{۳}}$$

۲۳. نشان دهید، اگر $a+b+c = \text{۰}$، آنگاه

$$a^{\text{۳}} + b^{\text{۳}} + c^{\text{۳}} = \text{۳}abc$$

۲۴. ثابت کنید، اگر $a+b+c = \text{۰}$، آنگاه

$$(a^{\text{۲}} + b^{\text{۲}} + c^{\text{۲}})^{\text{۲}} = \text{۲}(a^{\text{۴}} + b^{\text{۴}} + c^{\text{۴}})$$

۲۵. نشان دهید:

$$[(a-b)^{\text{۲}} + (b-c)^{\text{۲}} + (c-a)^{\text{۲}}]^{\text{۲}} = \text{۲}[(a-b)^{\text{۴}} + (b-c)^{\text{۴}} + (c-a)^{\text{۴}}]$$

۲۶. فرض کنید $a+b+c = \text{۰}$، ثابت کنید:

الف) $\text{۲}(a^{\text{۵}} + b^{\text{۵}} + c^{\text{۵}}) = \text{۵}abc(a^{\text{۲}} + b^{\text{۲}} + c^{\text{۲}})$

ب) $\text{۵}(a^{\text{۳}} + b^{\text{۳}} + c^{\text{۳}})(a^{\text{۲}} + b^{\text{۲}} + c^{\text{۲}}) = \text{۶}(a^{\text{۵}} + b^{\text{۵}} + c^{\text{۵}})$

ج) $\text{۱۰}(a^{\text{۷}} + b^{\text{۷}} + c^{\text{۷}}) = \text{۷}(a^{\text{۲}} + b^{\text{۲}} + c^{\text{۲}})(a^{\text{۵}} + b^{\text{۵}} + c^{\text{۵}})$

۲۷. $2n$ عدد: $a_1, a_2, \ldots, a_n$؛ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ داده شده است. قرار دهید:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = s_n$$

ثابت کنید:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = (a_1 - a_2)s_1 + (a_2 - a_3)s_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n)s_{n-1} + a_ns_n$$

۲۸. با شرط $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n}{2}s$ ثابت کنید:

$$(s - a_1)^2 + (s - a_2)^2 + \ldots + (s - a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$$

۲۹. سه‌جمله‌ای $Ax^2 + 2Bxy + CY^2$ داده شده است. فرض می‌کنیم:

$$x = \alpha x' + \beta y' \quad ، \quad y = \gamma x' + \delta y'$$

ثابت کنید سه‌جمله‌ای داده شده به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2$$

در ضمن، ثابت کنید:

$$B'^2 - A'C' = (B^2 - AC)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

۳۰. فرض کنید $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $p_i + q_i = 1$ و

$$p = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} \quad ، \quad q = \frac{q_1 + q_2 + \ldots + q_n}{n}$$

ثابت کنید:

$$p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_nq_n = npq - (p_1 - p)^2 - (p_2 - p)^2 - \ldots - (p_n - p)^2$$

۳۱. ثابت کنید:

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3}+\dots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{1}=$$
$$=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2n-1}\right)$$

۳۲. فرض کنید $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$. نشان دهید:

الف) $S_n = n-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\dots+\frac{n-1}{n}\right)$

ب) $nS_n = n+\left(\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{2}+\dots+\frac{2}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)$

۳۳. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$$

۳۴. ثابت کنید:

$$\left(1+\frac{1}{\alpha+1}\right)\left(1-\frac{1}{2\alpha-1}\right)\left(1+\frac{1}{3\alpha-1}\right)\times\dots\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{(2n-1)\alpha-1}\right)\left(1-\frac{1}{2n\alpha-1}\right)=\frac{(n+1)\alpha}{(n+1)\alpha-1}\times$$
$$\times\frac{(n+2)\alpha}{(n+2)\alpha-1}\cdots\frac{(n+n)\alpha}{(n+n)\alpha-1}$$

۳۵. فرض کنید $[\alpha]$ نمایش نزدیک‌ترین عدد درست به α باشد که کوچکتر یا مساوی با آن است، به این ترتیب $[\alpha] \le \alpha < [\alpha]+1$. ثابت کنید، اتحاد زیر برقرار است:

$$[x]+\left[x+\frac{1}{x}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\dots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$$

۳۶. ثابت کنید:

$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^{۲} a - \sin^{۲} a$$

۳۷. نشان دهید:

$$(\cos a + \cos b)^{۲} + (\sin a + \sin b)^{۲} = ۴\cos^{۲}\frac{a-b}{۲}$$

$$(\cos a - \cos b)^{۲} + (\sin a - \sin b)^{۲} = ۴\sin^{۲}\frac{a-b}{۲}$$

۳۸. با فرض:

$$(۱+\sin a)(۱+\sin b)(۱+\sin c) = \cos a\cos b\cos c$$

این عبارت را ساده کنید:

$$(۱-\sin a)(۱-\sin b)(۱-\sin c)$$

۳۹. با فرض:

$$(۱+\cos\alpha)(۱+\cos\beta)(۱+\cos\gamma) =$$
$$= (۱-\cos\alpha)(۱-\cos\beta)(۱-\cos\gamma)$$

نشان دهید هر طرف این برابری، برابر است با

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

۴۰. نشان دهید:

$$\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) + \cos(\beta+\gamma)\sin(p-\gamma) + \cos(\gamma+\gamma)$$
$$\sin(\gamma-\sigma) + \cos(\gamma+\alpha)\sin(\gamma-\alpha) = ۰$$

۴۱. ثابت کنید:

$$\sin(a+b)\sin(a-b)\sin(c+d)\sin(c-d) + \sin(c+b)$$
$$\sin(c-b)\sin(d+a)\sin(d-a) +$$
$$+\sin(d+b)\sin(d-b)\sin(a+c)\sin(a-c) = ۰$$

۴۲. درستی این اتحادها را ثابت کنید:

الف) $\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)$
$+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=۴\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

ب) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)$
$-\sin(\alpha+\beta-\gamma)=۴\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$

۴۳. این عبارت‌ها را به صورتی درآورید تا قابل محاسبهٔ لگاریتمی باشد:

$$\sin\left(A+\frac{B}{۴}\right)+\sin\left(B+\frac{C}{۴}\right)+\sin\left(C+\frac{A}{۴}\right)+\cos\left(A+\frac{B}{۴}\right)$$
$$+\cos\left(B+\frac{C}{۴}\right)+\cos\left(C+\frac{A}{۴}\right)\qquad(A+B+C=\pi)$$

۴۴. این عبارت‌ها را قابل محاسبهٔ لگاریتمی کنید:

$$\sin\frac{A}{۴}+\sin\frac{B}{۴}+\sin\frac{C}{۴}+\cos\frac{A}{۴}+\cos\frac{B}{۴}+\cos\frac{C}{۴}$$

$(A+B+C=\pi)$

۴۵. این حاصل‌ضرب را ساده کنید:

$$\cos a\cos ۲a\cos ۴a\ \ldots\ \cos ۲^{n-۱}a$$

۴۶. نشان دهید که:

$$\cos\frac{\pi}{۱۵}\cos\frac{۲\pi}{۱۵}\cos\frac{۳\pi}{۱۵}\cos\frac{۴\pi}{۱۵}\cos\frac{۵\pi}{۱۵}\cos\frac{۶\pi}{۱۵}\cos\frac{۷\pi}{۱۵}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۷}$$

۴۷. با این فرض که $\sin B=\frac{۱}{۵}\sin(۲A+B)$، ثابت کنید:

$$\tan(A+B)=\frac{۳}{۲}\tan A$$

۴۸. فرض کنید A و B دو زاویهٔ مثبت و حاده باشند که در برابری‌های زیر صدق می‌کنند:

$$3\sin^2 A + 2\sin^2 B = 1$$
$$3\sin 2A - 2\sin 2B = 0$$

ثابت کنید:

$$A + 2B = \frac{\pi}{2}$$

۴۹. ثابت کنید، مقدار عبارت

$$\cos^2\varphi + \cos^2(\alpha - \varphi) - 2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha + \varphi)$$

بستگی به مقدار φ ندارد.

۵۰. می‌دانیم

$$a = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\delta\ ,$$
$$a' = \cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\delta\ ,$$
$$a'' = \sin\varphi\sin\delta\ ,$$
$$b = \sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\delta\ ,$$
$$b' = \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\delta\ ,$$
$$b'' = -\cos\varphi\sin\delta\ ,$$
$$c = -\sin\psi\sin\delta\ , c' = \cos\psi\sin\delta\ , c'' = \cos\delta$$

ثابت کنید، در این صورت داریم:

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1\ ,\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1\ ,$$
$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1\ ,$$
$$ab + a'b' + a''b'' = 0\ ,\ ac + a'c' + a''c'' = 0\ ,$$
$$bc + b'c' + b''c'' = 0$$

فصل ۲. کسرهای گویا

در این بخش، با عبارت‌های گویای کسری سروکار داریم که، عمل جمع با آن‌ها، شبیه عمل با کسرهای جبری است.

توجه خواننده را به نکته‌ای جلب می‌کنیم (مساله‌های ۱۵، ۱۶ و ۱۷ را ببینید): اگر دوجمله‌ای درجه اول

$$Ax+B$$

به‌ازای دو مقدار مختلف x (و مثلاً به‌ازای $x=a$ و $x=b$)، برابر صفر شود، به معنای آن است که، هر دو ضریب A و B، برابر صفرند. در واقع، از برابری‌های

$$Aa+B=\circ \text{ و } Ab+B=\circ \quad (*)$$

می‌توان نتیجه گرفت:

$$A(a-b)=\circ$$

و چون $a-b\neq\circ$، بنابراین $A=\circ$. با قرار دادن مقدار A، در یکی از دو برابری $(*)$، به دست می‌آید $B=\circ$.

به همین ترتیب، اگر سه‌جمله‌ای درجه دوم

$$Ax^{۲}+Bx+C$$

به‌ازای سه مقدار مختلف x (و مثلاً به‌ازای $x=a$، $x=b$ و $x=c$) برابر صفر شود، به معنای آن است که $A=B=C=\circ$. در واقع، اگر

$$Aa^{۲}+Ba+C=\circ\ ,\ Ab^{۲}+Bb+C=\circ$$
$$Ac^{۲}+bc+C=\circ$$

آن وقت به این برابری می‌رسیم:

$$A(a^{۲}-b^{۲})+B(a-b)=\circ\ ,$$
$$A(a^{۲}-c^{۲})+B(a-c)=\circ$$

چون $a \neq b$ و $a \neq c$، پس

$$A(a+b)+B=\circ\ ,\ A(a+c)+B=\circ$$

که از آن‌جا به نتیجه $A=\circ$ و، سپس $B=\circ$ و $C=\circ$ می‌رسیم.

شبیه همین بحث را می‌توان دربارهٔ چندجمله‌ای درجه سوم

$$Ax^{۳}+Bx^{۲}+Cx+D$$

انجام داد و ثابت کرد، اگر چندجمله‌ای درجه سوم، به‌ازای چهار مقدار مختلف x برابر صفر شود، به معنای آن است که

$$A=B=C=D=\circ$$

به طور کلی، اگر چندجمله‌ای درجهٔ n، به‌ازای $n+۱$ مقدار مختلف x، برابر صفر شود، به معنای آن است که همهٔ ضریب‌های آن، برابر صفرند. (در این باره، فصل ۶ را هم ببینید).

در این بخش، از کسرهای مسلسل باپایان هم صحبت شده است که نیازی به توضیح دربارهٔ آن‌ها نمی‌بینیم.

در این بخش، فرض را بر این گرفته‌ایم که دستورهای مربوط به حل مثلث (یعنی بستگی‌های بین طول ضلع‌ها و تابع‌های مثلثاتی زاویه‌های آن)، برای خواننده شناخته شده است.

۱. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$p^{۳}=\left(p\frac{p^{۳}-۲q^{۳}}{p^{۳}+q^{۳}}\right)+\left(q\frac{۲p^{۳}-q^{۳}}{p^{۳}+q^{۳}}\right)^{۳}+q^{۳}$$

۲. این عبارت را ساده کنید:

$$\frac{۱}{(p+q)^{۳}}\left(\frac{۱}{p^{۳}}+\frac{۱}{q^{۳}}\right)+\frac{۳}{(p+q)^{۴}}\left(\frac{۱}{p^{۲}}+\frac{۱}{q^{۲}}\right)+$$
$$+\frac{۶}{(p+q)^{۵}}\left(\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}\right)$$

۳. ساده کنید:

$$\frac{۱}{(p+q)^۳}\left(\frac{۱}{p^۴}-\frac{۱}{q^۴}\right)+\frac{۲}{(p+q)^۴}\left(\frac{۱}{p^۳}-\frac{۱}{q^۳}\right)+$$
$$+\frac{۲}{(p+q)^۵}\left(\frac{۱}{p^۲}-\frac{۱}{q^۲}\right)$$

۴. با فرض:

$$x=\frac{a-b}{a+b}\,,\ y=\frac{b-c}{b+c}\,,\ z=\frac{c-a}{c+a}$$

ثابت کنید:

$$(۱+x)(۱+y)(۱+z)=(۱-x)(۱-y)(۱-z)$$

۵. نشان دهید، از برابری

$$(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$$

نتیجه می‌شود:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

۶. این عبارت را ساده کنید:

$$\frac{Ax^۲+by^۲+cz^۲}{bc(y-z)^۲+ca(z-x)^۲+ab(x-y)^۲}$$

به شرطی که بدانیم: $ax+by+cz=۰$

۷. ثابت کنید این برابری برقرار است:

$$\frac{x^۲y^۲z^۲}{a^۲b^۲}+\frac{(x^۲-a^۲)(y^۲-a^۲)(z^۲-a^۲)}{a^۲(a^۲-b^۲)}+$$
$$+\frac{(x^۲-b^۲)(y^۲-b^۲)(z^۲-b^۲)}{b^۲(b^۲-a^۲)}=x^۲+y^۲+z^۲-a^۲-b^۲$$

۸. فرض کنید:

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)}=s_k$$

ثابت کنید که:

$$s_0=s_1=0\ ,\ s_2=1\ ,\ s_3=a+b+c$$
$$s_4=ab+ac+bc+a^2+b^2+c^2$$
$$s_5=a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2a+$$
$$+c^2a+a^2c+b^2c+c^2b+abc$$

۹. اگر بدانیم:

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)(c-d)}$$
$$+\frac{d^k}{(d-a)(d-b)(d-c)}=S_k$$

ثابت کنید:

$$S_0=S_1=S_2=0\ ,\ S_3=1\ ,\ S_4=a+b+c+d$$

۱۰. اگر بدانیم:

$$\sigma_m=a^m\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+b^m\frac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)}+c^m\frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$$

σ_1، σ_2، σ_3 و σ_4 را محاسبه کنید.

۱۱. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$bc\frac{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)}{(a-b)(a-c)}+ca\frac{(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)}{(b-a)(b-c)}+$$
$$+ab\frac{(c-\alpha)(c-\beta)(c-\gamma)}{(c-a)(c-b)}=abc-\alpha\beta\gamma$$

۱۲. ثابت کنید:

$$\frac{a^۲b^۲c^۲}{(a-d)(b-d)(c-d)}+\frac{a^۲b^۲d^۲}{(a-c)(b-c)(d-c)}+\frac{a^۲c^۲d^۲}{(a-b)(c-d)(d-b)}$$
$$+\frac{b^۲c^۲d^۲}{(b-a)(c-a)(d-a)}=abc+abd+acd+bcd$$

۱۳. این عبارت‌ها را ساده کنید:

(الف $\frac{۱}{a(a-b)(a-c)}+\frac{۱}{b(b-a)(b-c)}+\frac{۱}{c(c-a)(c-b)}$;

(ب $\frac{۱}{a^۲(a-b)(a-c)}+\frac{۱}{b^۲(b-a)(b-c)}+\frac{۱}{c^۲(c-a)(c-b)}$

۱۴. این عبارت را ساده کنید.

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)(x-c)}$$

که در آن $k=۱,\ ۲$.

۱۵. ثابت کنید:

$$\frac{b+c+d}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)}+\frac{c+d+a}{(c-b)(d-b)(a-b)(x-b)}$$
$$+\frac{d+a+b}{(d-c)(a-c)(b-c)(x-c)}+\frac{a+b+c}{(a-d)(b-d)(c-d)(x-d)}$$
$$=\frac{x-a-b-c-d}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$$

۱۶. ثابت کنید:

$$a^۲\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^۲\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^۲\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^۲$$

۱۷. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=۱$$

۱۸. نشان دهید، اگر $a+b+c=0$، آنگاه

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9$$

۱۹. این عبارت را ساده کنید:

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

۲۰. ثابت کنید:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=$$
$$=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$$

۲۱. این عبارت را ساده کنید:

$$\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ac}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$$

۲۲. ثابت کنید:

$$\frac{d^m(a-b)(b-c)+b^m(a-d)(c-d)}{c^m(a-b)(a-d)+a^m(b-c)(c-d)}=\frac{b-d}{a-c}$$

به‌ازای $m=1,2$.

۲۳. ثابت کنید:

$$\left\{1-\frac{x}{\alpha_1}+\frac{x(x-\alpha_1)}{\alpha_1\alpha_2}-\frac{x(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}+\right.$$
$$\left.+\ldots+(-1)^n\frac{x(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_2)(x-\alpha_{n-1}}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n}\right\}$$
$$\times\left\{1+\frac{x}{\alpha_1}+\frac{x(x+\alpha_1)}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{x(x+\alpha_1)(x-\alpha_2)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{x(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_{n+1})}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n}\right\}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{\alpha_1 2} + \frac{x^2(x^2 - \alpha_1^2)}{\alpha_1^2\alpha_2^2} - \ldots +$$
$$+(-1)^n \frac{x^2(x^2 - \alpha_1^2)\ldots(x^2 - \alpha_{n-1}^2)}{\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_n^2}$$

۲۴. با فرض

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1$$

ثابت کنید، دو کسر از میان سه کسر باید برابر $1+$ و کسر سوم برابر $1-$ باشد.

۲۵. نشان دهید از برابری

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

می‌توان به شرط فرد بودن n، نتیجه گرفت:

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$$

۲۶. نشان دهید، از برابری‌های

$$\frac{bx + cy}{x(-ax + by + cx)} = \frac{cx + az}{y(ax - by + cz)} = \frac{ay + bx}{z(ax + by - cz)}$$

می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{x}{a(b^2 + c^2 - a^2)} = \frac{y}{b(a^2 + c^2 - b^2)} = \frac{z}{c(a^2 + b^2 - c^2)}$$

۲۷. با فرض:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$
$$a + b + c = 0$$
$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0$$

ثابت کنید:

$$\alpha a^{۲} + \beta b^{۲} + \gamma c^{۲} = ۰$$

۲۸. اگر داشته باشیم:

$$a^{۳} + b^{۳} + c^{۳} = (b+c)(a+c)(a+b)$$
$$(b^{۲} + c^{۲} - a^{۲})x = (c^{۲} + a^{۲} - b^{۲})y = (a^{۲} + b^{۲} - c^{۲})z$$

آنگاه، خواهیم داشت:

$$x^{۳} + y^{۳} + z^{۳} = (x+y)(x+z)(y+z)$$

۲۹. کسر مسلسل باپایان زیر را در نظر بگیرید:

$$a_{۰} + \cfrac{۱}{a_{۱} + \cfrac{۱}{a_{۲} + \ddots + \cfrac{۱}{a_n}}}$$

فرض کنید:

$$p_{۰} = a_{۰}\ ,\ Q_{۰} = ۱\ ,\ p_{۱} = a_{۰}a_{۱} + ۱\ ,\ Q_{۱} = a_{۱}$$

و به طور کلی

$$p_{k+۱} = a_{k+۱}p_k + p_{k-۱}\ ,$$
$$Q_{k+۱} = a_{k+۱}Q_k + Q_{k-۱}$$

در این صورت، همان‌گونه که می‌دانیم:

$$\frac{p_n}{Q_n} = a_{۰} + \frac{۱}{a_{۱}} + \ldots + \frac{۱}{a_n}\ (n = ۰\ ,۱\ ,۲\ ,۳\ ,\ldots)$$

اکنون درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید:

(الف) $$\left(\frac{p_{n+۲}}{p_n} - ۱\right)\left(۱ - \frac{p_{n-۱}}{p_{n+۱}}\right) = \left(\frac{Q_{n+۲}}{Q_n} - ۱\right)\left(۱ - \frac{Q_{n-۱}}{Q_{n+۱}}\right)$$

ب) $\frac{p_n}{Q_n} - \frac{p_0}{Q_0} = \frac{1}{Q_0 Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} Q_n}$

ج) $P_{n+2} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n+2} = (a_{n+2} a_{n+1} a_n + a_{n+2} + a_n)(-1)^n$

د) $\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_0}}}$,

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_1}}}$$

۳۰. جهت سادگی قرار دهید:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}} =$$

$$= (a_0, a_1, \dots, a_n) = \frac{p_n}{Q_n}$$

و فرض کنید این کسر متقارن باشد یعنی $a_0 = a_n$ ، $a_1 = a_{n-1}, \dots$ ثابت کنید:

$$p_{n-1} = Q_n$$

۳۱. این کسر مسلسل را در نظر می‌گیریم:

$$\cfrac{1}{a} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{a} + \cfrac{1}{a} + \ddots + \cfrac{1}{a}}$$

ثابت کنید:

$$p_n^2 + p_{n+1}^2 = p_{n-1} p_{n+1} + p_n p_{n+2}$$

۳۲. فرض کنید:

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \ddots + \cfrac{1}{l + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \ddots + \cfrac{1}{l}}}}}}$$

و فرض کنید $\frac{p_n}{Q_n}$ و $\frac{p_{n-1}}{Q_{n-1}}$ به‌ترتیب وجود داشته باشند، این آخری و تنها آخرین کسر با کسر زیر ایجاد همگرایی می‌کند:

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \ddots + \cfrac{1}{l}}}$$

ثابت کنید:

$$x = \frac{p_n Q_n + p_n p_{n-1}}{Q_n^2 + p_n Q_{n-1}}$$

۳۳. کسر مسلسل زیر را در نظر بگیرید:

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{bn}}}$$

قرار دهید:

$$p_0 = b_0\ ,\ Q_0 = 1\ ,\ p_1 = b_0 b_1 + a_1\ ,\ Q_1 = b_1\ \ ,\ldots$$

و به طور کلی:

$$p_{k+1} = b_{k+1} p_k + a_{k+1} p_{k+1}$$

$$Q_{k+1} = b_{k+1} Q_k + a_{k+1} Q_{k-1}$$

ثابت کنید:

$$\frac{p_n}{Q_n}=b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n}}}$$

۳۴. ثابت کنید:

$$\cfrac{r}{r+1-\cfrac{r}{r+1-\cfrac{r}{r+1-\ddots-\cfrac{r}{r+1}}}}=\frac{r^{n+1}-r}{r^{n+1}-1}$$

(تعداد کسرهای پیاپی در این کسر مسلسل برابر n است).

۳۵. ثابت کنید:

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\ldots+\frac{1}{u_n}=$$

$$=\cfrac{1}{u_1-\cfrac{u_1^2}{u_1+u_2-\cfrac{u_2^2}{u_2+u_3-\ddots-\cfrac{u_{n-1}^2}{u_{n-1}+u_n}}}}$$

۳۶. درستی این برابری را ثابت کنید:

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n}}}=\cfrac{c_1a_1}{c_1b_1+\cfrac{c_1c_2a_2}{c_2b_2+\ddots+\cfrac{c_{n-1}c_na_n}{c_nb_n}}}$$

که در آن c_1، c_2، ...، c_n مقادیر دلخواه غیر صفر هستند.

۳۷. درستی این اتحادها را ثابت کنید:

الف) $$\frac{\sin(n+1)x}{\sin nx}=2\cos x-\cfrac{1}{2\cos x-\cfrac{1}{2\cos x-\ddots-\cfrac{1}{2\cos x}}}$$

(روی هم n کسر مسلسل داریم).

$$ب)\ 1 + b_2 + b_2 b_3 + \ldots + b_2 b_3 \ldots b_n =$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{b_2}{b_2 + 1 - \ddots - \cfrac{b_n}{b_n + 1}}}$$

۳۸. ثابت کنید:

$$الف)\ \sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c) =$$
$$4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a+c}{2} \sin \frac{b+c}{2}$$

$$ب)\ \cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c) =$$
$$4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{b+c}{2} \cos \frac{a+c}{2}$$

۳۹. نشان دهید:

$$\tan + \tan b + \tan c - \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cos b \cos c} =$$
$$= \tan a \tan b \tan c$$

۴۰. ثابت کنید، اگر $A + B + C = \pi$، آنگاه

$$الف)\ \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}\ ,$$

$$ب)\ \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$ج)\ \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$$د)\ \tan \frac{A}{2} \tan n\frac{B}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{c}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{c}{2} = 1$$

$$هـ)\ \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

۴۱. بین a و b و c چه رابطه جبری وجود دارد، اگر داشته باشیم:

$$الف)\ \cos a + \cos b + \cos c = 1 + 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$$

ب) $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c;$

ج) $\cos^۲ a + \cos^۲ b + \cos^۲ c - ۲ \cos a \cos \cos c = ۱$

۴۲. با شرط $xy + xz + yz = ۱$ نشان دهید:

$$\frac{x}{۱ - x^۲} + \frac{y}{۱ - y^۲} + \frac{z}{۱ - z^۲} = \frac{۴xyz}{(۱ - x^۲)(۱ - y^۲)(۱ - z^۲)}$$

۴۳. نشان دهید که مجموع سه کسر

$$\frac{b - c}{۱ + bc}, \frac{c - a}{۱ + ac}, \frac{a - b}{۱ + ab}$$

برابر حاصلضرب آنها است.

۴۴. ثابت کنید که:

$$\tan ۳\alpha = \tan \alpha \tan \left(\frac{\pi}{۳} + \alpha\right) \tan \left(\frac{\pi}{۳} - \alpha\right)$$

۴۵. ثابت کنید، از برابری

$$\frac{\sin^۴ \alpha}{a} + \frac{\cos^۴ \alpha}{b} = \frac{۱}{a + b}$$

نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin^۸ \alpha}{a^۳} + \frac{\cos^۸ \alpha}{b^۳} = \frac{۱}{(a + b)^۳}$$

۴۶. با فرض:

$$a_۱ \cos \alpha_۱ + a_۲ \cos \alpha_۲ + \ldots + a_n \cos \alpha_n = ۰ ,$$
$$a_۱ \cos(\alpha_۱ + \theta) + a_۲ \cos(\alpha_۲ + \theta) + \ldots +$$
$$+ a_n \cos(\alpha_n + \theta) = ۰ \qquad (\theta \neq k\pi)$$

ثابت کنید به‌ازای هر مقداری از λ داریم:

$$a_۱ \cos(\alpha_۱ + \lambda) + a_۲ \cos(\alpha_۲ + \lambda) + \ldots + a_n \cos(\alpha_n + \lambda) = ۰$$

۴۷. این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma)}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha}+\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=0$$

۴۸. طول ضلع‌های یک مثلث را a، b و c می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$r=\frac{s}{p},\ r_a=\frac{s}{p-a},$$
$$r_b=\frac{s}{p-b},\ r_c=\frac{s}{p-c}$$

که در آن S مساحت مثلث و $2p=a+b+c$ است.

ثابت کنید:

الف) $$\frac{a^2}{r_a-r}+\frac{b^2}{r_b-r}+\frac{c^2}{r_c-r}=2(r_a+r_b+r_c);$$

ب) $$\frac{a^2r_a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2r_b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2r_c}{(c-a)(c-b)}=\frac{p^2}{r}$$

ج) $$\frac{a+b+c}{r_a+r_b+r_c}\left(\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}\right)=4$$

د) $$\frac{bc}{(a-b)(a-c)r_a^2}+\frac{ac}{(b-c)(b-a)r_b^2}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)r_c^2}$$
$$=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)r_br_c}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)r_cr_a}+$$
$$+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)r_ar_b}=\frac{1}{r^2}$$

هـ) $$\frac{ar_a}{(a-b)(a-c)}+\frac{br_a}{(b-c)(b-a)}+\frac{cr_c}{(c-a)(c-b)}=$$
$$=\frac{(b+c)r_a}{(a-b)(a-c)}+\frac{(c+a)r_b}{(b-c)(b-a)}+\frac{(a+b)r_c}{(c-a)(c-b)}=\frac{p}{r}$$

۴۹. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\sin(a+b-c-d)=\frac{\sin(a-c)\sin(a-d)}{\sin(a-b)}+\frac{\sin(b-c)\sin(b-d)}{\sin(b-a)}$$

۵۰. فرض کنید:

$$\cos\theta = \frac{a}{b+c}\ ,\ \cos\varphi = \frac{b}{a+c}\ ,\ \cos\psi = \frac{c}{a+b}$$

(θ، φ، ψ بین ۰ و π قرار دارند).

می‌دانیم a، b و c طول ضلع‌های یک مثلث هستند که زاویه‌های متناظرشان به ترتیب A، B و C است. ثابت کنید:

الف) $$\tan^{۲}\frac{\theta}{۲} + \tan^{۲}\frac{\varphi}{۲} + \tan^{۲}\frac{\psi}{۲} = ۱$$

ب) $$\tan\frac{\theta}{۲}\tan\frac{\varphi}{۲}\tan\frac{\psi}{۲} = \tan\frac{A}{۲}\tan\frac{B}{۲}\tan\frac{C}{۲}$$

۵۱. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{\sin(a-b)\sin(a-c)} + \frac{۱}{\sin(b-a)\sin(b-c)} + \frac{۱}{\sin(c-a)\sin(c-b)} = \frac{۱}{۲\cos\frac{a-b}{۲}\cos\frac{a-c}{۲}\cos\frac{b-c}{۲}}$$

۵۲. درستی این اتحادها را ثابت کنید:

الف) $$\frac{\sin a}{\sin(a-b)\sin(a-c)} + \frac{\sin b}{\sin(b-a)\sin(b-c)} + \frac{\sin c}{\sin(c-a)\sin(c-b)} = ۰$$

ب) $$\frac{\cos a}{\sin(a-b)\sin(a-c)} + \frac{\cos b}{\sin(b-a)\sin(b-c)} + \frac{\cos c}{\sin(c-a)\sin(c-b)} = ۰$$

۵۳. درستی این اتحادها را ثابت کنید:

الف) $$\sin a\sin(b-c)\cos(b+c-a) + \sin b\sin(c-a)\cos(c+a-b) + \sin c\sin(a-b)\cos(a+b-c) = ۰$$

ب) $\cos a \sin(b-c)\sin(b+c-a) +$

$+\cos b \sin(c-a)\sin(c+a-b)$

$+\cos c \sin(a-b)\sin(a+b-c) = ۰$

ج) $\sin a \sin(b-c)\sin(b+c-a) +$

$+\sin b \sin(c-a)\sin(c+a-b) +$

$\sin c \sin(a-b)\sin(a+b-c) =$

$= ۲\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)$

د) $\cos a \sin(b-c)\cos(b+c-a) +$

$+\cos b \sin(c-a)\cos(c+a-b)$

$+\cos c \sin(a-b)\cos(a+b-c)$

$= ۲\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)$

۵۴. ثابت کنید با شرط $A+B+C=\pi$، داریم:

الف) $\sin^۳ A\cos(B-C) + \sin^۳ B\cos(C-A) +$

$+\sin^۳ C\cos(A-B) = ۳\sin A\sin B\sin C$

ب) $\sin^۳ A\sin(A-B) + \sin^۳ B\sin(C-A) + \sin^۳ C\sin(A-B) = ۰$

۵۵. درستی این اتحادها را ثابت کنید، اگر $A+B+C=\pi$، آنگاه

الف) $\sin ۳A\sin^۳(B-C) + \sin ۳B\sin^۳(C-A) +$

$+\sin ۳C\sin^۳(A-B) = ۰$

ب) $\sin ۳A\cos^۳(B-C) + \sin ۳B\cos^۳(C-A) +$

$+\sin ۳C\cos^۳(A-B) = \sin ۳A\sin ۳B\sin ۳C$

فصل ۳. رادیکال‌ها، معکوس تابع‌های مثلثاتی، لگاریتم‌ها

در حالت فرد بودن عدد درست n، منظور از $\sqrt[n]{A}$ ، عدد حقیقی منحصربه فردی است که، توان nام آن، برابر A شود. در این حالت A می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. در حالت زوج بودن عدد درست n، نماد $\sqrt[n]{A}$ به معنای عدد مثبتی است که، توان nام آن، برابر A شود. در این حالت، باید داشته باشیم: $A \geq ۰$. به این ترتیب:

$$\sqrt{A^۲} = A \ , \ \text{به شرط } A > ۰$$

$$\sqrt{A^۲} = -A \ , \ \text{به شرط } A < ۰$$

در این بخش، قانون‌های حاکم بر رادیکال‌ها و عمل‌های روی آن‌ها را دانسته فرض کرده‌ایم. تنها لازم می‌دانیم دو دستور مربوط به تبدیل رادیکال‌های مرکب را یادآوری کنیم که، در خیلی جاها، می‌توانند سودمند باشند:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^۲-B}}{۲}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^۲-B}}{۲}} \ ,$$

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^۲-B}}{۲}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^۲-B}}{۲}}$$

به نکته‌هایی از تابع‌های مثلثاتی توجه کنیم:

الف) کوچکترین دورهٔ گردش (دورهٔ تناوب) $\cos x, \sin x$، برابر است با ۲π، در حالی که برای $\tan x$ و $\cot x$، کوچکترین دورهٔ گردش برابر π است.

به این ترتیب که داریم:

$$\sin(x+۲k\pi) = \sin x \ , \ \cos(x+۲k\pi) = \cos x \ ,$$

$$\tan(x+k\pi) = \tan x \ , \ \cot(x+k\pi) = \cot x$$

که در آن، k عددی است درست (مثبت، منفی یا صفر)، یعنی $k \in \mathbf{Z}$.

ب) برای $\sin x$ و $\cos x$، چون π برابر نصف دورهٔ گردش است، اگر مضرب فرد و درستی از π را از آوند (آرگومان) حذف کنیم، مقدار تابع تغییر علامت می‌دهد، یعنی

$$\sin(x+k\pi) = (-۱)^k \sin x \ , \ \cos(x+k\pi) = (-۱)\cos x$$

که، در آن‌ها، k عددی درست (مثبت، منفی یا صفر) است.

ج) $\sin x$، $\tan x$ و $\cot x$، تابع‌هایی فرد و $\cos x$ تابعی زوج است، یعنی

$$\sin(-x) = -\sin x\ ,\ \cos(-x) = \cos x\ ,$$
$$\tan(-x) = -\tan x\ ,\ \cot(-x) = -\cot x$$

د) اگر برای دو مقدار x و y داشته باشیم:

$$x + y = \frac{\pi}{۲}$$

آن وقت

$$\cos x = \sin y\ ,\ \sin x = \cos y\ ,$$
$$\tan x = \cot y\ ,\ \cot x = \tan y$$

به یاری این ملاحظه‌ها، می‌توانیم سینوس و کسینوس هر آوند دلخواه را، به صورت سینوس و کسینوس آوندی در بازهٔ ۰ و $\frac{\pi}{۴}$ بنویسیم. همین مطلب دربارهٔ تانژانت و کتانژانت هم درست است. در واقع، هر آوند α را می‌توان به صورت

$$\alpha = s\frac{\pi}{۲} \pm \alpha_۰$$

نوشت که، در آن، s عددی درست است و $۰ \leq \alpha_۰ \leq \frac{\pi}{۴}$؛ به یاری همین برابری، می‌توان گزاره‌های پیشین را نتیجه گرفت.

به‌جز این‌ها، این دستورها را هم به یاد می‌آوریم $(k \in \mathbf{Z})$:

$$\sin k\pi = ۰\ ,\ \tan k\pi = ۰\ ,\ \cos k\pi = (-۱)^k$$

به شرط زوج بودن k: $\sin\frac{k}{۲} = ۰$

به شرط فرد بودن k: $\sin\frac{k\pi}{۲} = (-۱)^{\frac{k-۱}{۲}}$

اگر k زوج باشد: $\cos\frac{k\pi}{۲} = (-۱)^{\frac{k}{۲}}$

اگر k فرد باشد: $\cos\frac{k\pi}{۲} = ۰$

نماد $\arcsin x$، به معنای کمانی است که، سینوس آن، برابر x باشد. درضمن، این کمان در بازهٔ $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ قرار دارد. به این ترتیب

$$-\frac{\pi}{۲} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{۲}$$

به همین ترتیب

$$-\frac{\pi}{۲} < \arctan x < \frac{\pi}{۲}\,,$$
$$۰ \leq \arccos x \leq \pi$$
$$۰ < \operatorname{arccot} x < \pi$$

در این بخش، مساله‌هایی هم دربارهٔ لگاریتم و عمل‌های روی آن آورده‌ایم.

۱. ثابت کنید:

$$\left(\frac{۲+\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}+\frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}\right)^{۲}=۲$$

۲. ثابت کنید:

الف) $\sqrt[۳]{\sqrt[۳]{۲}-۱}=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۹}}-\sqrt[۳]{\frac{۲}{۹}}+\sqrt[۳]{\frac{۴}{۹}},$

ب) $\sqrt[۳]{\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۱}{۳}(\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۲۰}-\sqrt[۳]{۲۵})$

ج) $\sqrt{\sqrt[۳]{۲۸}-\sqrt[۳]{۲۷}}=\frac{۱}{۳}(\sqrt[۳]{۹۸}-\sqrt[۳]{۲۸}-۱)$

د) $\left(\frac{۳+۲\sqrt[۴]{۵}}{۳-۲\sqrt[۴]{۵}}\right)^{\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt[۴]{۵}-۱}{\sqrt[۴]{۵}-۱},$

ه) $\left(\sqrt[۵]{\frac{۳۲}{۵}}-\sqrt[۵]{\frac{۲۷}{۵}}\right)^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۵]{\frac{۱}{۲۵}}+\sqrt[۵]{\frac{۳}{۲۶}}-\sqrt[۵]{\frac{۹}{۲۵}},$

و) $$\left(\sqrt[۵]{\frac{۱}{۵}}+\sqrt[۵]{\frac{۴}{۵}}\right)^{\frac{۱}{۲}}=(۱+\sqrt[۵]{۲}+\sqrt{۸})^{\frac{۱}{۵}}=$$

$$=\sqrt[۵]{\frac{۱۶}{۱۲۵}}+\sqrt[۵]{\frac{۸}{۱۲۵}}+\sqrt[۵]{\frac{۲}{۱۲۵}}-\sqrt[۲]{\frac{۱}{۱۲۵}}$$

۳ـ با فرض $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}$ ثابت کنید:

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=$$
$$=\sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}$$

۴. نشان دهید:

$$\sqrt[۳]{ax^۲+by^۲+cz^۲}=\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}+\sqrt[۳]{c}$$

با این شرط که:

$$ax^۳=by^۳=cx^۳,\ \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=۱$$

۵. اگر داشته باشیم:

$$a_n=\left(۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^n+\left(۱-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^n;$$
$$b_n=\left(۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^n-\left(۱-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^n,$$

ثابت کنید:

$$a_{m+n}=a_m\cdot a_n-\frac{a_{m-n}}{۲^n},$$

$$b_{m+n}=a_m\cdot b_n+\frac{b_{m-n}}{۲^n}$$

۶. بافرض

$$u_n=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left[\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^n\right],$$
$$(n=۰,۱,۲,۳,\ldots)$$

این برابری‌ها را ثابت کنید:

$$\text{(الف}\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1},$$

$$\text{(ب}\ u_{n-1} = u_k u_{n-k} + u_{k-1} u_{n-k-1},$$

$$\text{(ج}\ u_{2n-1} = u_n^2 + u_{n-1}^2,$$

$$\text{(د}\ u_{3n} = u_n^3 + u_{n+1}^3 - u_{n-1}^3,$$

$$\text{(ه}\ u_n^4 - u_{n-2} u_{n-1} u_{n+1} u_{n+2} = 1,$$

$$\text{(و}\ u_{n+1} u_{n+2} - u_n u_{n+3} = (-1)^n,$$

$$\text{(ز}\ u_n u_{n+1} - u_{n-2} u_{n-1} = u_{2n-1}$$

۷. درستی این اتحادها را ثابت کنید:

$$\text{(الف}\ \left\{2\left[a^2+b^2\right]^{\frac{1}{2}} - a\right]\left[(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} - b\right]\right\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= a + b - (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} \quad (a > 0, b > 0),$$

$$\text{(ب}\ \left\{3\left[(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}} - a\right]\left[(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}} - b\right]\right\}^{\frac{1}{3}} =$$
$$= (a+b)^{\frac{2}{3}} - (a^2 - ab + b^2)^{\frac{1}{3}}$$

۸. عبارت

$$(1-ax)(1+ax)^{-1}(1+bx)^{\frac{1}{2}}(1-bx)^{-\frac{1}{2}}$$

را به‌ازای $x = a^{-1}\left(2\frac{a}{b} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$، با شرط $0 < a < b < 2a$، محاسبه کنید.

۹. این عبارت را ساده کنید:

$$\frac{n^3 - 3n + (n^2-1)\sqrt{n^2-4} - 2}{n^3 - 3n + (n^2-1)\sqrt{n^2-4} + 2}$$

۱۰. ساده کنید (با شرط $0 < a < 1$):

$$\left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2} - 1 + a}\right] \times \left[\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} - \frac{1}{a}\right]$$

۱۱. ثابت کنید، به شرط $x \geq ۱$ داریم:

$$\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}+\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}=\begin{cases} ۲ & (x \leq ۲) \\ ۲\sqrt{x-۱} & (x > ۲) \end{cases}$$

۱۲. با شرط نامنفی بودن c, b, a، مطلوب است محاسبهٔ:

$$\sqrt{a+b+c+۲\sqrt{ac+bc}}+\sqrt{a+b+c-۲\sqrt{ac+bc}}$$

۱۳. ثابت کنید که سه‌جمله‌ای $x^۳+px+q$ برابر صفر است، به شرطی که

$$x=\sqrt[۳]{-\frac{q}{۲}+\sqrt{\frac{q^۲}{۴}+\frac{p^۳}{۲۷}}}+\sqrt[۳]{-\frac{q}{۲}-\sqrt{\frac{q^۲}{۴}+\frac{p^۳}{۲۷}}}$$

۱۴. x را برحسب یک متغیر جدید چنان بیان کنید که $\sqrt{x+a}$ و $\sqrt{x+b}$ گویا شود.

۱۵. مخرج کسر زیر را گویا کنید:

$$\frac{۱}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a'}+\sqrt{b'}+\sqrt{c'}}$$

به شرطی که بدانیم:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

۱۶. ثابت کنید که $\sqrt[۳]{۲}$ را نمی‌توان به‌صورت $p+\sqrt{q}$ نمایش داد که در آن p و q گویا هستند ($q>۰$ و مربع کامل نیست).

۱۷. درستی این اتحادها را ثابت کنید:

الف) $$\frac{\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)}{\cos(۲\pi-\alpha)}+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)\sin(\pi-\alpha)+$$
$$+\cos(\pi+\alpha)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)=۰;$$

ب) $$[۱-\sin(۳\pi-\alpha)+\cos(۳\pi+\alpha)]\times$$

$$\times \left[1 - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)\right] + \sin 2\alpha = 0;$$

ج) $$[1 - \sin(\pi + \alpha) + \cos^2(\pi + \alpha)] + \left[1 - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right] = 4 - 2\sin 2\alpha$$

۱۸. فرض کنید $\alpha = 2k\pi + \alpha_0$، که در آن $0 \le \alpha_0 \le 2\pi$. ثابت کنید برابری زیر وجود دارد:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = (-1)^k\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

سپس، فرض کنید $\alpha = 2k\pi + \alpha_0$، که در آن $-\pi \le \alpha_0 \le \pi$. ثابت کنید، در این صورت

$$\cos\frac{\alpha}{2} = (-1)^k\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

۱۹. اگر عدد درستی مانند a بر n بخش‌پذیر باشد، می‌نویسیم:

$$a \equiv 0 (mod\, n)$$

که خوانده می‌شود: a همنهشت است با صفر به پیمانه n.

روشن است که در تقسیم هر عدد درست بر n، یکی از این باقی‌مانده‌ها به‌دست می‌آید:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n - 1$$

اگر در تقسیم a بر n، باقیماندهٔ k به‌دست آید، آنگاه می‌نویسند:

$$a \equiv k (mod\, n)$$

چون در این حالت $a - k \equiv 0 (mod\, n)$.

بنابراین، با تقسیم عدد a بر ۲ تنها دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

یا a بر ۲ بخش‌پذیر است، یا باقی‌مانده تقسیم a بر ۲ برابر ۱ است.

در حالت اول می‌نویسیم: $a \equiv ۰ (mod\ ۲)$، در حالت دوم $a \equiv ۱ (mod\ ۲)$. تقسیم بر ۳ نیز ممکن است باقیماندهٔ (۲, ۱, ۰) به‌دست دهد، درنتیجه، سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

$$a \equiv ۲ (mod\, ۳),\ a \equiv ۱ (mod\, ۳),\ a \equiv ۰ (mod\, ۳)$$

مساله زیر را در نظر بگیرید. داریم

$$A_۱ = ۱$$

$$A_۲ = \cos n\pi$$

$$A_۳ = ۲\cos\left(\frac{۲}{۳}n\pi - \frac{۱}{۱۸}\pi\right)$$

$$A_۴ = ۲\cos\left(\frac{۱}{۲}n\pi - \frac{۱}{۸}\pi\right)$$

$$A_۵ = ۲\cos\left(\frac{۲}{۵}n\pi - \frac{۱}{۵}\pi\right) + ۲\cos\frac{۴}{۵}n\pi$$

$$A_۶ = ۲\cos\left(\frac{۱}{۳}n\pi - \frac{۵}{۱۸}\pi\right)$$

$$A_۷ = ۲\cos\left(\frac{۲}{۷}n\pi - \frac{۵}{۱۴}\pi\right) + ۲\cos\left(\frac{۴}{۷}n\pi - \frac{۱}{۱۴}\pi\right) +$$

$$+۲\cos\left(\frac{۶}{۷}n\pi + \frac{۱}{۱۴}\pi\right)$$

$$A_۸ = ۲\cos\left(\frac{۱}{۴}n\pi - \frac{۷}{۱۶}\pi\right) + ۲\cos\left(\frac{۳}{۴}n\pi - \frac{۱}{۱۶}\pi\right)$$

$$A_۹ = ۲\cos\left(\frac{۲}{۹}n\pi - \frac{۱۴}{۲۷}\pi\right) + ۲\cos\left(\frac{۴}{۹}n\pi - \frac{۴}{۲۷}\pi\right) +$$

$$+۲\cos\left(\frac{۸}{۹}n\pi + \frac{۴}{۲۷}\pi\right)$$

$$A_{۱۰} = ۲\cos\left(\frac{۱}{۵}\pi - \frac{۳}{۵}\pi\right) + ۲\cos\frac{۳}{۵}n\pi$$

$$A_{۱۱} = ۲\cos\left(\frac{۲}{۱۱}n\pi - \frac{۱۵}{۲۲}\pi\right) + ۲\cos\left(\frac{۴}{۱۱}n\pi - \frac{۵}{۲۲}\pi\right) +$$

$$+۲\cos\left(\frac{۶}{۱۱}n\pi-\frac{۳}{۲۲}\pi\right)$$

$$+۲\cos\left(\frac{۸}{۱۱}n\pi-\frac{۳}{۲۲}\pi\right)+۲\cos\left(\frac{۱۰}{۱۱}n\pi+\frac{۵}{۲۲}\pi\right)$$

$$A_{۱۲}=۲\cos\left(\frac{۱}{۶}n\pi-\frac{۵۵}{۷۲}\pi\right)+۲\cos\left(\frac{۵}{۶}n\pi+\frac{۱}{۷۲}\pi\right)$$

$$A_{۱۳}=۲\cos\left(\frac{۲}{۱۳}n\pi-\frac{۱۱}{۱۳}\pi\right)+۲\cos\left(\frac{۴}{۱۳}n\pi-\frac{۴}{۱۳}\pi\right)+$$

$$+۲\cos\left(\frac{۶}{۱۳}n\pi-\frac{۱}{۱۳}\pi\right)$$

$$+۲\cos\left(\frac{۸}{۱۳}n\pi+\frac{۱}{۱۳}\pi\right)+۲\cos\frac{۱۰}{۱۳}n\pi+۲\cos\left(\frac{۱۲}{۱۳}n\pi+\frac{۴}{۱۳}\pi\right)$$

$$A_{۱۴}=۲\cos\left(\frac{۱}{۷}n\pi-\frac{۱۳}{۱۴}\pi\right)+۲\cos\left(\frac{۳}{۷}n\pi-\frac{۳}{۱۴}\pi\right)+$$

$$+۲\cos\left(\frac{۵}{۷}n\pi-\frac{۳}{۱۴}\pi\right)$$

$$A_{۱۵}=۲\cos\left(\frac{۲}{۱۵}n\pi-\frac{۱}{۹۰}\pi\right)+۲\cos\left(\frac{۴}{۱۵}n\pi-\frac{۷}{۱۸}\pi\right)+$$

$$+۲\cos\left(\frac{۸}{۱۵}n\pi-\frac{۱۹}{۹۰}\pi\right)+۲\cos\left(\frac{۱۴}{۱۵}n\pi+\frac{۷}{۱۸}\pi\right)$$

$$A_{۱۶}=۲\cos\left(\frac{۱}{۸}n\pi+\frac{۲۹}{۳۲}\pi\right)+۲\cos\left(\frac{۳}{۸}n\pi+\frac{۲۷}{۳۲}\pi\right)+$$

$$+۲\cos\left(\frac{۵}{۸}n\pi+\frac{۵}{۳۲}\pi\right)+۲\cos\left(\frac{۷}{۸}n\pi+\frac{۳}{۳۲}\pi\right)$$

$$A_{۱۷}=۲\cos\left(\frac{۲}{۱۷}n\pi+\frac{۱۴}{۱۷}\pi\right)+۲\cos\left(\frac{۴}{۱۷}n\pi-\frac{۸}{۱۷}\pi\right)+$$

$$+۲\cos\left(\frac{۱۶}{۱۷}n\pi-\frac{۵}{۱۷}\pi\right)+۲\cos\frac{۸}{۱۷}n\pi+۲\cos\left(\frac{۱۰}{۱۷}n\pi-\frac{۱}{۱۷}\pi\right)$$

$$+۲\cos\left(\frac{۱۲}{۱۷}n\pi-\frac{۵}{۱۷}\pi\right)+۲\cos\left(\frac{۱۴}{۱۷}n\pi-\frac{۱}{۱۷}\pi\right)+$$

$$+۲\cos\left(\frac{۱۶}{۱۷}n\pi + \frac{۸}{۱۷}\pi\right)$$

$$A_{۱۸} = ۲\cos\left(\frac{۱}{۹}n\pi + \frac{۲۰}{۲۷}\pi\right) + ۲\cos\left(\frac{۵}{۹}n\pi - \frac{۲}{۲۷}\pi\right) +$$

$$+۲\cos\left(\frac{۷}{۹}n\pi + \frac{۲}{۲۷}\pi\right)$$

ثابت کنید که:

اگر $n \equiv ۱, ۲ (mod\ ۵)$، آن وقت $A_۵ = ۰$

اگر $n \equiv ۱, ۳, ۴ (mod\ ۷)$، آن وقت $A_۷ = ۰$

اگر $n \equiv ۱, ۲ (mod\ ۵)$، آن وقت $A_{۱۰} = ۰$

اگر $n \equiv ۱, ۲, ۳, ۵, ۷ (mod\ ۱۱)$، آن وقت $A_{۱۱} = ۰$

اگر $n \equiv ۲, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۰ (mod\ ۱۳)$، آن وقت $A_{۱۳} = ۰$

اگر $n \equiv ۱, ۳, ۴ (mod\ ۷)$، آن وقت $A_{۱۴} = ۰$

اگر $n \equiv ۰ (mod\ ۲)$، آن وقت $A_{۱۶} = ۰$

اگر $n \equiv ۱, ۳, ۴, ۶, ۷, ۹, ۱۳, ۱۴ (mod\ ۱۷)$، آن وقت $A_{۱۷} = ۰$

و ثابت کنید که $A_۲$، $A_۳$، $A_۴$، $A_۶$، $A_۸$، $A_۹$، $A_{۱۲}$، $A_{۱۵}$ و $A_{۱۸}$ هرگز به‌ازای هیچ عدد درست n صفر نمی‌شود (*س-رامانوجان، ریاضی‌دان هندی ـ دستورهای مجانبی در آنالیز ترکیبی*).

۲۰. فرض کنید $(n \in \mathbf{Z})$:

$$P(n) = A(n+۳)^۲ + B + C(-۱)^n + D\cos\frac{۲\pi n}{۳}$$

ثابت کنید، رابطهٔ زیر وجود دارد:

$$P(n) - P(n-۱) - P(n-۲) + P(n-۴) + P(n-۵) - P(n-۶) = ۰$$

۲۱. نشان دهید که:

الف) $\sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}, \quad \cos ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$

ب) $\sin ۱۸^\circ = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۴}, \quad \cos ۱۸^\circ = \frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}$

۲۲. نشان دهید:

$$\sin 6^\circ = \frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{8},$$
$$\cos 6^\circ = \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8},$$

۲۳. نشان دهید

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$
$$\tan(\mathrm{arccot} x) = \frac{1}{x} \quad \cot(\arctan x) = \frac{1}{x}$$
$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\cos(\mathrm{arccot} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin(\mathrm{arccot} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

۲۴. ثابت کنید:

$$\arctan x + \mathrm{arccot} x = \frac{\pi}{2},$$
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

۲۵. درستی برابری زیر را ثابت کنید:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

با شرط $\varepsilon = 0$، $xy < 1$؛
با شرط $\varepsilon = -1$، $xy > 1$، $x < 0$؛
با شرط $\varepsilon = 1$، $xy > 1$ و $x > 0$

۲۶. نشان دهید:

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

۲۷. نشان دهید:

$$\arctan \frac{۱}{۳} + \arctan \frac{۱}{۵} + \arctan \frac{۱}{۷} + \arctan \frac{۱}{۸} = \frac{\pi}{۴}$$

۲۸. نشان دهید:

$$۲ \arctan x + \arcsin \frac{۲x}{۱ + x^۲} = \pi \quad (x > ۱)$$

۲۹. ثابت کنید:

$$\arctan x + \arctan \frac{۱}{x} = \frac{\pi}{۲} \quad (x > ۰)$$

$$\arctan x + \arctan \frac{۱}{x} = -\frac{\pi}{۲} \quad (x < ۰)$$

۳۰. ثابت کنید:

$$\arcsin x + \arcsin y = \eta \arcsin(x\sqrt{۱ - y^۲} + y\sqrt{۱ - x^۲}) + \varepsilon\pi$$

که در آن $\eta = ۱$ و $\varepsilon = ۰$، اگر $xy < ۰$ و $x^۲ + y^۲ \leq ۱$؛
$\eta = -۱$ و $\varepsilon = -۱$، اگر $x^۲ + y^۲ > ۰$، $x < ۰$، $y < ۰$؛
$\eta = -۱$، $\varepsilon = ۱$، اگر $x^۲ + y^۲ > ۱$، $x > ۰$، $y > ۰$.

۳۱. درستی این برابری را تحقیق کنید:

$$\arccos x + \arccos \left(\frac{x}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۳ - ۳x^۲} \right) = \pi$$

$$\left(\frac{۱}{۲} \leq x \leq ۱ \right)$$

۳۲. اگر $B = \arctan \frac{۱}{۳}$ و $A = \arctan \frac{۱}{۷}$، ثابت کنید:

$$\cos ۲A = \sin ۴B$$

۳۳. فرض کنید $a^۲ + b^۲ = ۷ab$. ثابت کنید:

$$\log \frac{a + b}{۳} = \frac{۱}{۲}(\log a + \log b)$$

۳۴. ثابت کنید:

$$\frac{\log_a n}{\log_{a^m} n} = 1 + \log_a m$$

۳۵. ثابت کنید، از برابری‌های

$$\frac{x(y+z-x)}{\log x} = \frac{y(z+x-y)}{\log y} = \frac{z(x+y-z)}{\log z}$$

نتیجه می‌شود:

$$x^y \cdot y^x = z^y \cdot y^z = x^z \cdot z^x$$

۳۶. الف) ثابت کنید:

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1$$

ب) این عبارت را ساده کنید:

$$a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$$

در مساله‌های زیر، مبنای همهٔ لگاریتم‌ها، یکی است.

۳۷. فرض کنید: $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}$، $z = \frac{1}{10^{1-\log y}}$ (لگاریتم‌ها در مبنای ۱۰ داده شده‌اند). ثابت کنید که

$$x = 10^{\frac{1}{1-10\log z}}$$

۳۸. فرض کنید: $a^2 + b^2 = c^2$ ثابت کنید:

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \log_{c-b} a$$

۳۹. فرض کنید $a > 0$، $c > 0$، $b = \sqrt{ac}$، a، c و $ac \neq 1$، $N > 0$. ثابت کنید:

$$\frac{\log_a N}{\log_c N} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N}$$

۴۰. ثابت کنید:

$$\log^x_{a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{a^n} x}}$$

۴۱. یک تصاعد هندسی و یک تصاعد حسابی با جملههای مثبت

$$a, a_۱, a_۲, \ldots, a_n, \ldots$$
$$b, b_۱, b_۲, \ldots, b_n, \ldots$$

داده شدهاند. قدرنسبتها در هر دو تصاعد مثبت است. ثابت کنید، یک دستگاه لگاریتمی وجود دارد که برای آن داشته باشیم:

$$\log a_n - b_n = \log a - b \qquad (\text{به‌ازای هر مقدار } n)$$

β مبنای این دستگاه را پیدا کنید.

فصل ۴. معادلهها و دستگاه معادلههای درجه اول

معادلهٔ درجه اول یکمجهولی، در حالت کلی، به این صورت است:

$$Ax + B = ۰$$

که در آن، A و B مقدارهایی ثابت و مستقل از xاند. منظور از حل معادلهٔ درجه اول (که به آن، معادلهٔ خطی هم میگویند) آن است که، آن را، به این صورت تبدیل کنیم:

$$x = -\frac{B}{A}$$

بنابراین، مساله حل معادله دجه اول، به اینجا منجر میشود که، معادلهٔ دده شده را، بهصورت $Ax + B = ۰$ تبدیل کنیم.ضمن تبدیل معادله، باید به طور جدی، به این نکته توجه کنیم که، با تبدیلهای همارز سروکار داشته باشیم. به همین ترتیب، ضمن حل یک دستگاه معادله، توجه به تبدیلهای همارز، از اساسیترین نکتههایی است که باید رعایت شود.

در این بخش، بهجز معادلههای سادهٔ درجه اول، معادلههایی را هم که، با تبدیلهای مجاز، منجر به معادلههای درجه اول میشوند (مثل معادلههای رادیکالی، مثلثاتی، لگاریتمی و نمایی)، بررسی کردهایم.

توجه کنیم: معادله‌های مثلثاتی ساده، سرانجام، منجر به حل یک معادلهٔ درجه اول جبری می‌شوند. در واقع، با در دست داشتن معادلهٔ

$$\tan(mx+n)=A$$

می‌توان به‌دست آورد:

$$mx+n=k\pi+\arctan A$$

که در آن، k، عددی درست است $(k\in\mathbf{Z})$. و به این ترتیب، همهٔ مقدارهای x، از این دستور به‌دست می‌آیند:

$$x=\frac{\arctan A-n+k\pi}{m}$$

به همین ترتیب، برای معادلهٔ

$$\cot(mx+n)=A$$

به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{\operatorname{arccot}A-n+k\pi}{m}$$

برای معادله ساده مثلثاتی که شامل سینوسی باشد:

$$\sin(mx+n)=A$$

همهٔ مقدارهای x، که در این معادله صدق کنند، از دستور

$$mx+n=(-۱)^k\arcsin A+k\pi,\quad (k\in\mathbf{Z})$$

و همهٔ مقدارهای x، که در معادلهٔ

$$\cos(mx+n)=A$$

صدق کنند، از دستور

$$mx+n=\pm\arccos A+۲k\pi\quad (k\in\mathbf{Z})$$

به‌دست می‌آیند.

برای حل معادله‌های نهایی، باید به یاد داشته باشیم که معادلهٔ

$$a^x = ۱ \qquad (a > ۰, a \neq ۱)$$

تنها یک جواب دارد: $x = ۰$.

۱. این معادله را حل کنید:

$$\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-ac}{a+c} + \frac{x-bc}{b+c} = a+b+c$$

۲. این معادله را حل کنید:

$$\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ac} + \frac{x-c}{ab} = ۲\left(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}\right)$$

۳. معادله را حل کنید:

$$\frac{۶x+۲a+۳b+c}{۶x+۲a-۳b-c} = \frac{۳x+۶a+b+۳c}{۳x+۶a-b-۳c}$$

۴. معادله را حل کنید:

$$\frac{a+b-x}{c} + \frac{a+c-x}{b} + \frac{b+c-x}{a} + \frac{۴x}{a+b+c} = ۱$$

۵. معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\frac{\sqrt[۶]{b+x}}{b} + \frac{\sqrt[۶]{b+x}}{x} = \frac{c\sqrt[۶]{x}}{a}$$

۶. معادله‌ها را حل کنید:

الف) $\sqrt{x+۱} + \sqrt{x-۱} = ۱$

ب) $\sqrt{x+۱} - \sqrt{x-۱} = ۱$

۷. معادله زیر را حل کنید:

$$\sqrt[۳]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[۳]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[۳]{b}$$

۸. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{۱-\sqrt{x^۴-x^۲}}=x-۱$$

۹. معادله را حل کنید:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

۱۰. معادله را حل کنید:

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$$

۱۱. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+y+u=b \\ x+z+u=c \\ y+z+u=d \end{cases}$$

۱۲. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۲a_۱ \\ x_۱+x_۲-x_۳-x_۴=۲a_۲ \\ x_۱-x_۲+x_۳-x_۴=۲a_۳ \\ x_۱-x_۲-x_۳+x_۴=۲a_۴ \end{cases}$$

۱۳. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} ax+m(y+z+u)=k \\ by+m(x+z+u)=l \\ cz+m(x+y+u)=p \\ dv+m(x+y+z)=q \end{cases}$$

۱۴. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{x_۱ - a_۱}{m_۱} = \dfrac{x_۲ - a_۲}{m_۲} = \ldots = \dfrac{x_p - a_p}{m_p} \\ x_۱ + x_۲ + \ldots x_p = a \end{cases}$$

۱۵. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{۱}{x} + \dfrac{۱}{y} + \dfrac{۱}{z} = a \\ \dfrac{۱}{v} + \dfrac{۱}{x} + \dfrac{۱}{y} = b \\ \dfrac{۱}{v} + \dfrac{۱}{z} + \dfrac{۱}{x} = c \\ \dfrac{۱}{y} + \dfrac{۱}{z} + \dfrac{۱}{v} = d \end{cases}$$

۱۶. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$$

۱۷. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} cy + bz = ۲dyz \\ ax + cx = ۲d'zx \\ bx + ay = ۲d''xy \end{cases}$$

۱۸. این دستگاه را حل کنید:

$$\frac{xy}{ay + bx} = c, \ \frac{xz}{az + cx} = b, \ \frac{yz}{bz + cy} = a$$

۱۹. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} y + z - x = \dfrac{ayz}{a^۲}, \\ z + x - y = \dfrac{xyz}{b^۲}, \\ x + y - z = \dfrac{xyz}{c^۲} \end{cases}$$

۲۰. این دستگاه را حل کنید (با شرط $a+b+c\neq 0$):

$$\begin{cases}(b+c)(y+z)-ax=b-c\\(c+a)(x+z)-by=c-a\\(a+b)(x+y)-cz=a-b\end{cases}$$

۲۱. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases}(c+a)y+(a+b)z-(b+c)x=2a^3\\(a+b)z+(b+c)x-(c+a)y=2b^3\\(b+c)x+(c+a)y-(a+b)z=2c^3\\(b+c\neq 0,\ a+c\neq 0,\ a+b\neq 0)\end{cases}$$

۲۲. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a+\lambda}+\dfrac{y}{b+\lambda}+\dfrac{z}{c+\lambda}=1\\[2mm]\dfrac{x}{a+\mu}+\dfrac{y}{b+\mu}+\dfrac{z}{c+\mu}=1\\[2mm]\dfrac{x}{a+v}+\dfrac{y}{b+v}+\dfrac{z}{c+v}=1\end{cases}$$

۲۳. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases}x+ay+a^2x+a^3=0\\x+by+b^2x+b^3=0\\z+cy+c^2x+c^3=0\end{cases}$$

۲۴. دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}z+ay+a^2x+a^3t+a^4=0\\z+by+b^2x+b^3t+b^4=0\\z+cy+c^2x+c^3t+c^4=0\\z+dy+d^2x+d^3t+d^4=0\end{cases}$$

۲۵. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases}x+y+z+u=m\\ax+by+cz+du=n\\a^2x+b^2y+c^2z+d^2u=k\\a^3x+b^3y+c^3z+d^3u=l\end{cases}$$

۲۶. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ + \ldots + nx_n = a_۱ \\ x_۲ + ۲x_۳ + ۳x_۴ + \ldots + nx_۱ = a_۲ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n + ۲x_۱ + ۳x_۲ + \ldots + nx_{n-۱} = a_x \end{cases}$$

۲۷. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x_۱ - x_۲ - x_۳ - \ldots - x_n = ۲a \\ -x_۱ + ۳x_۲ - x_۳ - \ldots - x_n = ۴a \\ -x_۱ - x_۲ + ۷x_۳ - \ldots - x_n = ۸a \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x_۱ - x_۲ - x_۳ - \ldots + (۲^n - ۱)x_n = ۲^n a \end{cases}$$

۲۸. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ + \ldots + x_n = ۱ \\ x_۱ + x_۳ + \ldots + x_n = ۲ \\ x_۱ + x_۲ + x_۴ + \ldots + x_n = ۳ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_۱ + x_۲ + \ldots + x_{n-۱} = n \end{cases}$$

۲۹. ثابت کنید، برای این‌که معادله‌های

$$ax + b = ۰,\ a'x + b' = ۰$$

سازگار باشند، شرط لازم و کافی آن است که

$$ab' - a'b = ۰$$

۳۰. نشان دهید، دستگاه‌های

$$\begin{cases} ax + by + c = ۰ \\ a'x + b'y + c' = ۰ \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} l(ax + by + c) + l'(a'x + b'y + c') = ۰ \\ m(ax + by + c) + m'(a'x + b'y + c') = ۰ \end{cases}$$

هم‌ارزند، به شرطی که داشته باشیم:

$$lm' - l'm \neq 0$$

۳۱. ثابت کنید، دستگاه

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

یک و تنها یک جواب دارد، به شرطی که داشته باشیم:

$$ab' - a'b \neq 0$$

۳۲. ثابت کنید، از معادله‌های

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{cases}$$

با شرط $ab' - a'b \neq 0$، نتیجه می‌شود:

$$x = y = 0$$

۳۳. نشان دهید، سه معادلهٔ

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \\ a''x + b''y + c'' = 0 \end{cases}$$

سازگارند، به شرطی که داشته باشیم:

$$a''(bc' - b'c) + b''(a'c - c'a) + c''(ab' - a'b) = 0$$

۳۴. a، b و c را عددهایی مختلف فرض می‌کنیم. ثابت کنید از معادله‌های

$$\begin{cases} x + ay + a^2x = 0 \\ x + by + b^2z = 0 \\ x + cy + c^2z = 0 \end{cases}$$

نتیجه می‌شود: $x = y = z = ۰$

۳۵. ثابت کنید، از معادله‌های

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = ۰ \\ A_۱x + B_۱y + C_۱z = ۰ \end{cases}$$

به شرط صفر نبودن مخرج‌ها، نتیجه می‌شود:

$$\frac{x}{C_۱B - CB_۱} = \frac{y}{CA_۱ - C_۱A} = \frac{z}{AB_۱ - A_۱B}$$

۳۶. ثابت کنید با حذف x، y و z از معادله‌های

$$\begin{cases} ax + cy + bz = ۰ \\ cx + by + az = ۰ \\ bx + ay + cz = ۰ \end{cases}$$

نتیجه می‌شود:

$$a^۳ + b^۳ + c^۳ - ۳abc = ۰$$

۳۷. این دستگاه داده شده است:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda\left(۱ + \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{۱}{\lambda}\left(۱ - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu\left(۱ - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{۱}{\mu}\left(۱ + \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

ثابت کنید، این معادله‌ها سازگارند و x، y و z را تعیین کنید.

۳۸. سازگار بودن یا نبودن معادله‌های این دستگاه را تحقیق کنید.

$$\begin{cases} (a + b)x + (ap + bq)y = ap^۲ + bq^۲ \\ (ap + bq) + (ap^۲ + bq^۲)y = ap^۳ + bq^۳ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (ap^{k-۱} + bq^{k-۱}) + (ap^k + bq^k)y = ap^{k+۱} + by^{k+۱} \end{cases}$$

۳۹. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_3 + x_4 = a_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} + x_n = a_{n-1} \\ a_n + x_1 = a_n \end{cases}$$

۴۰. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \dfrac{a^2 x}{a-d} + \dfrac{b^2 y}{b-d} + \dfrac{c^2 z}{c-d} = 0 \\ \dfrac{ax}{a-d} + \dfrac{by}{b-d} + \dfrac{cz}{c-d} = d(a-b)(b-c)(c-a) \end{cases}$$

۴۱. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} (x+a)(y+l) = (a-n)(l-b) \\ (y+b)(z+m) = (b-l)(m-l) \\ (z+c)(x+n) = (c-m)(n-a) \end{cases}$$

۴۲. k را طوری تعیین کنید که این دستگاه، سازگار باشد:

$$\begin{cases} x + (1-k)y = 0 \\ (1-k)x + ky = 1 + k \\ (1+k)x + (12-k)y = -(1+k) \end{cases}$$

۴۳. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x\sin a + y\sin 2a + z\sin 3a = \sin 4a \\ x\sin b + y\sin 2b + z\sin 3b = \sin 4b \\ x\sin c + y\sin 2c + z\sin 3c = \sin 4c \end{cases}$$

۴۴. نشان دهید که از برابری‌های

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{C}{\sin C}, A + B + C = \pi$$

نتیجه می‌شود:

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = c\cos A + a\cos C$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

۴۵. نشان دهید، باتوجه به این‌که

$$a = b\cos C + c\cos B,$$
$$b = c\cos A + a\cos C,$$
$$c = a\cos B + b\cos A,$$
$$۰ < A < \pi, ۰ < B < \pi, ۰ < C < \pi, a > ۰, b > ۰, c > ۰$$

می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ و } A + B + C = \pi$$

۴۶. فرض کنید

$$\begin{matrix} a = b\cos C + C cos B \\ b = c\cos A + a\cos C \\ c = a\cos B + b\cos A \end{matrix} \quad (۱); \quad \begin{matrix} a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A \\ b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos B \\ c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos C \end{matrix} \quad (۲)$$

نشان دهید که دستگاه‌های (۱) و (۲) هم‌ارزند، یعنی از معادله‌های (۱)، معادله‌های (۲) نتیجه می‌شود و برعکس از معادله‌های (۲)، معادله‌های (۱) نتیجه می‌شود.

۴۷. فرض کنید:

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A,$$
$$\cos b = \cos a\cos c + \sin a\sin c\cos B,$$
$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C,$$

که در آن a، b، c و A، B، C بین ۰ و π هستند. ثابت کنید:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

۴۸. ثابت کنید باتوجه به شرط‌های مساله قبل نتیجه می‌گیریم:

$$\text{(الف)}\ \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$
$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b,$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$
$$\text{(ب)}\ \tan \frac{۱}{۴}\varepsilon = \sqrt{\tan \frac{p}{۲} \tan \frac{p-a}{۲} \tan \frac{p-b}{۲} \tan \frac{p-c}{۲}}$$

به شرطی که

$$۲p = a + b + c \text{ و } \varepsilon = A + B + C - \pi$$

۴۹. معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$(b-c)\tan(x+\alpha) + (c-a)\tan(x+\beta) + (a-b)\tan(x+\gamma) = ۰$$

۵۰. ثابت کنید، $\sin x$ و $\cos x$ گویا هستند، اگر و تنها اگر $\tan \frac{x}{۲}$ گویا باشد.

۵۱. معادله را حل کنید:

$$\sin^۴ x + \cos^۴ x = a$$

۵۲. معادله‌ها را حل کنید:

$$\text{(الف)}\ \sin x + \sin ۲x + \sin ۳x = ۰$$
$$\text{(ب)}\ \cos nx + \cos(\pi - ۲)x - \cos x = ۰$$

۵۳. معادله‌ها را حل کنید:

$$\text{(الف)}\ m \sin(a-x) = n \sin(b-x);$$
$$\text{(ب)}\ \sin(x + ۳\alpha) = ۳\sin(\alpha - x)$$

۵۴. معادله را حل کنید:

$$\sin ۵x = ۱۶ \sin^۵ x$$

۵۵. معادله را حل کنید:

$$\sin x + ۲\sin x\cos(a-x) = \sin a$$

۵۶. این معادله را حل کنید:

$$\sin x\sin(\gamma - x) = a$$

۵۷. معادله را حل کنید:

$$\sin(\alpha + x) + \sin\alpha\sin x\tan(\alpha + x) = m\cos\alpha\cos x$$

۵۸. معادله را حل کنید:

$$\cos^۲\alpha + \cos^۲ x + \cos^۲(\alpha + x) = ۱ + ۲\cos\alpha\cos(\alpha + x)$$

۵۹. معادله را حل کنید:

$$(۱ - \tan x)(۱ + \sin ۲x) = ۱ + \tan x$$

۶۰. نشان دهید، اگر

$$\tan x + \tan ۲x + \tan ۳x + \tan ۴x = ۰$$

آنگاه یا $۵x = k\pi$ یا $۸\cos ۲x = ۱ \pm \sqrt{۱۷}$

۶۱. این عبارت داده شده است:

$$ax^۲ + ۲bxy + cy^۲$$

به این صورت تغییر داده‌ایم:

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta,$$

$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta,$$

زاویهٔ θ را طوری تعیین کنید که برابری زیر برقرار شود:

$$ax^{۲} + ۲bxy + cy^{۲} = AX^{۲} + BY^{۲}$$

۶۲. نشان دهید، از برابری‌های

$$\frac{x}{\tan(\theta+\alpha)} = \frac{y}{\tan(\theta+\beta)} = \frac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$$

نتیجه می‌شود:

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^{۲}(\alpha-\beta) + \frac{y+z}{y-z}\sin^{۲}(\beta-\gamma) + \frac{z+x}{z-x}\sin^{۲}(\gamma-\alpha) = ۰$$

۶۳. دستگاه‌های زیر را حل کنید:

الف) $$\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin y}{b} = \frac{\sin x}{c}$$
$$x+y+z=\pi$$

ب) $$\frac{\tan x}{a} = \frac{\tan y}{b} = \frac{\tan z}{c}$$
$$x+y+z=\pi$$

۶۴. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} \tan x + \tan y = a \\ x + y = ۲b \end{cases}$$

۶۵. این معادله را حل کنید:

$$۴^{x} - ۳^{x-\frac{۱}{۲}} = ۳^{x+\frac{۱}{۲}} - ۲^{x-۱}$$

۶۶. جواب‌های مثبت این معادله را پیدا کنید:

$$x^{x+۱} = ۱$$

۶۷. دستگاه را حل کنید

$$\begin{cases} a^{x}b^{y} = m \\ x+y = n \quad (a > ۰, b > ۰) \end{cases}$$

۶۸. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ a^x = b^y \end{cases}$$

۶۹. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} (ax)^{\log a} = (by)^{\log b} \\ b^{\log x} = a^{\log y} \end{cases}$$

۷۰. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^m = y^n \end{cases}$$

فصل ۵. معادله و دستگاه‌های درجه دوم

این بخش به معادله‌های درجه دوم و استفاده از ویژگی‌های سه‌جمله‌ای درجه دوم اختصاص دارد.

اگر سه‌جمله‌ای درجه دوم $ax^۲ + bx + c$، ریشه‌های موهومی داشته باشد، سه‌جمله‌ای به‌ازای هر مقدار حقیقی x، دارای یک علامت است. به سادگی ثابت می‌شود که، علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم، در این حالت، همان علامت c (مقدار ثابت) است. بنابراین، اگر $c > ۰$ و $b^۲ - ۴ac < ۰$، آن‌گاه، برای همهٔ مقدارهای حقیقی x:

$$ax^۲ + bx + c > ۰$$

به این نکته توجه داشته باشید: اگر با m معادلهٔ mمجهولی سروکار داشته باشیم، به نحوی که این معادله‌ها، به‌ترتیب، از درجهٔ $k_۱$، $k_۲$، ...، k_m باشند، آن‌وقت دستگاه، در حالت کلی، دارای $(k_۱ k_۲ \dots k_m)$ جواب است. به زبان دقیق‌تر: حداکثر تعداد جواب‌های یک دستگاه، برابر است با حاصل‌ضرب درجه‌های معادله‌های آن‌ها.

در این بخش، حرف‌های a، b، c، p و q، که در معادله‌های دستگاه‌ها به کار رفته‌اند، مقدارهای ثابت و نمایندهٔ عددهایی حقیقی هستند.

۱. این معادله را حل کنید:

$$x^{۲}\frac{(b+x)(x+c)}{(x-b)(x-c)}+b^{۲}\frac{(b+c)(b+x)}{(b-c)(b-x)}+c^{۲}\frac{(c+x)(c+b)}{(c-x)(c-b)}=(b+c)^{۲}$$

۲. معادله را حل کنید.

$$a^{۳}(b-c)(x-b)(x-c)+b^{۳}(c-a)\times$$
$$\times(x-c)(x-a)+c^{۳}(a-b)(x-a)(x-b)=۰$$

و نشان دهید که اگر ریشه‌های این معادله برابر باشند، آن‌گاه یکی از این برابری‌ها وجود دارد:

$$\frac{۱}{\sqrt{a}}\pm\frac{۱}{\sqrt{b}}\pm\frac{۱}{\sqrt{c}}=۰$$

۳. معادله را حل کنید:

$$\frac{(a-x)\sqrt{a-x}-(b-x)\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=a-b$$

۴. معادله را حل کنید:

$$\sqrt{۴a+b-۵x}+\sqrt{۴b+a-۵x}-۳\sqrt{a+b-۲x}=۰$$

۵. ثابت کنید، ریشه‌های معادلهٔ

$$(x-a)(x-c)+\lambda(x-b)(x-d)=۰$$

به‌ازای هر مقدار λ حقیقی است اگر $a<b<c<d$.

۶. نشان دهید، این معادله، همیشه ریشه‌های حقیقی دارد:

$$(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c)=۰$$

۷. ثابت کنید، به شرط $p_{۱}p=۲(q_{۱}+q)$، دست‌کم یکی از این دو معادله، ریشه‌های حقیقی دارد.

$$x^{۲}+px+q=۰$$
$$x^{۲}+p_{۱}x+q_{۱}=۰$$

۸. ثابت کنید ریشههای این معادله، همواره حقیقیاند:

$$a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-a)(x-b)=۰$$

۹. p و q را طوری پیدا کنید که بهازای آن ریشههای معادلهٔ

$$x^۲+px+q=۰$$

برابر p و q باشند.

۱۰. ثابت کنید بهازای هر مقدار حقیقی x، y و z، این نابرابری برقرار است:

$$x^۲+y^۲+z^۲-xy-xz-yz\geq ۰$$

۱۱. فرض کنید $x+y+z=a$، ثابت کنید:

$$x^۲+y^۲+z^۲\geq \frac{a^۲}{۳}$$

۱۲. ثابت کنید:

$$x+y+z\leq \sqrt{۳(x^۲+y^۲+z^۲)}$$

۱۳. α و β را ریشههای معادلهٔ درجه دوم

$$x^۲+px+q=۰$$

و $\alpha^k+\beta^k=S_k$ فرض میکنیم. مقدار S_k را، وقتی k، برابر ۱$\pm$، ۲$\pm$، ۳$\pm$، ۴$\pm$ و ۵$\pm$ باشد، برحسب p و q بهدست آورید.

۱۴. اگر α و β، ریشههای معادله درجه دوم

$$x^۲+px+q=۰\quad(\alpha>۰,\ \beta>۰)$$

باشند، مقدار $\sqrt[۴]{\alpha}+\sqrt[۴]{\beta}$ را برحسب ضریبهای این معادله بیان کنید.

۱۵. نشان دهید اگر دو معادلهٔ

$$Ax^۲+Bx+C=۰,\ A'x^۲+B'x+C'=۰$$

یک ریشهٔ مشترک داشته باشند، آنگاه

$$(AC' - CA')^۲ = (AB' - BA')(BC' - CB')$$

۱۶. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x(x+y+z) = a^۲ \\ y(x+y+z) = b^۲ \\ z(x+y+z) = c^۲ \end{cases}$$

۱۷. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x(x+y+z) = a - yz \\ y(x+y+z) = b - xz \\ z(x+y+z) = c - xy \end{cases}$$

۱۸. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} y + ۲x + z = a(y+x)(z+x) \\ z + ۲y + x = b(z+y)(x+y) \\ x + ۲z + y = c(y+z)(x+z) \end{cases}$$

۱۹. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} y + z + yz = a \\ x + z + xz = b \\ x + y + xy = c \end{cases}$$

۲۰. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{aligned} yz &= ax \\ zx &= by \qquad (a > ۰, b > ۰, c > ۰) \\ xy &= cz \end{aligned}$$

۲۱. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = cxyz \\ x^۲ + z^۲ = bxyz \\ y^۲ + z^۲ = axyz \end{cases}$$

۲۲. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x(y+z)=a^{2} \\ y(x+z)=b^{2} \\ z(x+y)=c^{2} \end{cases}$$

۲۳. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^{3}=ax+by \\ y^{3}=bx+ay \end{cases}$$

۲۴. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^{2}=a+(y-z)^{2} \\ y=b+(x-z)^{2} \\ z^{2}=c+(x-y)^{2} \end{cases}$$

۲۵. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{b(x+y)}{x+y+cxy}+\dfrac{c(z+x)}{x+z+bxz}=a \\ \dfrac{c(y+z)}{y+z+ayz}+\dfrac{a(x+y)}{x+y+cxy}=b \\ \dfrac{a(x+z)}{x+z+bxz}+\dfrac{b(y+z)}{y+z+ayz}=c \end{cases}$$

۲۶. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^{2}-yz=a \\ y^{2}-xz=b \\ x^{2}-xy=c \end{cases}$$

۲۷. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} y^{2}+z^{2}-(y+z)x=0 \\ x^{2}+z^{2}-(x+z)y=b \\ x^{2}+y^{2}-(x+y)z=c \end{cases}$$

۲۸. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ + xy = c^۲ \\ z^۲ + x^۲ + xz = b^۲ \\ y^۲ + z^۲ + yz = a^۲ \end{cases}$$

۲۹. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^۳ + y^۳ + z^۳ = a^۳ \\ x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲ \\ x + y + z = a \end{cases}$$

۳۰. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^۴ + y^۴ + z^۴ + u^۴ = a^۴ \\ x^۳ + y^۳ + z^۳ + u^۳ = a^۳ \\ x^۲ + y^۲ + z^۲ + u^۲ = a^۲ \\ x + y + z + u = a \end{cases}$$

۳۱. ثابت کنید، دستگاه‌های (۱) و (۲) هم‌ارزند، یعنی از وجود (۱) وجود (۲) و برعکس نتیجه می‌شود.

$$\begin{array}{ll} a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۱, & aa' + bb' + cc' = ۰ \\ a'^۲ + b'^۲ + c'^۲ = ۱, & a'a'' + b'b'' + c'c'' = ۰ \qquad (۱) \\ a''^۲ + b''^۲ + c''^۲ = ۱, & aa'' + bb'' + cc'' = ۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a^۲ + a'^۲ + a''^۲ = ۱, & ab + a'b' + a''b'' = ۰ \\ b^۲ + b'^۲ + b''^۲ = ۱, & bc + b'c' + b''c'' = ۰ \qquad (۲) \\ c^۲ + c'^۲ + c''^۲ = ۱, & ca + c'a' + c''a'' = ۰ \end{array}$$

۳۲. در این برابری‌ها x، y و z را حذف کنید:

$$x^۲(y+z) = a^۳; y^۲(x+z) = b^۳; z^۲(x+y) = c^۳,\ xyz = abc$$

۳۳. در این برابری‌ها، x و y و z را حذف کنید.

$$\frac{y}{z} - \frac{x}{y} = a\,,\ \frac{z}{x} - \frac{x}{z} = b\,,\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = c$$

۳۴. در معادله‌های زیر، x، y و z را حذف کنید:

$$\begin{cases} y^۲ + z^۲ - ۲ayz = ۰ \\ z^۲ + x^۲ - ۲bxz = ۰ \\ x^۲ + y^۲ - ۲cxy = ۰ \end{cases}$$

۳۵. نشان دهید که با حذف x، y و z از دستگاه

$$\begin{cases} y^۲ + yz + z^۲ = a^۲ \\ z^۲ + xz + x^۲ = b^۲ \\ x^۲ + xy + y^۲ = c^۲ \\ xy + yz + xz = ۰ \end{cases}$$

این رابطه نتیجه می‌شود:

$$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) = ۰$$

۳۶. x و y را از این معادله‌ها حذف کنید:

$$x + y = a,\ x^۲ + y^۲ = b,\ x^۳ + y^۳ = c$$

۳۷. a، b و c را از این دستگاه حذف کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} \\ a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۱ \\ a + b + c = ۱ \end{cases}$$

۳۸. x و y و z را بین معادله‌های این دستگاه حذف کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} = \alpha \\ \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} = \beta \\ \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}\right)\left(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}\right)\left(\dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y}\right) = \gamma \end{cases}$$

۳۹. ثابت کنید اگر داشته باشیم:

$$x+y+z+w=0$$
$$ax+by+cz+bw=0$$
$$(a-d)^2(b-c)^2(xw+yz)+(b-d)^2(c-a)^2(yw+zx)+$$
$$+(c-d)^2(a-b)^2(zw+xy)=0$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{x}{(d-b)(d-c)(b-c)}=\frac{y}{(d-a)(d-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{z}{(d-a)(d-b)(a-b)}=\frac{w}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

۴۰. الف) با شرط‌های $2\pi > \alpha > 0$ و $\pi > \beta > \alpha$ و

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}$$

ثابت کنید: $\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$

ب) با فرض $\pi > \alpha > 0$، $0 < \beta < \pi$ و

$$\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{8}$$

ثابت کنید:

$$\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$$

۴۱. با فرض $\sin\theta+\sin\varphi=b$، $\cos\theta+\cos\varphi=a$، مطلوب است محاسبهٔ

$$\sin(\theta+\varphi) \text{ و } \cos(\theta+\varphi)$$

۴۲. اگر α و β جواب‌های متمایز معادلهٔ

$$a\cos x+b\sin x=c$$

باشند، ثابت کنید $\cos^{۲}\dfrac{\alpha-\beta}{۲}=\dfrac{c^{۲}}{a^{۲}+b^{۲}}$

۴۳. با فرض $\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\dfrac{a}{b}$ و $\dfrac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}-\dfrac{c}{d}$

ثابت کنید $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{ac+bd}{ad+bc}$

۴۴. با فرض $\dfrac{e^{۲}-۱}{۱+۲e\cos\alpha+e^{۲}}=\dfrac{۱+۲e\cos\beta+e^{۲}}{e^{۲}}$

ثابت کنید:

الف) $$\frac{e^{۲}-۱}{۱+۲e\cos\alpha+e^{۲}}=\frac{e+\cos\beta}{e+\cos\alpha}=\pm\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=-\frac{۱+e\cos\beta}{۱+e\cos\alpha}$$

ب) $$\tan\frac{\alpha}{۲}\cdot\tan\frac{\beta}{۲}=\pm\frac{۱+e}{۱-e}$$

۴۵. ثابت کنید اگر $\dfrac{\cos x-\cos\alpha}{\cos x-\cos\beta}=\dfrac{\sin^{۲}\alpha\cos\beta}{\sin^{۲}\beta\cos\alpha}$ ، آنگاه یکی از مقدارهای $\tan\dfrac{x}{۲}$ برابر $\tan\dfrac{\beta}{۲}\tan\dfrac{\alpha}{۲}$ است.

۴۲. با فرض

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\varphi=\cos\gamma\cos\theta,\ \sin\alpha=۲\sin\frac{\varphi}{۲}\sin\frac{\theta}{۲}$$

ثابت کنید: $\tan^{۲}\dfrac{\alpha}{۲}=\tan^{۲}\dfrac{\beta}{۲}\cdot\tan^{۲}\dfrac{\gamma}{۲}$

۴۷. نشان دهید، اگر

$$(x-\alpha)\cos\theta+y\sin\theta=(x-\alpha)\cos\theta_{۱}+y\sin\theta_{۱}=a$$
$$\tan\frac{\theta}{۲}-\tan\frac{\theta_{۱}}{۲}=l$$

آنگاه $y^{۲}=۲ax-(۱-l^{۲})x^{۲}$

۴۸. ثابت کنید که از برابری‌ها

$$x\cos\theta+y\sin\theta=x\cos\varphi+y\sin\varphi=۲a$$
$$۲\sin\frac{\theta}{۲}\sin\frac{\varphi}{۲}=۱$$

نتیجه می‌گیریم:

$$y^2 = 4a(a-x)$$

۴۹. فرض کنید: $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$ و ثابت کنید:

$$\tan\frac{\theta+\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\theta-\alpha}{2} = \tan^2\frac{\beta}{2}$$

۵۰. نشان دهید، اگر

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+\theta)}{b} = \frac{\cos(x+2\theta)}{c} = \frac{\cos(x+3\theta)}{d}$$

آن‌گاه $\frac{a+c}{b} = \frac{b+d}{c}$

۵۱. با فرض

$$\cos^2\theta = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta},\ \cos^2\varphi = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta},\ \frac{\tan\theta}{\tan\varphi} = \frac{\tan\alpha}{\tan\gamma}$$

ثابت کنید: $\tan^2\frac{\alpha}{2}\cdot\tan^2\frac{\gamma}{2} = \tan^2\frac{\beta}{2}$

۵۲. ثابت کنید، اگر

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta,\ \cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\beta,\ \tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\varphi}{2} = \tan\frac{\beta}{2}$$

آن‌گاه

$$\sin^2\beta = \left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha_1}-1\right)$$

۵۳. بافرض

$$x\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = x\cos(\beta+\gamma)$$
$$+\cos(\beta-\gamma) = x\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\gamma-a)$$

ثابت کنید:

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\frac{1}{2}(\beta+\gamma)} = \frac{\tan\beta}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)} = \frac{\tan\gamma}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

۵۴. ثابت کنید، اگر

$$\frac{\sin(\theta-\beta)\cos\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)\cos\beta}+\frac{\cos(\alpha+\theta)\sin\beta}{\cos(\varphi-\beta)\sin\alpha}=0$$
$$\frac{\tan\theta\tan\alpha}{\tan\varphi\tan\beta}+\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=0$$

آنگاه

$$\tan\theta=\frac{1}{2}(\tan\beta+\cot\alpha),\ \tan\varphi=\frac{1}{2}(\tan\alpha-\cot\beta)$$

۵۵. می‌دانیم:

$$n^2\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)$$

ثابت کنید: $\tan\alpha=\frac{1\pm n}{1\mp n}\tan\beta$

۵۶. θ را از این رابطه‌ها حذف کنید:

$$\cos(\alpha-3\theta)=m\cos^3\theta,\ \sin(\alpha-3\theta)=m\sin^3\theta$$

۵۷. θ را از این رابطه‌ها حذف کنید:

$$(a-b)\sin(\theta+\varphi)=(a+b)\sin(\theta-\varphi),$$
$$a\tan\frac{\theta}{2}-b\tan\frac{\varphi}{2}=c$$

۵۸. نشان دهید که با حذف θ و φ از رابطه‌های

$$\cos\theta=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},\ \cos\varphi=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},\ \cos(\theta-\varphi)=\sin\beta\sin\gamma$$

به‌دست می‌آید: $\tan^2\alpha=\tan^2\beta+\tan^2\gamma$

۵۹. θ و φ را از این رابطه‌ها حذف کنید:

$$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi=1,\ a\tan\theta=b\tan\varphi$$

۶۰. ثابت کنید، اگر $\cos(\theta-\alpha)=a,\ \sin(\theta-\beta)=b$،

آن‌گاه $a^۲ - ۲ab\sin(\alpha - \beta) + b^۲ = \cos^۲(\alpha - \beta)$

۶۱. این معادله را حل کنید:

$$\cos ۳x \cos^۳ x + \sin ۳x \sin^۳ x = ۰$$

۶۲. این معادله را حل کنید:

$$\sin ۲x + \cos ۲x + \sin x + \cos x + ۱ = ۰$$

۶۳. این معادله را حل کنید:

$$\tan^۲ x = \frac{۱ - \cos x}{۱ - \sin x}$$

۶۴. این معادله را حل کنید:

$$۳۲ \cos^۶ x - \cos ۶x = ۱$$

۶۵. این معادله را حل و بحث کنید:

$$\sin ۳x + \sin ۲x = m \sin x$$

۶۶. این معادله را حل کنید:

$$(۱ + k)\frac{\cos x \cos(۲x - \alpha)}{\cos(x - \alpha)} = ۱ + k \cos ۲x$$

۶۷. این معادله را حل کنید:

$$\sin^۴ x + \cos^۴ x - ۲\sin^۲ x + \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x = ۰$$

۶۸. این معادله را حل کنید:

$$۲\log_x a + \log_{ax} a + ۳\log_{a^۲x} a = ۰$$

۶۹. جواب‌های مثبت این دستگاه را به‌دست آورید.

$$x^{x+y} = y^a,\ y^{x+y} = x^{۴a} \quad (a > ۰)$$

۷۰. مقدارهای مثبت مجهول‌های x، y، u و v را از این دستگاه پیدا کنید:

$$u^p v^q = a^x,\ u^q v^p = a^y,\ u^x v^y = b,\ u^y v^x = c$$
$$(a, b, c > ۰ \text{ و } p^۲ - q^۲ \neq ۰)$$

فصل ۶. عددهای مختلط و چندجمله‌ای‌ها

در این بخش، فرض را بر این گرفته‌ایم که، خواننده، با عمل‌های اصلی روی عددهای مختلط، یعنی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آن‌ها آشنایی دارد. همچنین، فرض بر این گرفته‌ایم که، خوانندهٔ این کتاب، با صورت مثلثاتی یک عدد مختلط و با دستور موآور آشنا است.

در تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها و حل برخی از معادله‌های از درجهٔ بالا، قضیهٔ باقی‌ماندهٔ نقشی اساسی به عهده دارد. این قضیه را «بهزو» ریاضی‌دان فرانسوی آورده است. آن را در این‌جا می‌آوریم:

اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای برحسب x باشد و اگر $f(a) = ۰$، آن‌وقت $f(x)$ بر $x - a$ بخش‌پذیر است. از آن‌جاکه پذیرفته‌ایم چندجمله‌ای درجه n دارای n ریشه است، در واقع قبول کرده‌ایم که امکان تجزیهٔ یک چندجمله‌ای درجه n، به n عامل خطی وجود دارد. قضیهٔ دیگری هم، در این بخش، بارها مورد استفاده قرار گرفته است:

اگر چندجمله‌ای درجه n، به‌ازای $(n + ۱)$ مقدار x برابر صفر شود، به معنای آن است که، این چندجمله‌ای متحد با صفر است. از این‌جا نتیجه می‌شود که، اگر چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $\varphi(x)$، هر دو از درجهٔ n باشند و، درضمن، به‌ازای $(n + ۱)$ مقدار x، با هم برابر شوند، این چندجمله‌ای‌ها برابر و هم‌ارزند، به زبان دیگر، ضریب‌های توان‌های برابر در چندجمله‌ای‌ها، با هم برابرند.

سرانجام، بهتر می‌دانیم رابطه‌هایی که بین ریشه‌های یک معادلهٔ درجه n و ضریب‌های آن وجود دارد، در این‌جا بیاوریم، ریشه‌های چندجمله‌ای

$$x^n + p_۱ x^{n-۱} + p_۲ x^{n-۲} + \ldots + p_{n-۱} x + p_n = ۰$$

را $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n می‌گیریم، به نحوی که بتوان چندجمله‌ای را به‌صورت

$$(x - x_۱)(x - x_۲)\ldots(x - x_n)$$

تجزیه کرد در این صورت داریم:

$$x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = -p_۱,$$
$$x_۱x_۲ + x_۱x_۳ + \ldots + x_۱x_n + x_۲x_۳ + \ldots + x_{n-۱}x_n = p_۲,$$
$$x_۱x_۲x_۳ + \ldots + x_{n-۲}x_{n-۱}x_n = -p_۳$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_۱x_۲\ldots x_n = (-۱)^n p_n$$

۱. ثابت کنید، اگر x و y دو عدد مختلط باشند، داریم:

$$|x+y|^۲ + |x-y|^۲ = ۲(|x|^۲ + |y|^۲)$$

۲. همهٔ عددهای مختلط x را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

الف) $\overline{x} = x^۲$، ب) $\overline{x} = x^۳$

($\overline{x}$ به‌معنای مزدوج عدد x است).

۳. ثابت کنید:

$$\sqrt{(a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n)^۲ + (b_۱ + b_۲ + \ldots + b_n)^۲} \leq$$
$$\leq \sqrt{a_۱^۲ + b_۱^۲} + \sqrt{a_۲^۲ + b_۲^۲} + \ldots + \sqrt{a_n^۲ + b_n^۲}$$

که در آن، a_i، b_i $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$، عددهای حقیقی دلخواهند.

۴. ثابت کنید، به شرط $\varepsilon^۲ + \varepsilon + ۱ = ۰$ داریم:

$$(a+b+c)(a+b\varepsilon+c\varepsilon^۲)(a+b\varepsilon^۲+c\varepsilon) = a^۳ + b^۳ + c^۳ - ۳abc$$

۵. ثابت کنید:

$$(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}-ab-ac-bc)\times(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-xy-xz-yz)$$
$$=X^{۲}+Y^{۲}+Z^{۲}-XY-XZ-YZ$$

به شرطی که داشته باشیم:

$$X=ax+cy+bz,$$
$$Y=cx+by+az,$$
$$Z=bx+ay+cz,$$

۶. با فرض $\varepsilon^{۲}+\varepsilon+۱=۰$

$$x+y+z=A$$
$$x+y\varepsilon+z\varepsilon^{۲}=B$$
$$x+y\varepsilon^{۲}+z\varepsilon=C$$

الف) x، y و z را برحسب A، B و C بیان کنید.
ب) ثابت کنید: $|A|^{۲}+|B|^{۲}+|C|^{۲}=۳\{|x|^{۲}+|y|^{۲}+|z|^{۲}\}$
۷. با فرض $\varepsilon^{۲}+\varepsilon+۱=۰$ و

$$\begin{array}{lll} A=x+y+z & A'=x'+y'+z' & AA'=x''+y''+z'' \\ B=x+y\varepsilon+z\varepsilon^{۲} & B'=x'+y'\varepsilon+z'\varepsilon^{۲} & BB'=x''+y''\varepsilon+z''\varepsilon^{۲} \\ C=x+y\varepsilon^{۲}+z\varepsilon & C'=x'+y'\varepsilon^{۲}+z'\varepsilon & CC'=x''+y''\varepsilon^{۲}+z''\varepsilon \end{array}$$

x''، y'' و z'' را برحسب x، y، z و x'، y'، z' بنویسید.
۸. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$(ax-by-cx-dt)^{۲}+(bx+ay-dz+ct)^{۲}+(cx+dy+az-bt)^{۲}$$
$$+(dx-cy+bz+at)^{۲}=(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+d^{۲})(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}+t^{۲})$$

۹. این برابری‌ها را ثابت کنید.

الف) $$\frac{\cos n\varphi}{\cos^{n}\varphi}=۱-\binom{n}{۲}\tan^{۲}\varphi+\binom{n}{۴}\tan^{۴}\varphi-\ldots+A$$

که در آن

اگر n زوج باشد: $A = (-۱)^{\frac{n}{۲}} \tan^{n-۱} \varphi$

اگر n فرد باشد: $A = (-۱)^{\frac{n-۱}{۲}} \binom{n}{n-۱} \tan^{n-۱}$

x''، y'' و x'' را برحسب x، y، z و x'، y'، x' را بنویسید.

۸. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$(ax - by - cz - dt)^۲ + (bx + ay - dz + ct)^۲ + (cx + dy + az - bt)^۲$$
$$+(dx - cy + bz + at)^۲ = (a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲)(x^۲ + y^۲ + z^۲ + t^۲)$$

۹. این برابری‌ها را ثابت کنید:

الف) $$\frac{\cos n\varphi}{\cos n\varphi} = ۱ - \binom{n}{۲} \tan^۲ \varphi + \binom{n}{۴} \tan^۴ \varphi - \ldots + A$$

که در آن

اگر n زوج باشد: $A = (-۱)^{\frac{n}{۲}} \tan^n \varphi$

اگر n فرد باشد: $A = (-۱)^{\frac{n-۱}{۲}} \binom{n}{n-۱} \tan^{n-۱} \varphi$

ب) $$\frac{\sin \varphi}{\cos^n \varphi} = \binom{n}{۱} \tan \varphi - \binom{n}{۳} \tan^۳ \varphi + \binom{n}{۵} \tan^۵ \varphi + \ldots + A$$

که در آن

اگر n زوج باشد: $A = (-۱)^{\frac{n-۲}{۲}} \binom{n}{n-۱} \tan^{-۱} \varphi$

اگر n فرد باشد: $A = (-۱)^{\frac{n-۱}{۲}} \tan^n \varphi$

در این مساله و مساله‌های بعدی قرار می‌گذاریم که:

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n(n-۱)\ldots(n-k+۱)}{۱ \cdot ۲ \cdot ۳ \ldots k}$$

۱۰. درستی این برابری‌ها را ثابت کنید:

الف) $$۲^{۲m} \cos^{۲m} x = \sum_{k=۰}^{k=m-۱} ۲ \binom{۲m}{k} \cos ۲(m-k)x + \binom{۲m}{m}$$

$$۲^{۲m}\sin^{۲m}x=\sum_{k=۰}^{k=m-۱}(-۱)^{m+k}۲\binom{۲m}{k}\cos ۲(m-k)x+\binom{۲m}{m}$$

ج) $$۲^{۲m}\cos^{۲m+۱}x=\sum_{k=۰}^{k=m}\binom{۲m+۱}{k}\cos(۲m-۲k+۱)x$$

د) $$۲^{۲m}\sin^{۲m+۱}x=\sum_{k=۰}^{k=m}(-۱)^{m+k}\binom{۲m+۱}{k}\sin(۲m-۲k+۱)x$$

۱۱. قرار دهید:

$$u_n=\cos\alpha+r\cos(\alpha+\theta)+r^۲\cos(\alpha+۲\theta)+ \dots+r^n\cos(\alpha+n\theta)$$

$$v_n=\sin\alpha+r\sin(\alpha+\theta)+r^۲\sin(\alpha+۲\theta)+ +\dots+r^n\sin(\alpha+n\theta)$$

و نشان دهید که

$$u_n=\frac{\cos\alpha-r\cos(\alpha-\theta)-r^{n+۱}\cos[(n+۱)\theta+\alpha]+r^{n+۲}\cos(n\theta+\alpha)}{۱-۲r\cos\theta+r^۲}$$

$$v_n=\frac{\sin\alpha-r\sin(\alpha-\theta)-r^{n+۱}\sin[(n+۱)\theta+\alpha]+r^{n+۲}\sin(n\theta+\alpha)}{۱-۲r\cos\theta+r^۲}$$

۱۲. مجموع‌های زیر را ساده کنید:

الف) $$S=۱+n\cos\theta+\frac{n(n-۱)}{۱\cdot ۲}\cos ۲\theta+\dots=$$

$$=\sum_{k=۰}^{k=n}C_n^k\cos\theta,\ (C_n^۰=۱)$$

ب) $$S'=n\sin\theta+\frac{n(n-۱)}{۱\cdot ۲}\sin ۲\theta+\dots=\sum_{k=۰}^{k=n}C_n^k\sin k\theta$$

۱۳. این برابری را ثابت کنید:

$$\sin^{۲p}\alpha+\sin^{۲p}۲\alpha+\sin^{۲p}۳\alpha+\dots+\sin^{۲p}n\alpha=$$
$$=\frac{۱}{۲}+n\frac{۱\times ۳\times ۵\times\dots\times(۲p-۱)}{۲\times ۴\times ۶\times\dots\times ۲p}$$

به شرطی که $\alpha = \frac{\pi}{2n}$ و $p < 2n$ (p عددی درست مثبت است).

۱۴. ثابت کنید:

الف) چندجمله‌ای $x(x^{n-1} - na^{n-1}) + a^n(n-1)$ بر $(x-a)^2$ بخش‌پذیر است.

ب) چندجمله‌ای $(1-x^n)(1+x) - 2nx^n(1-x) - n^2x^n(1-x)^2$ بر $(1-x)^3$ بخش‌پذیر است.

۱۵. ثابت کنید:

الف) $(x+y)^n - x^n - y^n$ بر $xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$ بخش‌پذیر است اگر n عددی فرد و بخش‌ناپذیر بر ۳ باشد.

ب) $(x+y)^n - x^n = y^n$ بر $xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$ بخش‌پذیر است اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم n بر ۶ برابر یک باشد، یعنی اگر $n \equiv 1(mod\ 6)$.

۱۶. درستی این برابری‌ها را ثابت کنید.

$$\text{(الف} \quad (x+y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x+y)$$

$$\text{(ب} \quad (x+y)^5 - x^5 - y^5 - = 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$$

$$\text{(ج} \quad (x+y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$$

۱۷. نشان دهید که عبارت $(x+y+z)^m - x^m - y^m - z^m$، برای عددهای فرد n، بر $(x+y+x)^3 - x^3 - y^3 - x^3$ بخش‌پذیر است.

۱۸. مطلوب است تعیین شرط لازم و کافی برای این که $x^3+y^3+z^3+kxyz$ بر $x+y+z$ بخش‌پذیر باشد.

۱۹. با چه شرطهایی $x^n - a^n$ بر $x^p - a^p$ بخش‌پذیر است؟ (n و p عددهای درست و مثبت هستند).

۲۰. آیا چندجمله‌ای $x^{4a} + x^{4b+1} + x^{4c+2} + x^{4d+3}$ (a، b، c، d عددهای درست و مثبت هستند)، بر $1 + x + x^2 + x^3$ بخش‌پذیر است؟

۲۱. به‌ازای چه مقدار n چندجمله‌ای $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2}$ بر چندجمله‌ای $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$ بخش‌پذیر است؟

۲۲. ثابت کنید:

الف) چندجمله‌ای $(\cos\varphi + x\sin\varphi)^n - \cos n\varphi - x\sin n\varphi$ بر $x^۲ + ۱$ بخش‌پذیر است.

ب) چندجمله‌ای $x^n \sin\varphi - \rho^{n-۱} x\sin n\varphi + \rho^n \sin(n-۱)\varphi$ بر $x^۲ - ۲\rho x\cos\varphi + \rho^۲$ بخش‌پذیر است.

۲۳. به‌ازای چه مقادیری از p و q دوجمله‌ای $x^۴ + ۱$ بر $x^۲ + px + q$ بخش‌پذیر است؟

۲۴. عبارت $\sqrt{a+bi}$ را به‌صورت $x + yi$ بیان کنید که در آن x و y حقیقی هستند.

۲۵. تمام ریشه‌های معادلهٔ $x^n = ۱$ را تعیین کنید.

۲۶. مجموع توان‌های pام ریشه‌های این معادله را بیان کنید. (p یک عدد صحیح و مثبت است) $x^n = ۱$

۲۷. با فرض $\varepsilon = \cos\frac{۲\pi}{n} + i\sin\frac{۲\pi}{n}$ (n عددی درست و مثبت است)

$$A_k = x + y\varepsilon^k + z\varepsilon^{۲k} + \ldots + \omega\varepsilon^{(n-۱)k}$$
$$(k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱)$$

که در آن x، y، z، ...، u و ω، n عدد مختلط دلخواه هستند، ثابت کنید (مساله ۶ را ببینید):

$$\sum_{k=۰}^{k=n-۱} |A_k|^۲ = n\{|x|^۲ + |y|^۲ + |z|^۲ + \ldots + |w|^۲\}$$

۲۸. درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید:

الف) $$x^{۲n} - ۱ = (x^۲ - ۱)\prod_{k=۱}^{k=n-۱}\left(x^۲ - ۲x\cos\frac{k\pi}{n} + ۱\right)$$

ب) $$x^{۲n+۱} - ۱ = (x-۱)\prod_{k=۱}^{k=n}\left(x^۲ - ۲x\cos\frac{۲k\pi}{۲n+۱} + ۱\right)$$

ج) $$x^{۲n+۱} - ۱ = (x+۱)\prod_{k=۱}^{k=n}\left(x^۲ + ۲x\cos\frac{۲k\pi}{۲n+۱} + ۱\right)$$

د) $$x^{۲n} + ۱ = \prod_{k=۰}^{k=n-۱}\left(x^۲ - ۲x\cos\frac{(۲k+۱)\pi}{۲n} + ۱\right)$$

۲۹. درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید

$$\text{(الف)}\quad \sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(x-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

$$\text{(ب)}\quad \cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{4\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}$$

(n عددی فرد است.)

۳۰. فرض کنید معادله $x^n=1$ دارای ریشه‌های ۱، α، β، γ، ...، λ است. نشان دهید:

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\ldots(1-\lambda)=n$$

۳۱. فرض کنید x_1، x_2، ...، x_n، ریشه‌های معادلهٔ

$$x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1=0$$

باشد. مطلوب است محاسبهٔ عبارت

$$\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\ldots+\frac{1}{x_n-1}$$

۳۲. بدون حل معادله‌های

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1$$
$$\frac{x^2}{v^2}+\frac{y^2}{v^2-b^2}+\frac{z^2}{v^2-c^2}=1$$
$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1$$

۳۳. ثابت کنید، اگر $\cos\alpha+i\sin\alpha$ ریشهٔ معادلهٔ

$$x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n=0$$

باشد، آنگاه $p_1\sin\alpha+p_2\sin2\alpha+\ldots+p_n\sin n\alpha=0$ (p_1، p_2، ...، p_n حقیقی هستند)

۳۴. اگر a، b، c، ...، k ریشه‌های معادلهٔ

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + \rho_n = 0$$

باشند (p_1، p_2، ...، p_n حقیقی‌اند) ثابت کنید

$$(1 + a^2)(1 + b^2)\ldots(1 + k^2) =$$
$$= (1 - p_2 + p_4 - \ldots)^2 + (p_1 - p_3 + p_5 - \ldots)^2$$

۳۵. نشان دهید، اگر معادله‌های

$$x^3 + px + q = 0,\ x^3 + p'x + q' = 0$$

یک ریشهٔ مشترک داشته باشند، آنگاه

$$(pq' - qp')(p - p')^2 = (q - q')^3$$

۳۶. درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید:

(الف) $$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(5 - 3\sqrt[3]{7})}$$

(ب) $$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(3\sqrt[3]{9} - 6)}$$

۳۷. با فرض $a + b + c = 0$، قرار دهید $a^k + b^k + c^k = s_k$
درستی برابری‌های زیر را ثابت کنید (مسالەهای ۲۳، ۲۴، ۲۶ از فصل ۱ را ببینید):

$$2s_4 = s_2^2 \qquad 6s_5 = 5s_2s_3$$
$$6s_7 = 7s_3s_4 \qquad 10s_7 = 7s_2s_5$$
$$25s_7s_3 = 21s_5^2 \quad 50s_7^2 = 49s_4s_5^2$$

$$s_{n+3} = abcs_n + \frac{1}{2}s_2s_{n+1}$$

۳۸. الف) می‌دانیم: $x + y = u + v$ و $x^2 + y^2 = a^2 + v^2$

ثابت کنید، به‌ازای هر مقدار n داریم:

$$x^n + y^n = u^n + v^n$$

ب) می‌دانیم:

$$x^n + y^n = u^n + v^n$$
$$x + y + z = u + v + t$$
$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = u^۲ + v^۲ + t^۲$$
$$x^۳ + y^۳ + z^۳ + u^۳ + v^۳ + t^۳$$

ثابت کنید، به‌ازای هر مقدار n داریم:

$$x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + t^n$$

۳۹. می‌دانیم:

$$A = x_۱ + x_۲\varepsilon + x_۳\varepsilon^۲ \quad B = x_۱ + x_۲\varepsilon^۲ + x_۳\varepsilon$$

که

$$\varepsilon^۲ + \varepsilon + ۱ = ۰$$

درضمن، $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم

$$x^۳ + px + q = ۰$$

هستند. ثابت کنید $A^۳$ و $B^۳$ ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ دوم‌اند:

$$z^۲ + ۲۷qz - ۲۷p^۳ = ۰$$

۴۰. این معادلهٔ را حل کنید (با شرط $a + b = c + d$).

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m$$

۴۱. این معادله را حل کنید:

$$(x+a)^{۴}+(x+b)^{۴}=c$$

۴۲. این معادله را حل کنید:

$$(x+b+c)(x+a+c)(x+a+b)(a+b+c)-abcx=۰$$

۴۳. معادله را حل کنید:

$$x^{۳}+۳ax^{۲}+۳(a^{۲}-bc)+a^{۳}+b^{۳}+e^{۳}-۳abc=۰$$

۴۴. معادله را حل کنید:

$$ax^{۴}+bx^{۳}+cx^{۲}+dx+e=۰$$

به شرطی که

$$a+b=b+c+d=d+e$$

۴۵. معادله را حل کنید:

$$(a+b+x)^{۳}-۴(a^{۳}+b^{۳}+x^{۳})-۱۲abx=۰$$

۴۶. معادله را حل کنید:

$$x^{۲}+\frac{a^{۲}x^{۲}}{(a+x)^{۲}}=m \quad (a,m>۰)$$

با چه شرطی همه ریشهها حقیقی هستند و تعداد ریشههای مثبت و منفی را بهدست آورید.

۴۷. معادله را حل کنید:

$$\frac{(۵x^{۴}+۱۰x^{۲}+۱)(۵a^{۴}+۱۰a^{۲}+۱)}{(x^{۴}+۱۰x^{۲}+۱)(a^{۴}+۱۰a^{۲}+۵)}=ax$$

۴۸. معادله را حل کنید:

$$1+\frac{a_1}{x-a_1}+\frac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)}+\frac{a_3x^2}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}$$
$$+\ldots+\frac{a_{2m}x^{2m-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2m})}=\frac{2px^m-p^2}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2m})}$$

۴۹. الف) معادله را، با شرط $x_1^2=x_2$ حل کنید:

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

ب) معادله را، با شرط $x_1=x_2+x_3$ را حل کنید:

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

۵۰. الف) این دستگاه را حل کنید:

$$y^3+z^3+a^3=3ayz$$
$$z^3+x^3+b^3=3bzx$$
$$x^3+y^3+c^3=3cxy$$

ب) این دستگاه را حل کنید:

$$x^4-a=y^4-b=z^4-c=u^4-d=xyzu$$

به شرطی که $a+b+c+d=0$.

۵۱. در بسط $1+(1+x)+\ldots+(1+x)^n$، برحسب توان‌های جملهٔ شامل x^k را به‌دست آورید.

۵۲. ثابت کنید ضریب x^s در بسط عبارت $\{(s-2)x^2+nx-s\}(x+1)^n$ برحسب توان‌های x، برابر nC_n^{s-2} است.

۵۳. ثابت کنید به‌ازای $x>1$، داریم: $px^q-qx^p-p+q>0$ (p و q عددهای درست مثبت و $q>p$).

۵۴. فرض کنید x و a دو عدد مثبت باشند. بزرگترین جملهٔ بسط $(x+a)^n$ را پیدا کنید.

۵۵. الف) برای $i > m$ ثابت کنید:

$$i^m - i(i-۱)^m + \frac{i(i-۱)}{۱\times ۲}(i-۲)^m + \ldots + (-۱)^{i-۱} i \times ۱^m = ۰$$

ب) اگر i و m دو عدد درست و مثبت باشند، ثابت کنید:

$$m^m - m(m-۱)^m + \frac{m(m-۱)}{۱\times ۲}(m-۲)^m + \ldots + (-۱)^{m-۱} m = m!$$

۵۶. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید

$$(x^۲+a^۲)^n = \{x^n - c_n^۲ x^{n-۲}a^۲ + c_n^۴ x^{n-۴}a^۴ - \ldots\}^۲ +$$
$$+\{c_n^۱ x^{n-۱}a - c_n^۳ x^{n-۳}a^۳ + \ldots\}^۲$$

۵۷. ضریب x^l $(l = ۰, ۱, \ldots, ۲n)$ را در این حاصل‌ضرب‌ها تعیین کنید:

الف) $\{۱+x+x^۲+\ldots+x^n\}\{۱+x+x^۲+\ldots+x^n\}$

ب) $\{۱+x+x^۲+\ldots+x^n\}\{۱-x+x^۲-x^۳+\ldots+(-۱)^n x^n\}$

ج) $\{۱+۲x+۳x^۲+\ldots+(n+۱)x^n\}\{۱+۲x+۳x^۲+\ldots+(n+۱)x^n\}$

د) $\{۱+۲x+۳x^۲+\ldots+(n+۱)x^n\}$
$\{۱-۲x+۳x^۲-\ldots+(-۱)^n(n+۱)x^n\}$

۵۸. ثابت کنید:

الف) $۱ + c_n^۲ + c_n^۴ + \ldots = c^۱ n + c^۳ n + \ldots = ۲^{n-۱}$

ب) $c_{۲n}^۱ + c_{۲n}^۳ + \ldots + c_{۲n}^{n-۱} = ۲^{۲n-۲}$ (اگر n زوج باشد.)

ج) $۱ + c_{۲n}^۲ + \ldots + c_{۲n}^{n-۱} = ۲^{۲n-۲}$ (اگر n فرد باشد.)

۵۹. درستی این اتحادها را ثابت کنید:

الف) $c_n^۰ + c_n^۳ + c_n^۶ + \ldots = \frac{۱}{۳}\left(۲^n + ۲\cos\frac{n\pi}{۳}\right)$

ب) $c_n^1 + c_n^4 + c_n^7 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$

ج) $c_n^2 + c_n^5 + c_n^8 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$

۶۰. ثابت کنید:

الف) $c_n^0 + c_n^4 + c_n^8 + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$

ب) $c_n^1 + c_n^5 + c_n^9 + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{2\pi}{4}\right)$

ج) $c_n^2 + c_n^6 + c_n^{10} + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$

د) $c_n^3 + c_n^7 + c_n^{11} + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

۶۱. درستی این برابری را ثابت کنید:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = (c_{n+1}^2 + 2(c_n^2 + c_{n-1}^2 + \ldots + c_2^2))$$

۶۲. اگر a_1، a_2، a_3 و a_4 چهار ضریب پشت سر هم، در بسط $(1+x)^n$ برحسب توان‌های x باشند، آنگاه

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_3}{a_3 + a_4} = \frac{2a_2}{a_2 + sa_3}$$

۶۳. درستی این اتحاد را ثابت کنید (n، عددی زوج است):

$$\frac{1}{1(n-1)!} + \frac{1}{3!(n-3)!} + \frac{1}{5!(n-5)!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!1!} = \frac{2^{n-1}}{n!}$$

۶۴. این مجموع را محاسبه کنید:

$$s = c_n^1 - 3c_n^3 + 3^2c_n^5 - 3^3c_n^7 + \ldots$$

۶۵. این مجموع‌ها را محاسبه کنید:

$$\sigma = 1 - c_n^2 + c_n^4 - c_n^6 + \ldots$$

$$\sigma' = c_n^1 - c_n^3 + c_n^5 - c_n^7 + \ldots$$

۶۶. درستی این اتحادها را ثابت کنید:

الف) $c_n^5 + 2c_n^1 + 3c_n^2 + 4c_n^3 + \ldots + (n+1)c_n^n = (n+2)2^{n-1}$

ب) $c_n^1 - 2c_n^2 + 3c_n^3 + \ldots + (-1)^{n-1}nc_n^n = 0$

۶۷. ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}c_n^1 - \frac{1}{3}c_n^2 + \frac{1}{4}c_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}c_n^n = \frac{n}{n+1}$$

۶۸. ثابت کنید:

الف) $1 + \frac{1}{2}c_n^1 + \frac{1}{3}c_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}c_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

ب) $2c_n^0 + \frac{2^2c_n^1}{2} + \frac{2^3c_n^2}{3} + \frac{2^4c_n^3}{4} + \ldots + \frac{2^{n+1}c_n^n}{n+1} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$

۶۹. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$c_n^1 - \frac{1}{2}c^2n + \frac{1}{3}c_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}c_n^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

۷۰. ثابت کنید:

الف) $c_n^n + c_{n+2}^n + \ldots + c_{n+k}^n = c_{n+k+1}^{n+1}$

ب) $c_n^0 - c_n^1 + c_n^2 + \ldots + (-1)^h c_n^h = (-1)^h c_{n-1}^h$

۷۱. نشان دهید، این برابری‌ها، وجود دارد.

الف) $c_n^0 c_m^p + c_n^1 c_m^{p-1} + \ldots + c_n^p c_m^0 = c_{m+n}^p$

ب) $c_n^0 c_n^r + c_n^1 c_n^{r+1} + \ldots + c_n^{n-r} c_n^n = \frac{2n!}{(n-r)!(n+r)!}$

۷۲. درستی این اتحادها را ثابت کنید:

الف) $(c_n^0)^2 + (c_n^1)^2 + \ldots + (c_n^n)^2 = c_{2n}^n$

ب) $(c_{2n}^0)^2 - (c_{2n}^1)^2 + (c_{2n}^2)^2 - \ldots + (c_{2n}^{2n})^2 = (-1)^n c_{2n}^n$

ج) $(c_{2n+1}^0)^2 - (c_{2n+1}^1)^2 + (c_{2n+1}^2)^2 - \ldots - (c_{2n+1}^{2n+1})^2 = 0$

د) $(c_n^1)^2 + 2(c_n^2)^2 + \ldots + n(c_n^n)^2 = \dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}$

۷۳. اگر A باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم چندجمله‌ای بر $x-a$، و B باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم همان چندجمله‌ای بر $x-b$ باشد $(a \neq b)$. مطلوب است، باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم این چندجمله‌ای بر $(x-a)(x-b)$.

۷۴. $f(x)$ را یک چندجمله‌ای فرض کنید. هرگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم این چندجمله‌ای بر $x-a$ برابر A و بر $x-b$ برابر C و بر $x-c$ برابر c باشد، باقی‌مانده تقسیم این چندجمله‌ای را بر $(x-a)(x-b)(x-c)$ به‌دست آورید مشروط بر این که a، b و c سه عدد مختلف باشند.

۷۵. چندجمله‌ای برحسب x از درجهٔ $(m-1)$ پیدا کنید که به‌ازای m مقدار مختلف x، x_1، x_2، ... x_m، به ترتیب مقدارهای y_1، y_2، ...، y_m را قبول کند.

۷۶. فرض کنید $f(x)$، یک چندجمله‌ای باشد. هرگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم این چندجمله‌ای بر $x-a_1$ برابر A_1، بر $x-a_2$ برابر A_2 و ... و سرانجام بر $x-a_m$ برابر A_m باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم این چندجمله‌ای را بر $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)$ به‌دست آورید.

۷۷. ثابت کنید، اگر x_1، x_2، ...، x_m، m عدد متمایز و دلخواه باشند و $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ کوچکتر از m باشد، آن‌گاه اتحاد زیر وجود دارد:

$$f(x) = f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)} +$$
$$+f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_m)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_m)} + \ldots +$$
$$+f(x_m)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_{m-1})}$$

۷۸. ثابت کنید اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای با درجه‌ای که از $m-2$ بیشتر نیست،

باشد و $x_۱$، $x_۲$، ...، x_m، m عدد نامساوی دلخواه باشند، آنگاه این اتحاد وجود دارد:

$$\frac{f(x_۱)}{(x_۱-x_۲)(x_۱-x_۳)\dots(x_۱-x_m)}+$$
$$\frac{f(x_۲)}{(x_۲-x_۱)(x_۲-x_۳)\dots(x_۲-x_m)}+\dots+$$
$$\frac{f(x_m)}{(x_m-x_۱)(x_m-x_۲)\dots(x_m-x_{m-۱})}=۰$$

۷۹. قرار دهید:

$$S_n=\frac{x_۱^n}{(x_۱-x_۲)(x_۱-x_۳)\dots(x_۱-x_m)}+$$
$$+\frac{x_۲^n}{(x_۲-x_۱)(x_۲-x_۳)\dots(x_۲-x_m)}+$$
$$+\dots+\frac{x_m^n}{(x_m-x_۱)(x_m-x_۲)\dots(x_m-x_{m-۱})}$$

اگر $x_۱$، $x_۲$، ...، x_m، m عدد مختلف و دلخواه هستند، نشان دهید که $S_n=۰$ اگر $۰\le n\le m-۱$ و $s_{m-۱}=۱$ مطلوب است محاسبهٔ S_n اگر $n\ge m$.

۸۰. این عبارت را محاسبه کنید:

$$S_{-n}=\frac{x_۱^{-n}}{(x_۱-x_۲)(x_۱-x_۳)\dots(x_۱-x_m)}+$$
$$\frac{x_۲^{-n}}{(x_۲-x_۱)(x_۲-x_۳)\dots(x_۲-x_m)}+\dots+$$
$$\frac{x_m^{-n}}{(x_m-x_۱)(x_m-x_۲)\dots(x_m-x_{m-۱}}$$
$$(n=۱,۲,۳,\dots)$$

۸۱. نشان دهید، اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای باشد که درجهٔ آن کوچکتر از m است آنگاه کسر

$$\frac{f(x)}{(x-x_۱)(x-x_۲)\dots(x-x_m)}$$

($x_۱$، $x_۲$، ...، x_m، m عدد دلخواه مخالف با یکدیگر هستند) را می‌توان به صورت مجموع m کسر ساده نوشت:

$$\frac{A_۱}{x-x_۱}+\frac{A_۲}{x-x_۲}+\ldots+\frac{A_m}{x-x_m}$$

که در آن $A_۱$، $A_۲$، ...، A_m مستقل از x هستند.

۸۲. دستگاه معادله‌ها را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{x_۱}{x_۱-b_۱}+\frac{x_۱}{a_۱-b_۲}+\ldots+\frac{x_n}{a_۱-b_n}=۱ \\ \frac{x_۱}{a_۲-b_۱}+\frac{x_۲}{a_۲-b_۲}+\ldots+\frac{x_n}{a_۲-b_n}=۱ \\ \frac{x_۱}{a_n-b_۱}+\frac{x_۲}{a_n-b_۲}+\ldots+\frac{x_n}{a_n-b_n}=۱ \end{cases}$$

۸۳. درستی این اتحاد را ثابت کنید.

$$\frac{n!}{(x+۱)(x+۲)\ldots(x+n)}=\frac{c_n^۱}{x+۱}-\frac{۲c_n^۲}{x+۲}+$$
$$+\frac{۲c_n^۳}{x+۳}-\ldots+(-۱)^{n+۱}\frac{nc_n^n}{x+n}$$

همچنین، در حالت خاص

$$\frac{۱}{n+۱}=\frac{c_n^۱}{۲}-\frac{۲}{۳}c_n^۲+\frac{۳}{۴}c_n^۳-\frac{۴}{۵}c_n^۴+\ldots$$

۸۴. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$(-۱)^n\frac{a_۱a_۲\ldots a_n}{b_۱b_۲\ldots b_n}+\frac{(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۱)\ldots(a_n-b_۱)}{b_۱(b_۱-b_۲)\ldots(b_۱-b_n)}$$
$$+\frac{(a_۱-b_۲)(a_۲-b_۲)\ldots(a_n-b_۲)}{b_۲(b_۲-b_۱)\ldots(b_۲-b_n)}+\ldots+$$
$$+\frac{(a_۱-b_n)\ldots(a_n-b_n)}{b_n(b_nb_۱)\ldots(b_n-b_{n-۱})}=(-۱)^n$$

۸۵. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{(x+\beta)\dots(x+n\beta)}{(x-\beta)\dots(x-n\beta)}-۱=$$
$$=\sum_{r=۱}^{r=n}(-۱)^{n-r}\frac{n(n+r)(n^۲-۱^۲)(n^۲-۲^۲)\dots[n^۲-(r-۱)^۲]}{(r!)^۲}\times$$
$$\times\frac{r^\beta}{x-r\beta}$$

۸۶. دنباله‌ای از عددهای $c_۰$، $c_۱$، $c_۲$، ... داده شده است، فرض کنید: $\Delta c_k = c_{k+۱}-c_k$ طوری که به کمک دنباله عددهای داده شده، بتوان دنبالهٔ جدیدی به این صورت تشکیل داد:

$$\Delta c_۰,\ \Delta c_۱,\ \Delta c_۲,\dots$$

سپس، فرض کنید:

$$\Delta^۲ c_k = \Delta c_{k+۱}-\Delta c_k$$

که به کمک آن بتوان، دنبالهٔ دیگری تشکیل داد:

$$\Delta^۲ c_۰, \Delta^۲ c_۱, \Delta^۲ c_۲,\dots$$

و به همین ترتیب، تا آخر.

دستورهای زیر را ثابت کنید:

(الف) $$c_{k+m}=c_k+\frac{n}{۱}\Delta c_k+\frac{n(n-۱)}{۱\times۲}\Delta^۲ c_k+$$
$$+\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱\times۲\times۳}\Delta^۳ c_k+\dots+\Delta^n c_k$$

(ب) $$\Delta^n c_k=c_{k+n}-\frac{n}{۱}c_{k+n-۱}+\frac{n(n-۱)}{۱\times۲}c_{k+n-۲}+$$
$$+\dots+(-۱)^n c_k$$

۸۷. نشان دهید، اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای دلخواه از درجهٔ n برحسب x باشد، آنگاه اتحاد زیر وجود دارد:

$$f(x)=f(۰)+\frac{x}{۱}\Delta f(۰)+\frac{x(x-۱)}{۱\times۲}\Delta^۲ f(۰)+\dots+$$

$$+\frac{x(x-۱)\dots(x-n+۱)}{n!}\Delta^n f(۰)$$

که در آن $\Delta f(۰)$، $\Delta^۲ f(۰)$، ...، $\Delta^n f(۰)$ با استفاده از دنبالهٔ اصلی $f(۰)$، $f(۱)$، $f(۲)$، به‌دست می‌آیند.

۸۸. ثابت کنید، اگر داشته باشیم:

$$x^n = A_۰ + \frac{A_۱}{۱}(x-۱) + \frac{A_۲}{۲!}(x-۱)(x-۲) + \dots$$
$$\dots + \frac{A_n}{n!}(x-۱)(x-۲)\dots(x-n)$$

آن‌وقت خواهیم داشت:

$$A_s = (s+۱)^n - C_s^۱ s^n + C_s^۲(s-۱)^n + \dots + (-۱)^s C_s^s$$

۸۹. ثابت کنید:

$$\frac{n!}{x(x+۱)\dots(x+n)}\left\{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱}+\dots\frac{۱}{x+n}\right\} = -\frac{۱}{x^۲} - \frac{c_n^۱}{(x+۱)^n}$$
$$+\frac{c_n^۲}{(x+۲)^n} + \dots + (-۱)^n \frac{۱}{(x+n)^۲}$$

۹۰. فرض کنید

$$\varphi_k(x) = x(x-۱)(x-۲)\dots(x-k+۱)$$

ثابت کنید، این اتحاد وجود دارد:

$$\varphi_n(x+y) = \varphi_n((x) + c_n^۱\varphi_{n-۱}(x)\varphi_۱(y) +$$
$$+c_n^۲\varphi_{x-۲}(x)\varphi_۲(y) + \dots + c_n^{n-۱}\varphi_۱(x)\varphi_{n-۱}(y) + \varphi_n(y)$$

۹۱. درستی این اتحادها را ثابت کنید:

الف) $x^n + y^n = p^n - \frac{n}{۱}p^{n-۲}q + \frac{n(n-۳)}{۱\times ۲}p^{n-۴}q^۲ - \dots + (-۱)^r \times$

$$\times \frac{n(n-r-۱)(n-r-۲)\dots(n-۲r+۱)}{r!} p^{n-۲r} q^r + \dots$$

ب) $$\frac{x^{n+۱}-y^{n+۱}}{x-y} = p^n - c_{n-۱}^{۱} p^{n-۲} q + c_{n-۲}^{۲} p^{n-۴} q^۲ -$$
$$- \dots + (-۱)^r c_{n-r}^{r} p^{n-۲r} q^r + \dots$$

که در آن $p = x+y,\ q = xy$

۹۲. فرض کنید $x + y = ۱$. ثابت کنید:

$$x^m(۱ + c_m^۱ y + c_{m+۱}^{۲} y^۲ + \dots$$
$$+ y^m(۱ + c_m^۱ x + \dots + c_{۲m-۲}^{m-۱} x^{m-۱}) = ۱$$

۹۳. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{۱}{(x-a)^m(x-b)^m} = \frac{۱}{(a-b)^m} \times$$
$$\left\{ \frac{۱}{(x-a)^m} + \frac{c_m^۱}{(x-a)^{m-۱}(b-a)} + \right.$$
$$\left. \frac{c_{m+۱}^{۲}}{(x-a)^{m-۲}(b-a)^۲} + \dots + \frac{c_{۲m-۲}^{m-۱}}{(x-a)(b-a)^{m-۱}} \right\} + \frac{۱}{(b-a)^n} \times$$
$$\left\{ \frac{۱}{(x-b)^m} + \frac{c_m^۱}{(x-b)^{m-۱}(a-b)} + \dots + \frac{c_{۲m-۲}^{m-۱}}{(x-b)(a-b)^{m-۱}} \right\}$$

۹۴. نشان دهید ثابت‌های $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ را می‌توان طوری انتخاب کرد که این اتحاد برقرار باشد:

$$(x+y)^n = x^n + y^n + A_۱ xy(x^{n-۲} + y^{n-۲}) + A_۲ x^۲ y^۲ (x^{n-۴} + y^{n-۴}) + \dots$$

این مقدارهای ثابت را تعیین کنید.

۹۵. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ = a_۱ \\ x_۱ y_۱ + x_۲ y_۲ = a_۲ \\ x_۱ y_۱^۲ + x_۲ y_۲^۲ = a_۳ \\ x_۱ y_۱^۳ + x_۲ y_۲^۳ = a_۴ \end{cases}$$

و نشان دهید چگونه می‌توان دستگاه را در حالت کلی زیر حل کرد:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + \ldots + x_{n-۱} + x_n = a_۱ \qquad (۱)$$

$$x_۱y_۱ + x_۲y_۲ + \ldots + x_ny_n = a_۲ \qquad (۲)$$

$$x_۱y_۱^۲ + x_۲y_۲^۲ + \ldots + x_ny_n^۲ = a_۳ \qquad (۳)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_۱y_۱^{۲n-۱} + x_۲y_۲^{۲n-۱} + \ldots + x_۲y_n^{۲n-۱} = a_{۲n} \qquad (۲n)$$

۹۶. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x + y + z + u + v = ۲ \\ px + qy + rz + su + tv = ۳ \\ p^۲x + q^۲y + r^۲z + s^۲u + t^۲v = ۱۶ \\ p^۳x + q^۳y + r^۳z + s^۳u + t^۳v = ۳۱ \\ p^۴x + q^۴y + r^۴x + s^۴u + t^۴v = ۱۰۳ \\ p^۵x + q^۵y + r^۵z + s^۵u + t^۵v = ۲۳۵ \\ p^۶x + q^۶y + r^۶z + s^۴u + t^۶v = ۶۷۴ \\ p^۷x + q^۷y + r^۷z + s^۷u + t^۷v = ۱۶۶۹ \\ p^۸x + q^۸y + r^۸z + s^۸u + t^۸v = ۴۵۲۶ \\ p^۹x + q^۹y + r^۹z + s^۹u + t^۹v = ۱۱۵۹۵ \end{cases}$$

۹۷. فرض کنید m و μ عددهای مثبت باشند $(\mu \le m)$؛ درضمن فرض کنید:

$$\frac{(۱ - x^m)(۱ - x^{m-۱})\ldots(۱ - x^{m-\mu+۱})}{(۱ - x)(۱ - x^۲)\ldots(۱ - x^\mu)} = (m, \mu)$$

اکنون ثابت کنید:

الف) $(m, \mu) = (m, m - \mu)$

ب) $(m, \mu + ۱) = (m - ۱, \mu + ۱) + x^{n-\mu-۱}(m - ۱, \mu)$

ج) $(m, \mu + ۱) = (\mu, \mu) + x(\mu + ۱, \mu) + x^۲(\mu + ۲, \mu) + \ldots +$
$+x^{m-\mu-۱}(m - ۱, \mu)$

د) (m, μ) یک چندجمله‌ای برحسب x است.

$$1-(m,1)+(m,2)-(m,3)+\ldots=\begin{cases}(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{m-1}) & (\text{زوج } m)\\ 0 & (\text{فرد } m)\end{cases}$$

۹۸. ثابت کنید:

(الف) $(1+xz)(1+x^2z)\ldots(1+x^nz)=$

$$=1+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})\ldots(1-x^{n-k+1})}{(1-x^1)(1-x^2)\ldots(1-x^k)}x^{\frac{k(k+1)}{2}}z^k$$

(ب) $(1+xz)(1+x^3z)\ldots(1+x^{2n-1}x)=$

$$=1+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{(1-x^{2x})(1-x^{2x-2})\ldots(1-x^{2n-2k+2})}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2k})}x^{k^2}z^k$$

۹۹. فرض کنید:

$$p_k=(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)$$

ثابت کنید:

$$\frac{1}{p_n}-\frac{x}{p_1p_{n-1}}+\frac{x^3}{p_2p_{n-2}}-\ldots\pm\frac{x^{\frac{n(n+1)}{1\times 2}}}{p_n}=1$$

۱۰۰. ضریب‌های c_0، c_1، c_2، ... c_n را در این اتحاد به‌دست آورید:

$$(1+xz)(1+xz^{-1})(1+x^3z)(1+x^3z^{-1})\ldots\times$$
$$\times(1+x^{2n-1}z)(1+x^{2n-1}z^{-1})=$$
$$=c_0+c_1(z+z^{-1})+c_2(z^2+z^{-2})+\ldots+c_n(z^n+z^{-n})$$

۱۰۱. فرض کنید:

$$u_k=\frac{\sin 2nx\sin(2n-1)x\ldots\sin(2n-k+1)x}{\sin x\sin 2x\ldots\sin kx}$$

و ثابت کنید:

(الف) $1-u_1+u_2-u_3+\ldots+u_{2n}=$

$$= ۲^n \times (۱ - \cos x)(۱ - \cos ۳x) \ldots [۱ - \cos(۲n - ۱)x]$$

ب) $۱ - u_۱^۲ + u_۲^۲ - u_۳^۲ + \ldots + u_{۲n}^۲ =$

$$= (-۱)^n \frac{\sin(۲n+۲)x \sin(۲n+۴)x \ldots \sin ۴nx}{\sin ۲x \sin ۴x \ldots sin۲nx}$$

فصل ۷. تصاعدها و مجموع جمله‌های یک رشته

برای حل مساله‌های مربوط به تصاعدهای حسابی و هندسی، که در این بخش آمده است، تنها به آگاهی‌هایی نیاز دارد که در دورهٔ دبیرستان خوانده‌ایم.

برای محاسبهٔ مجموع جمله‌های در رشته‌های باپایان، از روش تفاضل‌های محدود استفاده شده است. برای محاسبهٔ مجموع

$$f(۱) + f(۲) + \ldots + f(n)$$

تابع $f(k)$ را پیدا کنید که، برای آن، داشته باشیم:

$$f(k+۱) - f(k) = f(k)$$

در این صورت، روشن است که

$$f(۱) + f(۲) + \ldots + f(n) =$$
$$= [f(۲) - f(۱)] + [f(۳) - f(۲)] + \ldots$$
$$\ldots + [f(n + ۱ - f(n)] = f(n+۱) - f(۱)$$

۱. می‌دانیم $a^۲$، $b^۲$ و $c^۲$، سه جملهٔ پشت سر هم از یک تصاعد حسابی‌اند. ثابت کنید، در این صورت، $\frac{۱}{b+c}, \frac{۱}{c+a}, \frac{۱}{a+b}$ هم، تشکیل یک تصاعد حسابی می‌دهند.

۲. ثابت کنید اگر a، b و c به‌ترتیب جمله‌های pام، qام و rام یک تصاعد حسابی باشند، آنگاه

$$(q-r)a + (r-p)b + (p-q)c = ۰$$

۳. فرض کنید، در یک تصاعد حسابی داشته باشیم: $a_p = q$ و $a_q = p$ (a_n جملهٔ nام این تصاعد است). a_m را به‌دست آورید.

۴. در یک تصاعد حسابی: $s_p = q$ و $s_q = p$ (s_n مجموع n جمله اول این تصاعد است). s_{p+q} را به‌دست آورید.

۵. اگر در یک تصاعد حسابی $s_p = s_q$؛ ثابت کنید $s_{p+q} = ۰$.

۶. در یک تصاعد حسابی داریم: $\frac{s_m}{s_n} = \frac{m^۲}{n^۲}$. ثاب کنید $\frac{a_m}{a_n} = \frac{۲m-۱}{۲n-۱}$.

۷. نشان دهید که هر توان n^k ($k \geq ۲$ عددی درست است) را می‌توان به صورت مجموع n عدد فرد متوالی نوشت.

۸. می‌دانیم دنباله عددی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n تشکیل یک تصاعد حسابی می‌دهند $a_۱ = ۰$. این عبارت را ساده کنید:

$$s = \frac{a_۳}{a_۲} + \frac{a_۴}{a_۳} + \ldots + \frac{a_n}{a_{n-۱}} - a_۲\left(\frac{۱}{a_۲} + \frac{۱}{a_۳} + \ldots + \frac{۱}{a_{n-۲}}\right)$$

۹. ثابت کنید در هر تصاعد حسابی با جمله‌های $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ...، a_n، داریم:

$$s = \frac{۱}{\sqrt{a_۱} + \sqrt{a_۲}} + \frac{۱}{\sqrt{a_۲} + \sqrt{a_۳}} + \ldots + \frac{۱}{\sqrt{a_{n-۱}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-۱}{\sqrt{a_۱} + \sqrt{a_n}}$$

۱۰. نشان دهید در هر تصاعد حسابی با جمله‌های $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ...، داریم

$$s = a_۱^۲ - a_۲^۲ + a_۳^۲ - a_۴^۲ + \ldots + a_{۲k-۱}^۲ - a_{۲k}^۲ = \frac{k}{۲k-۱}(a_۱^۲ - a_{۲k}^۲)$$

۱۱. فرض کنید $s(n)$ مجموع n جملهٔ اول یک تصاعد حسابی باشد ثابت کنید:

الف) $s(n+۳) - ۳s(n+۲) + ۳s(n+۱) - S(n) = ۰$

ب) $s(۳n) = ۳\{s(۲n) - s(n)\}$

۱۲. فرض کنید دنباله $a_۱$ و $a_۲$ و ... و a_n، $a_{n+۱}$، ... یک تصاعد حسابی باشد. ثابت کنید دنبالهٔ $s_۱$، $s_۲$، $s_۳$، ... که در آن

$$s_۱ = a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n$$

$$s_۲ = a_{n+۱} + \ldots + a_{۲n}, \quad s_۳ = a_{۲n+۱} + \ldots + a_{۳n}, \ldots$$

نیز یک تصاعد حسابی است که قدر نسبت آن n^2 برابر قدر نسبت تصاعد داده شده است.

۱۳. ثابت کنید، اگر a و b و c به‌ترتیب pامین، qامین و rامین جملهٔ یک تصاعد حسابی و p یک تصاعد هندسی باشند، آن‌گاه

$$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = 1$$

۱۴. ثابت کنید:

$$(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2-x^n = (1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})(1+x+x^2+\ldots+x^{n+1})$$

۱۵. فرض کنید s_n مجموع n جملهٔ اول یک تصاعد هندسی باشد. ثابت کنید:

$$s_n(s_{3n} - s_{2n}) = (s_{2n} - s_n)^2$$

۱۶. اگر عددهای a_1، a_2، a_3، ... تشکیل یک تصاعد هندسی دهند، با در دست داشتن مجموع‌های:

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,\ s' = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$$

حاصل‌ضرب $p = a_1a_2\ldots a_n$ را پیدا کنید.

۱۷. اگر a_i، a_2، ...، a_n عددهای حقیقی باشند، ثابت کنید برابری

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{n-1}^2)(a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2) = (a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)$$

تنها وقتی برقرار است که a_1، a_2، ...، a_n تشکیل یک تصاعد هندسی دهند.

۱۸. فرض کنید a_1، a_2، ...، a_n جمله‌های یک تصاعد هندسی با قدرنسبت q و مجموع $s_n = a_1 + \ldots + a_m$ باشد.

عبارت‌های ساده‌تری برای این مجموع‌ها به‌دست آورید:

الف) $s_1 + s_2 + \ldots + s_n$

ب) $\dfrac{1}{a_1^2 - a_2^2} + \dfrac{1}{a_2^2 - a_3^2} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n-1}^2 - a_n^2}$

ج) $\dfrac{1}{a_1^k + a_2^k} + \dfrac{1}{a_2^k + a_3^k} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n-1}^k + a_n^k}$

۱۹. ثابت کنید در یک تصاعد حسابی، که قدرنسبت آن صفر نیست، حاصل‌ضرب دو جمله هم‌فاصله از جمله‌های دو طرف، هرچه به جملهٔ وسط نزدیک‌تر باشد بزرگتر است از حاصل‌ضرب دو جملهٔ دیگر.

۲۰. یک تصاعد حسابی و یک تصاعد هندسی با جمله‌های مثبت دارای تعداد جمله‌های برابر و جمله‌های یکسان در دو طرف هستند. مجموع جمله‌های کدام‌یک از این تصاعدها بزرگتر از دیگری است؟

۲۱. دو جملهٔ اول یک تصاعد حسابی و یک تصاعد هندسی با جمله‌های مثبت و برابرند. ثابت کنید جمله‌های دیگر تصاعد حسابی، بزرگتر از جمله‌های متناظر خود در تصاعد هندسی نیستند.

۲۲. مجموع n جملهٔ این رشته را به‌دست آورید.

$$s_n = ۱ \times x + ۲ \times x^۲ + ۳x^۳ + \ldots + nx^n$$

۲۳. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... a_n تشکیل یک تصاعد حسابی بدهند و $u_۱$، $u_۲$، ...، u_n به تصاعد هندسی باشند. عبارتی برای این مجموع به‌دست آورید.

$$s = a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + \ldots + a_nu_n$$

۲۴. این مجموع را محاسبه کنید:

$$\left(x + \frac{۱}{x}\right)^۲ + \left(x^۲ + \frac{۱}{x^۲}\right)^۲ + \ldots + \left(x^n + \frac{۱}{x^n}\right)^۲$$

۲۵. فرض کنید: $s_k = ۱^k + ۲^k + ۳^k + \ldots + n^k$

ثابت کنید که:

$$s_۱ = \frac{n(n+۱)}{۱ \times ۲},\ s_۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۹},\ s_۳ = \frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$$

۲۶. این دستور عمومی را ثابت کنید:

$$(k+۱)s_k + \frac{(k+۱)k}{۱ \times ۲}s_{k-۱} + \frac{(k+۱)k(k-۱)}{۱ \times ۲ \times ۳} \times$$
$$\times s_{k-۲} + \ldots + (k+۱)s_۱ + s_۰ = (n+۱)^{k+۱} - ۱$$

۲۷. فرض کنید $1^k + 2^k + \ldots + n^k = s_k(n)$

این دستور را ثابت کنید:

$$ns_k(n) = s_{k+1}(n) + s_k(n-1) + s_k(n-2) + \ldots + s_k(2) + s_k(1)$$

۲۸. الف) ثابت کنید:

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = An^{k+1} + Bn^k + Cn^{k-1} + \ldots + \ln$$

یعنی مجموع $s_k(n)$ را می‌توان به‌صورت یک چندجمله‌ای درجهٔ $(k+1)$ام، برحسب m با ضریب‌های مستقل از m و بدون جملهٔ ثابت نوشت.

ب) ثابت کنید: $B = \frac{1}{2}$ و $A = \frac{1}{k+1}$.

۲۹. درستی این دستورها را ثابت کنید:

$$s_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},$$

$$s_5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

$$s_6 = \frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2(n+1)^2-(3n^2+3n-1)]}{42}$$

$$s_7 = \frac{3n^8+12n^7+14n^6-7n^4+2n^2}{24} =$$

$$= \frac{n^2(n+1)[3n^2(n+1)^2-2(2n^2+2n-1)]}{24}$$

۳۰. ثابت کنید رابطه‌های زیر برقرار است:

$$s_3 = s_1^2,\ 4s_1^3 = s_3 + 3s_5,\ 2s_5 + s_3 = 3s_2^2,\ s_5 + s_7 = 2s_3^2$$

۳۱. عددهای B_0، B_1، B_2، B_3، B_4، ... را که با این برابری نمادی به‌دست می‌آید

$$(B+1)^{k+1} - B^{k+1} = k+1 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

و فرض $B_۰ = ۱$، در نظر بگیرید، سمت چپ این برابری را باتوجه به دستور دوجمله‌ای بسط دهید، به نحوی که نماها به اندیس تبدیل شود. بدین‌ترتیب برابری نمادی بالا با این برابری معمول، برابر می‌شود:

$$B_{k+۱} + C_{k+۱}^{۱} B_k + C_{k+۱}^{۲} B_{k-۱} + \ldots + C_{k+۱}^{k} B_۱ + B_۰ - B_{k+۱} = k + ۱$$

الف) با استفاده از این برابری، $B_۰$، $B_۱$، $B_۲$، ...، $B_{۱۰}$ را محاسبه کنید.

ب) نشان دهید، این دستورها، برقرار است:

$$۱^k + ۲^k + ۳^k + \ldots + n^k =$$
$$= \frac{۱}{k+۱}\{n^{k+۱} + e_{k+۱}^{۱} B_۱ n^k + C_{k+۱}^{۲} B_۲ n^{k-۱} + \ldots + C_{k+۱}^{k} B_k n\}$$

۳۲. فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n تشکیل یک تصاعد حسابی می‌دهند. می‌دانیم

$$x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = a,\ x_۱^۲ + x_۲^۲ + \ldots + x_n^۲ = b^۲$$

این تصاعد را تشکیل دهید.

۳۳. این مجموع‌ها را به‌دست آورید:

الف) $۱ + ۴x + ۹x^۲ + \ldots + n^۲ x^{n-۱}$

ب) $۱^۳ + ۲^۳ x + ۳^۳ x^۲ + \ldots + n^۳ x^{n-۱}$

۳۴. این مجموع‌ها را به‌دست آورید.

الف) $۱ + \frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۴} + \frac{۷}{۸} + \ldots + \frac{۲n-۱}{۲^{n-۱}}$

ب) $۱ - \frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۴} - \frac{۷}{۸} + \ldots + (-۱)^{n-۱}\frac{۲n-۱}{۲^{n-۱}}$

۳۵. مجموع‌ها را به‌دست آورید:

الف) $۱ - ۲ + ۳ - ۴ + \ldots + (-۱)^{n-۱} n$

ب) $۱^۲ - ۲^۲ + ۳^۲ \ldots + (-۱)^{n-۱} n^۲$

ج) $۱ - ۳^۲ + ۵^۲ - ۷^۲ + \ldots - (۴n-۱)^۲$

د) $۲ \times ۱^۲ + ۳ \times ۲^۲ + \ldots + (n+۱)n^۲$

۳۶. مجموع n عدد به‌صورت ۱، ۱۱، ۱۱۱، ۱۱۱۱ و ... را به‌دست آورید.

۳۷. این اتحاد را ثابت کنید:

$$x^{4n+2}+y^{4n+2}=\{x^{2n+1}-2x^{2n-1}y^2+2x^{2n-3}y^4-\ldots+(-1)^n 2xy^{2n}\}^2$$
$$=\{y^{2n+1}-2y^{2n-1}x^2+2y^{2n-3}x^4-\ldots+(-1)^n 2yx^{2n}\}^2$$

۳۸. مجموع حاصل‌ضرب‌های عددهای ۱، a، a^2، ...، a^{n-1} را با ضرب یکی در بقیهٔ عنصرها هربار به‌دست آورید.

۳۹. این اتحاد را ثابت کنید:

$$\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+2\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\ldots+(n-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)+n$$
$$=\frac{1}{x^{n-1}}\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)^2$$

۴۰. این اتحادها را ثابت کنید:

الف) $$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

ب) $$\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{2}{2\times 3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

ج) $$\frac{1}{1\times 3\times 5}+\frac{2}{3\times 5\times 7}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$$

۴۱. این مجموع را محاسبه کنید:

$$S=\frac{1^4}{1\times 3}+\frac{2^4}{3\times 5}+\frac{3^4}{5\times 7}+\ldots+\frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)}$$

۴۲. فرض کنید a_1، a_2، ...، a_n یک تصاعد حسابی تشکیل دهند. این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{1}{a_1a_n}+\frac{1}{a_2a_{n-1}}+\ldots+\frac{1}{a_na_1}=\frac{2}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$$

۴۳. ثابت کنید، به‌فرض درست و مثبت بودن عددهای n و p:

$$\text{الف)}\ \frac{n}{(n+۱)!}+\frac{n+۱}{(n+۲)!}+\ldots+\frac{n+p}{(n+p+۱)!}=\frac{۱}{n!}-\frac{۱}{(n+p+۱)!}$$

$$\text{ب)}\ \frac{۱}{(n+۱)!}+\frac{۱}{(n+۲)!}+\ldots+\frac{۱}{(n+p+۱)!}<\frac{۱}{n}\left[\frac{۱}{n!}-\frac{۱}{(n+p+۱)!}\right]$$

۴۴. عبارت را ساده کنید:

$$\frac{۱}{x+۱}+\frac{۲}{x^{۲}+۱}+\frac{۴}{x^{۴}+۱}+\ldots+\frac{۲^{n}}{x^{۲n}+۱}$$

۴۵. فرض کنید: $S_n=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\ldots+\frac{۱}{n}$ ثابت کنید:

$$\frac{n+p+۱}{n-p+۱}\left\{\frac{n-p}{n(p+۱)}+\frac{n-p-۱}{(n-۱)(p+۲)}+\ldots+\frac{۱}{n(p+۱)}\right\}=S_n-S_p$$

۴۶. اگر

$$S_n=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\ldots+\frac{۱}{n}$$

$$S'_n=\frac{n+۱}{۲}-\left\{\frac{۱}{n(n-۱)}+\frac{۲}{(n-۱)(n-۲)}+\ldots+\frac{n-۲}{۲\times ۳}\right\}$$

ثابت کنید $S_n=S'_n$.

۴۷. فرض کنید S_k مجموع k جملهٔ اول یک تصاعد حسابی باشد. برای این‌که نسبت $\frac{S_{kx}}{S_x}$ مستقل از x باشد، این تصاعد چگونه باید باشد.

۴۸. می‌دانیم $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n تشکیل یک تصاعد حسابی می‌دهد: حاصل این جمع را به‌دست آورید.

$$S=\sum_{i=۱}^{i=n}\frac{a_i a_{i+۱}a_{i+۲}}{a_i+a_{i+۲}}$$

۴۹. این مجموع را محاسبه کنید:

$$\frac{۱}{\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)}+\frac{۱}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+۲\beta)}+\ldots+$$
$$+\frac{۱}{\cos[\alpha+(n-۱)\beta]\cos(\alpha+n\beta)}$$

۵۰. نشان دهید:

$$\tan\alpha + \frac{۱}{۲}\tan\frac{\alpha}{۲} + \frac{۱}{۴}\tan\frac{\alpha}{۴} + \ldots + \frac{۱}{۲^{n-۱}}\tan\frac{\alpha}{۲^{n-۱}} =$$

$$= \frac{۱}{۲^{n-۱}}\cot\frac{\alpha}{۲^{n-۱}} - ۲\cot ۲\alpha$$

۵۱. این دستورها را ثابت کنید:

الف) $\sin a + \sin(a+h) + \ldots + \sin[a+(n-۱)h] =$

$$= \frac{\sin\dfrac{nh}{۲}\sin\left(a + \dfrac{n-۱}{۲}h\right)}{\sin\dfrac{h}{۲}}$$

ب) $\cos\alpha + \cos(a+h) + \ldots + \cos[a+(n-۱)h] =$

$$= \frac{\sin\dfrac{nh}{۲}\cos\left(a + \dfrac{n-۱}{۲}h\right)}{\sin\dfrac{h}{۲}}$$

۵۲. این مجموع‌ها را به‌دست آورید:

$$s = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{۲\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-۱)\pi}{n}$$

$$s' = \cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{۲\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{(n-۱)\pi}{n}$$

۵۳. نشان دهید:

$$\frac{\sin\alpha + \sin ۳\alpha + \ldots + \sin(۲n-۱)\alpha}{\cos\alpha + \cos ۳\alpha + \ldots + \cos(۲n-۱)\alpha} = \tan n\alpha$$

۵۴. این مجموع‌ها را محاسبه کنید:

$$S'_n = \cos^۲ x + \cos^۲ ۲x + \ldots + \cos^۲ ۲nx$$

$$S''_n = \sin^۲ x + \sin^۲ ۲x + \ldots + \sin^۲ ۲nx$$

۵۵. ثابت کنید:

$$\sum_{i=۱}^{i=p} \sin \frac{m\pi i}{p+۱} \sin \frac{n\pi i}{p+۱} = \begin{cases} -\frac{p+۱}{۲} & \text{اگر } m+n \text{ بر } ۲(p+۱) \text{ بخش‌پذیر باشد} \\ \frac{p+۱}{۲} & \text{اگر } m=n \text{ بر } ۲(p+۱) \text{ بخش‌پذیر باشد} \\ ۰ & \text{اگر } m \neq n \text{ و اگر } m-n \text{ و } m+n \\ & \text{بر } ۲(p+۱) \text{ بخش‌پذیر نباشد} \end{cases}$$

۵۶. این مجموع را به‌دست آورید $(x > ۰)$:

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{۱+۱\times ۲x^۲} + \operatorname{arctg}\frac{x}{۱+۲\times ۳x^۲} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{x}{۱+n(n+۱)x^۲}$$

۵۷. این مجموع را به‌دست آورید:

$$\operatorname{arctg}\frac{r}{۱+a_۱a_۲} + \operatorname{arctg}\frac{r}{۱+a_۲a_۳} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{r}{۱+a_na_{n+۱}}$$

به‌شرطی که $a_۱$، $a_۲$، ... تشکیل یک تصاعد حسابی با قدرنسبت r $(۰ < a_۱$، $۰ < r)$ را بدهد.

۵۸. مجموع را محاسبه کنید: $\sum_{k=۱}^{k=n} \operatorname{arctg}\frac{۲k}{۲+k^۲+k^۴}$

۵۹. دستگاه را حل کنید:

$$x_۱ \sin\frac{\pi}{n} + x_۲ \sin ۲\frac{\pi}{n} + x_۳ \sin ۳\frac{\pi}{n} + \ldots +$$

$$+x_{n-۱} \sin(n-۱)\frac{\pi}{n} = a_۱$$

$$x_۱ \sin\frac{\pi}{n} + x_۲ \sin ۲\frac{۲\pi}{n} + x_۳ \sin ۳\frac{۲\pi}{n} + \ldots +$$

$$+x_{n-۱} \sin(n-۱)\frac{۲\pi}{n} = a_۲;$$

$$x_۱ \sin\frac{۳\pi}{n} + x_۲ \sin ۲\frac{۳\pi}{n} + x_۳ \sin ۳\frac{۳\pi}{n} + \ldots +$$

$$+x_{n-1}\sin(n-1)\frac{3\pi}{n}=a_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+x_2\sin 2\frac{(n-1)\pi}{n}+x_3\sin 3\frac{(n-1)\pi}{n}+\ldots+$$
$$+x_{n-1}\sin(n-1)\frac{(n-1)\pi}{n}=a_{n-1}$$

فصل ۸. نابرابری‌ها

در آغاز، ویژگی‌های اصلی نابرابری‌ها را به‌یاد می‌آوریم:

الف) اگر $a>b$ و $b>c$، آن‌گاه $a>c$؛

ب) اگر $a>b$، آن‌گاه $a+m>b+m$؛

ج) اگر $a>b$، آن‌گاه به شرط $m>0$ داریم $am>bm$؛ و به‌شرط $m<0$ داریم: $am<bm$. به‌این ترتیب، اگر دو طرف نابرابری را، در عددی منفی ضرب کنیم، جهت نابرابری تغییر می‌کند.

د) اگر $a>b$، آن‌گاه به‌شرط $x>0$ داریم: $a^x>b^x$.

گزارهٔ اخیر، در حالتی که x عددی گویا باشد، به‌سادگی ثابت می‌شود. ابتدا فرض می‌کنیم $x=m$، عددی درست و مثبت باشد در این صورت

$$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+b^{m-1})$$

سمت راست این برابری، ضرب دو پرانتز است که، هردوی آن‌ها، حاصلی مثبت دارند؛ یعنی $a^m-b^m>0$ و $a^m>b^m$. اکنون فرض می‌کنیم $x=\frac{1}{m}$، در این‌صورت $a^x-b^x=\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}$ و چون

$$a-b=(\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{a})(\sqrt[m]{a^{m-1}}+\ldots+\sqrt[m]{b^{m-1}})$$

$a-b$ و پرانتز دوم سمت راست برابری، مقدارهایی مثبت‌اند، پس

$$\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}>0\Rightarrow\sqrt[m]{a}>\sqrt[m]{b}$$

سرانجام فرض می‌کنیم $x = \frac{p}{q}$، یعنی

$$a^x - b^x = a^{\frac{p}{q}} - b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} - \sqrt[q]{b^p}$$

چون p و q عددهای درستی هستند، پس $a^p > b^p$ و، درنتیجه $\sqrt[q]{a^p} > \sqrt[q]{b^q}$.

در حالتی که x عددی گنگ باشد، باید آن را به‌عنوان حد دنباله‌ای از عددهای گویا در نظر گرفت و به نتیجه‌ای رسید که، برای حالت گویا بودن x، به آن رسیدیم.

ه) اگر $a > ۰$ و $x > y > ۰$، آن‌گاه $a^x > a^y$؛

اگر $۰ < a < ۱$ و $x > y > ۰$، آن‌گاه $a^x < a^y$.

اثبات این حکم برپایه قضیه‌ای انجام می‌شود که، بنابر آن، به شرط $a > ۱$، داریم $a^\alpha > ۱$.

و) اگر $x > y$ و $a > ۱$، آن‌وقت $\log_a x > \log_a y$؛

اگر $x > y$ و $۰ < a < ۱$، آن‌گاه $\log_a x < \log_a y$.

به‌جز مساله‌های دیگر این بخش، به‌ویژه مسالهٔ ۳۰، هم به‌مناسبت روشَ حل آن و هم به‌خاطر نتیجه‌هایی که از آن به‌دست می‌آید، برای شما سودمند است. همچنین، نابرابری‌های مسالهٔ ۵۰، کاربردهای زیادی دارند.

۱. ثابت کنید $(n \in \mathbf{N})$:

$$\frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \ldots + \frac{۱}{۲n} > \frac{۱}{۲}$$

۲. با شرط طبیعی بودن عددهای n و p، $n \geq ۱$ و $p \geq ۱$، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{n+۱} - \frac{۱}{n+p+۱} < \frac{۱}{(n+۱)^۲} + \frac{۱}{(n+۲)^۲} + \ldots + \frac{۱}{(n+p)^۲} < \frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+p}$$

۳. تعدادی دلخواه از جمله‌های دنبالهٔ

$$\frac{۱}{۲^۲}, \frac{۱}{۳^۲}, \frac{۱}{۴^۲}, \ldots$$

انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، مجموع این عددها، همیشه کوچکتر از واحد است.

۴. برای عدد طبیعی n، ثابت کنید:

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$$

۵. a را مقدار تقریبی $\sqrt{n}$ با یک واحد تقریب نقصانی می‌گیریم، به زبان دیگر می‌دانیم: $a < \sqrt{A} < a + ۱$. ثابت کنید:

$$a + \frac{A - a^{۲}}{۲a + ۱} < \sqrt{A} < a + \frac{A - a^{۲}}{۲a + ۱} + \frac{۱}{۴(۲a + ۱)}$$

۶. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \ldots + \frac{۱}{\sqrt{n}} < ۲\sqrt{n + ۲} - ۲$$

۷. ثابت کنید: $\frac{۱}{۲\sqrt{s}} < \frac{۱}{۴^s} C_{۲s}^{s} < \frac{۱}{\sqrt{۲s + ۱}}$

۸. باشرط $\pi > \theta > ۰$، ثابت کنید.

$$\cot \frac{\theta}{۲} \geq ۱ + \cot \theta$$

۹. A، B و C، زاویه‌هایی مثبت به مجموع π و C زاویه‌ای منفرجه است. ثابت کنید: $\tan A \tan B < ۱$.

۱۰. فرض کنید $\tan \theta = n \tan \varphi$, $(n > ۰)$، ثابت کنید:

$$\tan^{۲}(\theta - \varphi) \leq \frac{(n - ۱)^{۲}}{۴n}$$

۱۱. نشان دهید اگر داشته باشیم:

$$\frac{۱}{\cos \alpha \cos \beta} + \tan \alpha \tan \beta = \tan \gamma$$

آن‌گاه $\cos ۲\gamma \leq ۰$.

۱۲. فرض کنید n کسر به این‌صورت در اختیار داشته باشیم:

$$\frac{a_۱}{b_۱}, \frac{a_۲}{b_۲}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \; b_i > ۰ \quad (i = ۱, ۲, \ldots, n)$$

ثابت کنید، کسر $\frac{a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n}{b_۱ + b_۲ + \ldots + b_n}$ بین بزرگترین و کوچکترین این کسرها قرار دارد.

۱۳. ثابت کنید که کسر $\sqrt[m+n+\ldots+p]{ab\ldots l}$ بین بزرگترین و کوچکترین مقدارهای $\sqrt[m]{a}$، $\sqrt[n]{b}$، …، $\sqrt[p]{l}$ قرار دارد.

۱۴. فرض کنید: $\frac{\pi}{۲} > \lambda > \ldots > \gamma > \beta > \alpha > ۰$، ثابت کنید:

$$\tan\alpha < \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \ldots + \sin\lambda}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \ldots + \cos\lambda} < \tan\lambda$$

۱۵. فرض کنید: $x^۲ = y^۲ + z^۲$ و $x > ۰$، $y > ۰$ و $z > ۰$، ثابت کنید:

برای $\lambda > ۲$: $x^\lambda > y^\lambda + z^\lambda$

و برای $\lambda < ۲$: $x^\lambda < y^\lambda + z^\lambda$.

۱۶. ثابت کنید، اگر $m^۲ + n^۲ = ۱$ و $a^۲ + b^۲ = ۱$، آنگاه

$$|am + bn| \leq ۱$$

۱۷. اگر a، b، c و $a+b-c$، $a+c-b$، $b+c-a$ مثبت باشند، ثابت کنید:

$$abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

۱۸. فرض کنید: $A + B + C = \pi$. ثابت کنید که: $\tan^۲\frac{A}{۲} + \tan^۲\frac{B}{۲} + \tan^۲\frac{C}{۲} \geq ۱$

۱۹. اگر $A + B + C = \pi$ و $A > ۰$، $B > ۰$، $C > ۰$، آنوقت

$$\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲} \leq \frac{۱}{۸}$$

۲۰. اگر $A + B + C = \pi$ و $A > ۰$، $B > ۰$، $C > ۰$، ثابت کنید:

الف) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{۳}{۲}$؛ ب) $\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲} \leq \frac{۳\sqrt{۳}}{۳}$

۲۱. ثابت کنید بهشرط مثبت بودن a، b، c و d، داریم:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

۲۲. ثابت کند به‌شرط مثبت بودن a و b:

$$\frac{a^{۳}+b^{۳}}{۲} \geq \left(\frac{a+b}{۲}\right)^{۳}$$

۲۳. ثابت کنید:

الف) $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$ $(b > ۰ \,،a > ۰)$؛

ب) $a \geq b$ اگر $\frac{۱}{۸}\frac{(a-b)^{۲}}{b} \geq \frac{a+b}{۲} - \sqrt{ab} \geq \frac{۱}{۸}\left(\frac{(a-b)^{۲}}{a}\right)$

۲۴. ثابت کنید:

$$\frac{a+b+c}{۳} \geq \sqrt[۳]{abc}\,(a,b,c > ۰)$$

۲۵. ثابت کنید ($a_i > ۰$ و $i = ۱,۲,\ldots,n$):

$$\sqrt{a_۱ a_۲} + \sqrt{a_۱ a_۳} + \ldots + \sqrt{a_{n-۱} a_n} \leq \frac{n-۱}{۲}(a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n)$$

۲۶. اگر $a_i > ۰$ $(i = ۱,۲,\ldots,n)$ و $a_۱ a_۲ \ldots a_n = ۱$، ثابت کنید:

$$(۱+a_۱)(۱+a_۲)\ldots(۱+a_n) \geq ۲^n$$

۲۷. ثابت کنید، به‌شرط $a,b,c > ۰$

الف) $(a+b)(b+c)(b+c) \geq ۸abc$

ب) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{۳}{۲}$

۲۸. ثابت کنید، به‌شرط مثبت بودن a، b، c، k، l و m:

$$\sqrt[۳]{(a+k)(b+l)(c+m)} \geq \sqrt[۳]{abc} + \sqrt[۳]{klm}$$

۲۹. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} \geq \frac{۹}{a+b+c} \quad (a,b,c > ۰)$$

۳۰. ثابت کنید:

$$\frac{x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_۱ x_۲ \ldots x_n}\,(x_i > ۰,\ i = ۱,۲,\ldots,n)$$

حالت برابری در صورتی برقرار است که داشته باشیم:

$$x_۱ = x_۲ = x_۳ = \ldots = x_n$$

۳۱. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n تشکیل یک تصاعد حسابی می‌دهند $(a_i > ۰)$.
ثابت کنید $\sqrt{a_۱ a_n} \leq \sqrt[n]{a_۱ a_۲ \ldots a_n} \leq \frac{a_۱ + a_n}{۲}$
به‌خصوص $\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n+۱}{۲}$

۳۲. فرض کنید a، b و c عددهای درست مثبت باشند. ثابت کنید:

$$a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} \geq \frac{۱}{۳}(a+b+c)$$

۳۳. ثابت کنید، اگر a، b، c مثبت و گویا باشند، طوری که مجموع هردو عدد بیشتر از عدد سوم باشد، آن‌گاه

$$\left(۱ + \frac{b-c}{a}\right)^a \left(۱ + \frac{c-a}{b}\right)^b \left(۱ + \frac{a-b}{c}\right)^c \leq ۱$$

۳۴. فرض کنید a، b، c، ...، l و n عددهایی مثبت باشند و $s = a+b+c+\ldots+l$
ثابت کنید: $\frac{s}{s-a} + \frac{s}{s-b} + \ldots + \frac{s}{s-l} \geq \frac{n^۲}{n-۱}$

۳۵. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$(a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + \ldots + a_nb_n)^۲ \leq (a_۱^۲ + a_۲^۲ + \ldots + a^۲n) \times$$
$$\times(b_۱^۲ + b_۲^۲ + \ldots b_n^۲)$$

۳۶. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$a_۱ + a_۲ + \ldots + n \leq \sqrt{n(a_۱^۲ + a_۲^۲ + \ldots + a_n^۲)}$$

۳۷. ثابت کنید:

$$(x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n)\left(\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} + \ldots + \frac{۱}{x_n}\right) \geq n^۲$$

۳۸. به‌شرطی که داشته باشیم:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p,$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n = q$$

درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\frac{p}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{p^2 - \frac{2n}{n-1}q} \geq x_i \geq \frac{p}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{p^2 - \frac{2n}{n-1}q}$$

۳۹. فرض کنید a، b، c، ...، l و n عددهای حقیقی مثبت و p و q نیز دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید اگر p و q هم‌علامت باشند، آن‌گاه

$$n(a^{p+q} + b^{p+q} + \ldots + l^{p+q}) \geq (a^p + b^p + \ldots + l^p) \times (a^q + b^q + \ldots + l^q)$$

و اگر p و q با علامت‌های مختلف باشند، آن‌گاه

$$n(a^{p+q} + b^{p+q} + \ldots + l^{p+q}) \leq (a^p + b^p + \ldots + l^p)(a^q + b^q + \ldots + l^q)$$

۴۰. ثابت کنید: $(1+a)^\lambda > 1 + a\lambda$ (α عددی مثبت و λ عددی گویا است)؛
ب) $(1+a)^\lambda < \frac{1}{1-a\lambda}$ (α عدد مثبت، λ عددهای گویا و مثبت و $1 > \alpha\lambda$).

۴۱. فرض کنید $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$، n عددی درست و مثبت است،
الف) ثابت کنید: $u_{n+1} > u_n$؛
پ) ثابت کنید u_n مقداری کران‌دار است، یعنی ثابتی (مستقل از n) وجود دارد که به‌ازای هر مقدار n، u_n کوچکتر از این مقدار ثابت می‌شود.

۴۲. ثابت کنید:

$$\sqrt[2]{2} > \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \sqrt[6]{6} > \ldots > \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} > \ldots$$

۴۳. ثابت کنید:

$$2 > \sqrt{3} > \sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5} > \ldots > \sqrt[n-1]{n} > \sqrt[n]{n+1} > \ldots$$

۴۴. می‌دانیم

$$a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \ldots + a_{۱n}x_n = y_۱$$
$$a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + \ldots + a_{۲n}x_n = y_۲$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n x_۱ + a_{n۲}x_۲ + \ldots + a_{nn}x_n = yn$$

که در آن $a_{ij} > ۰$ و عددی گویا است و $x_{ij} > ۰$، به‌جز این می‌دانیم:

$$a_{k۱} + a_{k۲} + \ldots + a_{kn} = ۱$$
$$a_{۱k} + a_{۲k} + \ldots + a_{nk} = ۱ \ (k = ۱, ۲, \ldots, n)$$

ثابت کنید که، در این صورت

$$y_۱y_۲\ldots y_n \geq x_۱x_۲\ldots x_n$$

۴۵. فرض کنید $a_i > ۰$، $b_i > ۰$ $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$. ثابت کنید:

$$\sqrt[n]{(a_۱ + b_۱)(a_۲ + b_۲)\ldots(a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_۱a_۲\ldots a_n} + \sqrt[n]{b_۱b_۲\ldots b_n}$$

۴۶. ثابت کنید:

$$\left(\frac{x_۱ + x_۲ + \ldots x_n}{n}\right)^k \leq \frac{x_۱^k + x_۲^k + \ldots + x_n^k}{n}$$

n و k عددهای درست و مثبت هستند و $x_i > ۰$.

۴۷. تابع $\varphi(t)$ در فاصله‌ای به‌صورت $\varphi\left(\frac{t_۱ + t_۲}{۲}\right) < \frac{\varphi(t_۱) + \varphi(t_۲)}{n}$ تعریف شده است و دارای ویژگی است که در آن $t_۱$ و $t_۲$ مخالف هم هستند. ثابت کنید در این صورت

$$\varphi\left(\frac{t_۱ + t_۲ + \ldots + t_n}{n}\right) < \frac{\varphi(t_۱) + \varphi(t_۲) + \ldots + \varphi(t_n)}{n}$$

که در آن، $t_۱$، $t_۲$، …، t_n، n مقدارهایی دلخواه از یک فاصلهٔ داده شده هستند و برابر یکدیگر نیستند.

۴۸. بزرگترین مقدار این مجموع را به‌دست آورید

$$S = \sin a_۱ + \sin a_۲ + \ldots + \sin a_n$$
$$(a_i > ۰,\ a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n = \pi)$$

۴۹. فرض کنید x، p و q مثبت و p و q عددهایی درست باشند، ثابت کنید:

$$\frac{x^{p-۱}}{p} > \frac{x^{q-۱}}{q}$$

۵۰. فرض کنید $۰ < x$ و $x \neq ۱$ و m عددی گویا باشد. ثابت کنید، اگر m بین صفر و ۱ نباشد، داریم:

$$mx^{m-۱}(x-۱) > x^m - ۱ > m(x-۱)$$

و اگر $۰ < m < ۱$، آنگاه

$$mx^{m-۱}(x-۱) < x^m - ۱ < m(x-۱)$$

۵۱. ثابت کنید، اگر m در فاصله از ۰ تا ۱ نباشد:

$$(۱+x)^m \geq ۱ + mx$$

و اگر m عددی گویا، $۰ \leq m \leq ۱$ و $-۱ < x$

$$(۱+x)^m \leq ۱ + mx$$

۵۲. ثابت کنید

$$\left(\frac{x_۱^p + x_۲^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{۱}{p}} \left(\frac{x_۱^q + x_۲^q + \ldots + x_n^q}{n}\right)^{\frac{۱}{q}}$$

$p \geq q$، q و p، عددهایی درست و مثبت‌اند.

۵۳. مقداری از x را پیدا کنید که به‌ازای آن عبارت

$$(x-x_۱)^۲ + (x-x_۲)^۲ + \ldots + (x-x_n)^۲$$

کوچکترین مقدار خود را اختیار کند.

۵۴. فرض کنید $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = c$ (c ثابت). به‌ازای چه مقدارهایی از x_1، x_2، ...، x_n، عبارت $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ کوچکترین مقدار خود را اختیار می‌کند؟

۵۵. فرض کنید $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = c$ (x_iها مقدارهایی مثبت‌اند). به‌ازای چه مقدارهایی از متغیرهای x_1، x_2، ...، x_n عبارت

$$x_1^\lambda + x_2^\lambda + \ldots + x_n^\lambda$$

(λ عددی گویا است) کوچکترین مقدار خود را اختیار می‌کند؟

۵۶. فرض کنید $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = c$

(x_iها مثبت و c مقداری ثابت). ثابت کنید حاصل‌ضرب $x_1 x_2 \ldots x_n$ هنگامی به بزرگترین مقدار خود می‌رسد که داشته باشیم: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{c}{n}$ باشد.

۵۷. فرض کنید $x_1 x_2 \ldots x_n = c$ (x_iها مثبت و c مقداری ثابت). ثابت کنید مجموع $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ هنگامی کوچکترین مقدار خود را اختیار می‌کند که داشته باشیم:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \sqrt[n]{c}$$

۵۸. فرض کنید $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = c$ (x_iها مثبت و c مقداری ثابت). نشان دهید

$$x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}$$

زمانی بزرگترین مقدار خود را اختیار می‌کند که داشته باشیم:

$$\frac{x_1}{\mu_1} = \frac{x_2}{\mu_2} = \ldots = \frac{x_n}{\mu_n} = \frac{c}{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n}$$

$\mu_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ و گویا است.

۵۹. فرض کنید $a_i > 0$، $x_i > 0$، $(i = 1, 2, \ldots, n)$ و

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = c$$

ثابت کنید حاصل‌ضرب $x_1 x_2 \ldots x_n$ زمانی بزرگترین مقدار خود را اختیار می‌کند که داشته باشیم:

$$a_1 x_1 = a_2 x_2 = \ldots = a_n x_n = \frac{c}{n}$$

۶۰. فرض کنید $a_i > ۰$، $x_i > ۰$ و c و $a_۱x_۱^{\lambda_۱} + a_۲x_۲^{\lambda_۲} + \ldots + a_nx_n^{\lambda_n} = c$ ($\lambda_i > ۰$ و گویا است). ثابت کنید.

$$x_۱^{\mu_۱}x_۲^{\mu_۲}\ldots x_n^{\mu_n}$$

وقتی بزرگترین مقدار خود را اختیار می‌کند که

$$\frac{\lambda_۱a_۱x_۱^{\lambda_۱}}{\mu_۱} = \frac{\lambda_۲a_۲x_۲^{\lambda_۲}}{\mu_۲} = \ldots = \frac{\lambda_na_nx_n\lambda_n}{\mu_n}$$

۶۱. فرض کنید $x_۱^{\lambda_۱}x_۲^{\lambda_۲}\ldots x_n^{\lambda_n} = c$ (c ثابت). نشان دهید

$$a_۱x_۱^{\mu_۱} + a_۲x_۲^{\mu_۲} + \ldots + a_nx_n^{\mu_n}$$

زمانی کوچکترین مقدار خود را اختیار می‌کند که

$$\frac{\frac{x_۱^{\mu_۱}}{\lambda_۱}}{a_۱\mu_۱} = \frac{\frac{x_۲^{\mu_۲}}{\lambda_۲}}{a_۲\mu_۲} = \ldots = \frac{\frac{x_n^{\mu_n}}{\lambda n}}{a_n\mu_n}$$

($x_i > ۰$، a_i، λ_i، $\mu_i > ۰$، گویا هستند).

۶۲. تعیین کنید به‌ازای چه مقداری از x، y، z، ...، t، مجموع

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ + \ldots + t^۲$$

کوچکترین مقدار خود را احتیار می‌کند، به‌شرطی که بدانیم:
$ax + by + \ldots + kt = A$ (a، b، ...، k و A ثابت هستند.)

۶۳. به‌ازای چه مقدارهایی از x و y عبارت

$$u = (a_۱x + b_۱y + c_۱)^۲ + (a_۲x + b_۲y + c_۲)^۲ + \ldots + (a_nx + b_yn + c_n)^۲$$

کوچکترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

۶۴. فرض کنید $x_۰$، $x_۱$، ...، x_n عددهایی درست باشند و فرض کنید

$$x_۰ < x_۱ < x_۲ < \ldots < x_n$$

ثابت کنید هر چندجمله‌ای در درجهٔ n به‌صورت $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ در نقطه‌های x_0، x_1، $x_2, \ldots, x_n$ کوچکترین مقدار خود را اختیار می‌کند که بزرگتر یا مساوی $\frac{n!}{2n}$ است.

۶۵. فرض کنید $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. به‌ازای چه مقداری از x حاصل‌ضرب $\sin x \cos x$ بزرگترین مقدار خود را اختیار می‌کند؟

۶۶. فرض کنید $x+y+z = \frac{\pi}{2}$، $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$، $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$، $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. به‌ازای چه مقدارهایی از x و y و z حاصل‌ضرب $\tan x \tan y \tan y$ بزرگترین مقدار خود را اختیار می‌کند؟

۶۷. ثابت کنید $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1}$ (n عدد طبیعی است).

۶۸. فرض کنید $a > 1$ و n عددی طبیعی باشد و ثابت کنید

$$a^n - 1 \ge n\left(\frac{n+1}{a^2} - \frac{n-1}{a^2}\right).$$

۶۹. ثابت کنید $n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} < n\frac{n}{2}$ $(n \in \mathrm{N})$

۷۰. ثابت کنید:

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \le \frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$$

$(a$ ،b و c و $d > 0)$

فصل ۹. استقرای ریاضی

مساله‌هایی که در این بخش آورده‌ایم، به‌طور معمول، با استفاده از روش استقرای ریاضی حل می‌شوند. برخی از این مساله‌ها، به آنالیز ترکیبی هم مربوط می‌شوند.

۱. می‌دانیم: $v_{n+1} = 3v_n - 2v_{n-1}$؛ درضمن $v_0 = 2$ و $v_1 = 3$. ثابت کنید

$$v_n = 1 + 2^n$$

۲. می‌دانیم: $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$؛ درضمن $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$. ثابت کنید

$$u_n = 2^n - 1$$

۳. برای عددهای دلخواه a و $A > ۰$ می‌دانیم:

$$a_۱ = \frac{۱}{۲}\left(a + \frac{A}{a}\right),\ a_۲ = \frac{۱}{۲}\left(a_۱ + \frac{A}{a_۱}\right),$$
$$a_۳ = \frac{۱}{۲}\left(a_۲ + \frac{A}{a_۲}\right), \ldots, a_n = \frac{۱}{۲}\left(a_{n-۱} + \frac{A}{a_{n-۱}}\right)$$

ثابت کنید، دراین‌صورت، داریم:

$$\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_۱ - \sqrt{A}}{a_۱ + \sqrt{A}}\right)^{۲^{n-۱}}$$

که در آن، n عددی طبیعی است.

۴. دنبالهٔ عددهای $a_۰$، $a_۱$، $a_۲$، ...، باتوجه به این قانون درست شده است: دو عدد اول $a_۰$ و $a_۱$ داده شده‌اند، هر جملهٔ دیگر دنباله، از جملهٔ سوم به بعد، برابر است با نصف مجموع دو جملهٔ قبل از خود، a_n را برحسب $a_۰$، $a_۱$ و n بنویسید.

۵. جمله‌های دنبالهٔ $a_۱$، $a_۲$، ...، به‌این ترتیب به‌دست می‌آیند:

$$a_۱ = ۲,\ a_n = ۳a_{n-۱} + ۱$$

مجموع $a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n$ را به‌دست آورید.

۶. جمله‌های دنبالهٔ $a_۱$، $a_۲$، ...، با رابطه $a_n = ka_{n-۱} + l$ $(n \geq ۲)$، به هم بستگی دارند. a_n را برحسب $a_۱$، k و l بنویسید.

۷. دنبالهٔ $a_۱$، $a_۲$، ... در رابطهٔ $a_{n+۱} - ۲a_n + a_{n-۱} = ۱$ صدق می‌کند a_n را برحسب $a_۱$، $a_۲$ و n بنویسید.

۸. جمله‌های دنبالهٔ $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ... با این برابری به هم بستگی دارند:

$$a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$$

$$a_{n+۳} - ۳a_{n+۲} + ۳a_{n+۱} - a_n = ۱$$

a_n را برحسب $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و n بیان کنید.

۹. زوج عددهای

$$(a, b)(a_۱, b_۱)(a_۲, b_۲)\ldots$$

بنابراین قانون به‌دست می‌آیند:

$$a_۱ = \frac{a+b}{۲} \quad b_۱ = \frac{a_۱+b}{۲} \quad a_۲ = \frac{a_۱+b_۱}{۲} \quad b_۲ = \frac{a_۲+b_۱}{۲}, \dots$$

ثابت کنید

$$a_n = a + \frac{۲}{۳}(b-a)\left(۱ - \frac{۱}{۴^n}\right),\ b_n = a + \frac{۲}{۳}(b-a)\left(۱ + \frac{۱}{۲ \times ۴^n}\right)$$

۱۰. جمله‌های دنبالهٔ $x_۰, y_۰, x_۱, y_۱, x_۲, y_۲, \dots$ از این رابطه به‌دست می‌آیند:

$$x_n = x_{n-۱} + ۲y_{n-۱}\sin^۲\alpha,\ y_n = y_{n-۱} + ۲x_{n-۱}\cos^۲\alpha$$

به‌جز این می‌دانیم: $x_۰ = ۰$، $y_۰ = \cos\alpha$ · x_n و y_n را برحسب α بیان کنید.

۱۱. عددهای $x_۰, x_۱, x_۲, \dots, y_۰, y_۱, y_۲, \dots$ به‌این صورت با هم بستگی دارند:

$$x_n = \alpha x_{n-۱} + \beta y_{n-۱},\ y_n = \gamma x_{n-۱} + \delta y_{n-۱} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq ۰)$$

x_n و y_n را برحسب $x_۰$، $y_۰$ و n بیان کنید.

۱۲. جمله‌های دنبالهٔ $x_۰$، $x_۱$، $x_۲$، ...، باتوجه به این برابری به‌دست می‌آیند:

$$x_n = \alpha x_{n-۱} + \beta x_{n-۲}$$

x_n را برحسب $x_۰$، $x_۱$ و n بیان کنید.

۱۳. جمله‌های دنبالهٔ $x_۰$، $x_۱$، ...، با این رابطه به هم مربوط‌اند:

$$x_n = \frac{px_{n-۱} + qx_{n-۲}}{p+q}$$

x_n را برحسب $x_۰$، $x_۱$ و n بیان کنید:

۱۴. جمله‌های دنبالهٔ $x_۰$، $x_۱$، $x_۲$، ...، از این برابری تعیین می‌شوند:

$$x_n = \frac{\alpha x_{n-۱} + \beta}{\gamma x_{n-۱} + \delta}$$

x_n را برحسب $x_\circ$ و n بیان کنید. حالت‌های خاص:

$$x_n = \frac{x_{n-1}+1}{x_{n-1}+3}, \quad x_n = \frac{x_{n-1}}{2x_{n-1}+1}$$

۱۵. بین عددهای

$$a_\circ,\ a_1,\ a_2,\ \dots$$
$$b_\circ,\ b_1,\ b_2,\ \dots$$

این رابطه‌ها به‌قرار زیر است:

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \quad b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$$

$a_\circ$ و $b_\circ$ داده شده‌اند و $a_\circ > b_\circ > \circ$. a_n و b_n را برحسب $a_\circ$، $b_\circ$ و n بیان کنید.

۱۶. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{2^3-2} + \dots + \frac{1}{(2n)^3-(2n)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

۱۷. این عبارت را ساده کنید:

$$(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n) + x(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n) +$$
$$+x^2(1-x^3)(1-x^4)\dots(1-x^n) + \dots + x^k(1-x^{k+1})\dots(1-x^n) +$$
$$+ \dots + x^{n-1}(1-x^n) + x^n$$

۱۸. این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \frac{1}{1-x} \times \frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$$

۱۹. این اتحاد را ثابت کنید:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{n-1}}) = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^{2^n-1}$$

۲۰. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$1+\frac{1}{a}+\frac{a+1}{ab}+\frac{(a+1)(b+1)}{abc}+\ldots+$$
$$+\frac{(a+1)(b+1)\ldots(s+1)(k+1)}{abc\ldots skl}=$$
$$=\frac{(a+1)(b+1)\ldots(k+1)(l+1)}{abc\ldots kl}$$

۲۱. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{b+c+d+\ldots+k+l}{a(a+b+c+\ldots+k+l)}=\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\ldots+$$
$$+\frac{l}{(a+b+\ldots+k)(a+b+\ldots+k+l)}$$

۲۲. فرض کنید:

$$\frac{q}{1-q}(1-z)+\frac{q^2}{1-q^2}(1-z)(1-qz)+\ldots+$$
$$\frac{q^n}{1-q^n}(1-z)(1-qz)\ldots(1-q^nz)=F_n(z)$$

این اتحاد را ثابت کنید:

$$1+F_n(z)-F_n(qz)=(1-qz)(1-q^2z)\ldots(1-q^nz)$$

۲۳. ثابت کنید:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})\ldots(1-a^{n-k+1})}{1-a^k}=n$$

۲۴. این مجموع را محاسبه کنید:

$$S_n=\frac{a}{b}+\frac{a(a-1)}{b(b-1)}+\frac{a(a-1)(a-2)}{b(b-1)(b-2)}+\ldots+\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{b(b-1)\ldots(b-n+1)}$$

که در آن، b برابر ۰، ۱، ۲، ...، $n-1$ نیست.

۲۵. اگر بدانیم:

$$S_n = a_1 + (a_1+1)a_2 + (a_1+1)(a_2+1)a_3 + \ldots + \\ +(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_{n-1}+1)a_n$$

ثابت کنید: $S_n = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1) - 1$

۲۶. درستی این اتحادها را ثابت کنید:

الف) $\sum_{x=1}^{x=n} x(x+1)\ldots(x+q) = \frac{1}{q+2}n(n+1)\ldots(n+q+1)$

ب) $\sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+q)} = \frac{1}{q}\left\{\frac{1}{q!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+q)}\right\}$

۲۷. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right) \\ =\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)$$

۲۸. دنباله‌ای از عددها به این صورت داده شده است (دنبالهٔ عددهای فیبوناچی):

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

این دنباله با این شرط‌ها به‌دست می‌آید:

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ و } u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

درستی این برابری‌ها را ثابت کنید:

الف) $u_{n+2} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1};$

ب) $u_{2n+2} = u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n+1};$

ج) $u_{2n+1} = 1 + u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n};$

د) $-u_{2n-1} + 1 = u_1 - u_2 + u_3 + \ldots + u_{2n-1} - u_{2n};$

ه) $u_{۲n-۲} + ۱ = u_۱ - u_۲ + u_۳ - u_۴ + \ldots + u_{۲n-۱};$

و) $u_n u_{n+۱} = u_۱^۲ + u_۲^۲ + \ldots + u_n^۲;$

ز) $u_{۲n}^۲ = u_۱ u_۲ + u_۲ u_۳ + \ldots + u_{۲n-۱} u_{۲n};$

ح) $u_{n+۱} u_{n+۲} - u_n u_{n+۳} = (-۱)^n;$

ط) $u_n^۲ - u_{n+۱} u_{n-۱} = (-۱)^{n+۱};$

ی) $u_n^۴ - u_{n-۲} u_{n-۱} u_{n+۱} u_{n+۲} = ۱$

۲۹. این مجموع را حساب کنید:

$$\frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۲}{۱ \times ۳} + \ldots + \frac{u_{n+۲}}{u_{n+۱} u_{n+۳}}$$

۳۰. درستی این رابطه‌ها را ثابت کنید:

الف) $u_{n+p-۱} = u_{n-۱} u_{p-۱} + u_n u_p$

ب) $u_{۲n-۱} = u_n^۲ + u_{n-۱}^۲$

ج) $u_{۲n-۱} = u_n u_{n+۱} - u_{n-۲} u_{n-۱}$

۳۱. ثابت کنید:

$$u_n^۳ + u_{n+۱}^۳ - u_{n-۱}^۳ = u_{۳n}$$

۳۲. ثابت کنید:

$$u_n = \sum_{k=۰}^{k=[\frac{n-۱}{۲}]} C_{n-k-۱}^k$$

۳۳. تعداد جواب‌های درست و مثبت معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = m$ را پیدا کنید (m عدد درست و مثبت است)

۳۴. ثابت کنید تعداد جواب‌های درست و نامنفی معادله‌های

$$x + ۲y = n\ ,\ ۲x + ۳y = n - ۱, \ldots, nx + (n+۱)y = ۱,\ (n+۱)x + (n+۲)y = ۰$$

برابر $n + ۱$ است.

۳۵. نشان دهید، تعداد همهٔ جواب‌های درست و نامنفی معادله‌های

$$x + ۴y = ۳^{n-۱},\ ۴x + ۹y = ۵n - ۴,\ ۹x + ۱۶y = ۷n - ۹,$$
$$,\ldots, n^۲x + (n+۱)^۲y = n(n+۱)$$

برابر n است.

۳۶. n توپ سفید و n توپ سیاه با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ...، n وجود دارد. به چند طریق می‌توان توپ‌ها را در یک ردیف مرتب کرد طوری‌که تمام توپ‌هایی که در کنار هم قرار می‌گیرند، با رنگ‌های مختلف باشد؟

۳۷. به چند طریق می‌توان kn چیز متمایز را به k گروه پخش کرد، طوری که هر گروه شامل n چیز باشد؟

۳۸. تعداد جایگشت‌هایی از n عنصر را پیدا کنید که در آن‌ها، دو عنصر a و b هرگز کنار هم قرار نگیرند؟

۳۹. تعداد جایگشت‌های n عنصر را پیدا کنید که در آن‌ها، هیچ‌یک از عنصرها در مکان نخستین خود، قرار نگیرد.

۴۰. به چند طریق می‌توان n حرف مختلف را در r مربع (مربع اول، دوم، سوم و ... و rام) مرتب کرد، طوری‌که هر مربع شامل دست‌کم یک حرف باشد (ترتیب حرف‌های داخل مربع‌ها اهمیت ندارد.)

فصل ۱۰. حد

در این بخش، فرض را بر این گرفته‌ایم که خواننده، با معنای متغیر و حد آن و، همچنین عنصرهای اصلی مربوط به حد، که در کتاب‌های دبیرستانی اغلب به‌عنوان حد مجموع، حد حاصل‌ضرب و حد خارج‌قسمت داده می‌شود، آشناست. تنها نظر خواننده را به قضیه‌ای جلب می‌کنم که دربارهٔ «وجود حد» است.

اگر متغیری رو به افزایش و، به زبان ریاضی، صعودی باشد، به‌شرطی که همیشه و در هر حال، از مقدار ثابت معینی کوچکتر بماند، آن‌وقت چنین متغیری دارای حد است. به

همین ترتیب، اگر متغیری رو به کاهش داشته باشید (نزولی باشد)، ولی همواره از مقدار ثابت معینی بزرگتر بماند، آن‌وقت، چنین متغیری دارای حد است.

وقتی با تصاعد هندسی نزولی بی‌پایان و یا، در حالت کلی، با رشته‌ای بی‌پایان سروکار داریم و، آن را به‌صورت

$$u_۱ + u_۲ + u_۳ + \ldots + u_n + \ldots$$

می‌نویسیم، منظورمان چیزی جز

$$\lim_{n\to\infty}(u_۱ + u_۲ + \ldots + u_n)$$

نیست، به‌شرطی که این حد وجود داشته باشد. در حالتی که چنین حدی وجود نداشته باشد، آن‌وقت رشتهٔ

$$u_۱ + u_۲ + \ldots + u_n + \ldots$$

را واگرا (یا متباعد) گویند که، در این صورت، صحبت دربارهٔ مقدار آن، نمی‌تواند معنایی داشته باشد.

۱. فرض کنید $x_n = a^n$ و $|a| < ۱$. ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} x_n = ۰$$

۲. ثابت کنید به‌ازای هر عدد حقیقی a:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = ۰$$

۳. این حد را پیدا کنید.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_۰n^k + a_۱n^{k-۱} + \ldots + a_k}{b_۰n^h + b_۱n^{h-۱} + \ldots + b_h} (a \neq ۰,\ b_۰ \neq ۰)$$

۴. فرض کنید

$$P_n = \frac{۲^۳ - ۱}{۲^۳ + ۱} \times \frac{۳^۳ - ۱}{۳^۳ + ۱} \times \ldots \times \frac{n^۳ - ۱}{n^۳ + ۱}$$

ثابت کنید

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} P_n = \frac{۲}{۳}$$

۵. ثابت کنید: $\frac{۱}{k+۱} = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \frac{۱^k + ۲^k + \ldots + n^k}{n^{k+۱}}$ (k عددی طبیعی)

۶. ثابت کنید: $\frac{۱}{۲} = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left\{\frac{۱^k + ۲^k + \ldots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+۱}\right\}$ $(k \in \mathbf{N})$

۷. یک دنبالهٔ عددهای x_n که با این برابری تعیین می‌شود

$$x_n = \frac{x_{n-۱} + x_{n-۲}}{۳}$$

و مقدارهای $x_۰$ و $x_۱$ داده شده است. ثابت کنید

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} x_n = \frac{x_۰ + ۲x_۱}{۳}$$

۸. فرض کنید $N > ۰$. عدد مثبت دلخواه باشد. $x_۰$ را در نظر گرفته و این دنباله را تشکیل می‌دهیم:

$$x_۱ = \frac{۱}{۲}\left(x_۰ + \frac{N}{x_۰}\right)$$
$$x_۲ = \frac{۱}{۲}\left(x_۱ + \frac{N}{x_۱}\right)$$
$$x_p = \frac{۱}{۲}\left(x_{p-۱} + \frac{N}{x_{p-۱}}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ثابت کنید که $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} x_n = \sqrt{N}$.

۹. نتیجهٔ مساله قبل را برای پیدا کردن هر ریشه دلخواه یک عدد مثبت تعمیم دهید و ثابت کنید اگر داشته باشیم

$$x_۱ = \frac{m-۱}{m}x_۰ + \frac{N}{mx_۰^{n-۱}}$$

$$x_۲ = \frac{m-۱}{m}x_۱ + \frac{N}{mx_۱^{m-۱}}$$

$$x_p = \frac{m-۱}{m}x_{p-۱} + \frac{N}{mx_{p-۱}^{m-۱}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

آنگاه $\sqrt[m]{N} = \lim\limits_{n\to\infty}(ma_n)$.

۱۰. ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{۱}{n!}} = ۰$

۱۱. فرض کنید: $S_n = \sum\limits_{k=۱}^{k=n}\left(\sqrt{۱+\frac{k}{n^۲}}-۱\right)$. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

۱۲. متغیر x_n با این قانون تشکیل و تعیین می‌شود.

$$x_۰ = \sqrt{a},\ x_۱ = \sqrt{a+\sqrt{a}},$$

$$x_۲ = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ x_۳ = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}}$$

مطلوب است تعیین $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$.

۱۳. ثابت کنید متغیر

$$x_n = ۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \ldots + \frac{۱}{\sqrt{n}} - ۲\sqrt{n}$$

وقتی $n \to \infty$، دارای حد است.

۱۴. فرض کنید این دو دنباله داده شده است:

$$x_۰,\ x_۱,\ x_۲,\ \ldots$$

$$y_۰,\ y_۱,\ y_۲,\ \ldots \quad (x_۰ > y_۰ > ۰)$$

که در آن‌ها، هر جملهٔ بعدی از جملهٔ قبل، با این روش به‌دست می‌آید:

$$x_n = \frac{x_{n-۱}+y_{n-۱}}{۲},\ y_n = \sqrt{x_{n-۱}y_{n-۱}}$$

ثابت کنید x_n و y_n دارای حد هستند و، درضمن، این دو حد با هم برابرند.

۱۵. فرض کنید:

$$S_۱ = ۱ + q + q^۲ + \ldots, \ |q| < ۱$$
$$S = ۱ + Q + Q^۲ + \ldots, \ |Q| < ۱$$

مطلوب است تعیین $۱ + qQ + q^۲Q^۲ + \ldots$

۱۶. فرض کنید s مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی متناهی و $\sigma^۲$ مجموع مجذورهای این جمله‌ها باشد، نشان دهید که مجموع n جملهٔ این تصاعد برابر است با:

$$s\left\{۱ - \left[\frac{s^۲ - \sigma^۲}{s^۲ + \sigma^۲}\right]^n\right\}$$

۱۷. ثابت کنید

الف) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k x^n = ۰$ $(k \in \mathbf{N},\ |x| < ۱)$؛

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ۱$

۱۸. این مجموع‌ها را به‌دست آورید:

الف) $\dfrac{۱}{۱\times ۲} + \dfrac{۱}{۲\times ۳} + \dfrac{۱}{۳\times ۴} + \ldots + \dfrac{۱}{n(n+۱)} + \ldots$

ب) $\dfrac{۱}{۱\times ۲\times ۳} + \dfrac{۱}{۲\times ۳\times ۴} + \dfrac{۱}{۳\times ۴\times ۵} + \ldots + \dfrac{۱}{n(n+۱)(n+۲)} + \ldots$

۱۹. ثابت کنید رشتهٔ

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{n} + \ldots$$

واگرا (متباعد) است.

۲۰. ثابت کنید اگر $\alpha < ۱$، آن‌وقت این رشته واگرا است:

$$۱ + \frac{۱}{۲^\alpha} + \frac{۱}{۳^\alpha} + \frac{۱}{۴^\alpha} + \ldots + \frac{۱}{n^\alpha} + \ldots$$

۲۱. این مجموع‌ها را محاسبه کنید:

الف) $۱ + ۲x + ۳x^۲ + \ldots + nx^{n-۱} + \ldots$

ب) $۱ + ۴x + ۹x^۲ + \ldots + n^۲x^{n-۱} + \ldots$

ج) $۱ + ۲^۳x + ۳^۳x^۲ + \ldots + n^۳x^{n-۱} + \ldots \quad (|x| < ۱)$

۲۲. الف) ثابت کنید متغیر $u_n = \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n$، $(n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$ حد دارد.

ب) حد u_n را با e نشان می‌دهیم، یعنی

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n = e$$

ثابت کنید (بافرض $۰ < \theta < ۱$):

$$e = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۱ \times ۲} - \frac{۱}{۱ \times ۲ \times ۳} + \ldots + \frac{۱}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times k} + \\ + \frac{\theta}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times k \times k}$$

۲۳. فرض کنید $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$. می‌دانیم $\underset{x\to۰}{\text{حد}} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = ۱$.

ثابت کنید: $x - \sin x \leq \frac{۱}{۶}x^۳$

۲۴. الف) ثابت کنید رشتهٔ

$$\frac{a_۱}{۱۰} + \frac{a_۲}{۱۰^۲} + \frac{a_۳}{۱۰^۳} + \ldots + \frac{a_n}{۱۰^n} + \ldots \quad (۰ \leq a_i \leq \alpha)$$

رشته‌ای همگرا (متقارب) است، یعنی دارای حد است.

ب) ثابت کنید برای هر عدد حقیقی ω $(۰ < \omega < ۱)$ همواره می‌توان مقدار $a_i (۰ \leq a_i \leq ۹)$ را، به‌صورت منحصربه‌فرد پیدا کرد، به‌نحوی که

$$\omega = \frac{a_۱}{۱۰} + \frac{a_۲}{۱۰^۲} + \frac{a_۳}{۱۰^۳} + \ldots + \frac{a_n}{۱۰^n} + \ldots$$

و این به‌معنای آن است که، عدد حقیقی را می‌توان به‌صورت کسرهای دهدهی بسط داد.

ج) نشان دهید، اگر کسر دهدهی

$$\omega = \frac{a_۱}{۱۰} + \frac{a_۲}{۱۰^۲} + \frac{a_۳}{۱۰^۳} + \ldots + \frac{a_n}{۱۰^n} + \ldots$$

متناهی یا متناوب باشد (یعنی برای مثال، $a_{n+۱} = a_۱$، $a_{n+۲} = a_۲$، ...، $a_{۲n} = a_n$، ...، طوری که این تناوب n رقم دارد، $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n)، آن‌گاه ω یک عدد گویا است.

۲۵. ثابت کنید عددهایی که از رشته‌های زیر به‌دست می‌آیند، گنگ هستند:

$$\text{الف)}\ \omega = \frac{۱}{l} + \frac{۱}{l^۴} + \frac{۱}{l^۹} + \ldots + \frac{۱}{l^{n^۲}} + \ldots$$

که در آن l هر عدد طبیعی می‌تواند باشد.

$$\text{ب)}\ \omega = \frac{۱}{l} + \frac{۱}{l^{۱\times۲}} + \frac{۱}{l^{۱\times۲\times۳}} + \ldots + \frac{۱}{l^{۱\times۲\times۳\times\ldots\times n}} + \ldots$$

که در آن l هر عدد طبیعی می‌تواند باشد.

۲۶. ثابت کنید e یک عدد گنگ است (مساله ۲۲ را ببینید).

۲۷. فرض کنید:

$$\omega = \frac{۱}{l_۱} + \frac{۱}{l_۱ l_۲} + \frac{۱}{l_۱ l_۲ l_۳} + \ldots + \frac{۱}{l_۱ l_۲ \ldots l_n} + \ldots$$

که در آن $۱ \leq l_۱ \leq l_۲ \leq l_۳, \ldots$ و l_iها عددهایی درست باشند. ثابت کنید، ω گویا است، تنها به‌شرطی که از l_k به بعد (k عددی درست و مشخص) برابر با هم باشند.

۲۸. ثابت کنید متغیر

$$u_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{n} - \log n$$

دارای حد است.

۲۹. این دستور را ثابت کنید.

$$\frac{\pi}{۲} = \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲}} \cdot \sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}}} \cdot \sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}}}} \cdot \ldots}$$

پاسخ، راهنمایی، حل

فصل ۱

۱. با بسط دوطرف و مقایسهٔ آن‌ها، بی‌درنگ ثابت می‌شود.

۲. با بسط عبارت‌های درجه دوم سمت راست برابری و حذف پرانتزها، به‌آسانی دیده می‌شود که تمام مربع‌ها حذف می‌شود و به اتحاد موردنظر می‌رسیم.

۳. اگر از اتحاد مسالهٔ قبل استفاده کنیم، از شرط مساله نتیجه می‌شود:

$$(a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲)(x^۲ + y^۲ + z^۲ + t^۲) = ۰$$

که در آن یا $x^۲ + y^۲ + z^۲ + t^۲ = ۰$ یا $a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ = ۰$ است. اما مجموع مربع های عددهای حقیقی تنها وقتی برابر صفر است که هریک از عددها برابر صفر باشد. بنابراین از تساوی‌های $a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ = ۰$ و $x^۲ + y^۲ + z^۲ + t^۲ = ۰$، نتیجه می‌شود. $a = b = c = d = ۰$ و یا $x = y = z = t = ۰$.

۴. این اتحاد را می‌توان به‌طور مستقیم با بسط ثابت کرد، همچنین می‌توان آن را از مساله ۲، به‌دست آورد، هرگاه در آن قرار دهیم: $d = t = ۰$ و y را به $-y$ و z را به $-z$ تبدیل کنیم.

۵. اگر سمت راست برابری را بسط دهیم، آن‌گاه تمام مربع‌ها حذف می‌شوند و درستی اتحاد ثابت می‌شود.

۶. با قرار دادن

$$a_۱ = a_۲ = a_۳ = \ldots = a_n = ۱,\ b_۱ = a,\ b_۲ = b, \ldots$$
$$\ldots, b_{n-۱} = k, b_n = l$$

در اتحاد مساله ۵، نتیجه می‌شود:

$$n(a^۲ + b^۲ + c^۲ + \ldots + k^۲ + l^۲) = (a + b + \ldots + l)^۲ +$$
$$+(b-a)^۲ + (c-a)^۲ + \ldots + (k-l)^۲$$

اما بنابه فرض داریم:

$$n(a^۲ + b^۲ + \ldots + k^۲ + l^۲) = (a + b + \ldots + k + l)^۲$$

درنتیجه به‌دست می‌آید: $(b-a)^۲ + (c-a)^۲ + \ldots + (k-l)^۲ = ۰$ بنابراین: $a = b = c = \ldots = k = c$.

۷. با استفاده از اتحاد مساله ۵ و بنابه فرض:

$$a_۱^۲ + a_۲^۲ + \ldots + a_n^۲ = ۱,\ b_۱^۲ + b_۲^۲ + \ldots + b_n^۲ = ۱$$

بنابراین داریم:

$$(a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + \ldots + a_nb_n)^۲ = ۱ - (a_۱b_۲ - a_۲b_۱)^۲ -$$
$$-(a_۲b_۳ - a_۳b_۲)^۲ - \ldots - (a_{n-۱}b_n - a_nb_{n-۱})^۲$$

و از آنجا: $۰ \leq (a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + \ldots + a_nb_n)^۲ \leq ۱$

بنابراین: $-۱ \leq a_۱b_۱ + a_۲ + b_۲ + \ldots + a_nb_n \leq +۱$

۸. داریم.

$$(y + z - ۲x)^۲ - (y-z)^۲ + (z + x - ۲y)^۲ - (z-x)^۲ +$$
$$+(x + y - ۲z)^۲ - (x-y)^۲ = ۰$$

اما $(y+z-۲x)^۲-(y-z)^۲=۴(y-x)(z-x)$ (با استفاده از دستور تفاضل مربع‌ها).

به‌همین ترتیب به‌دست می‌آید:

$$(z+x-۲y)^۲-(z-x)^۲=۴(z-y)(x-y),$$
$$(x+y-۲z)^۲-(x-y)^۲=۴(x-z)(y-z)$$

درنتیجه:

$$۴(y-x)(z-x)+۴(z-y)(x-y)+۴(x-z)(y-z)=۰$$

با بسط و حذف پرانتزها، داریم:

$$۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲-۲xz-۲yz-۲xy=۰$$

یا $(x-y)^۲+(x-z)^۲+(y-z)^۲=۰$ و از آنجا: $x=y=z=۰$.

۹. اثبات اتحاد اول به‌سادگی انجام می‌شود.

اتحاد دوم را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۶a^۲-۴ab+۴b^۲)^۳-(۴a^۲-۴ab+۶b^۲)^۳=$$
$$=(۳a^۲+۵ab-۵b^۲)^۳+(۵a^۲-۵ab=۳b^۲)^۳$$

با استفاده از دستور تفاضل مکعب‌ها در سمت چپ برابری و دستور مجموع مکعب‌ها در سمت راست برابری، نتیجه می‌گیریم که این عمل‌ها برای اثبات اتحاد کافی است.

$$(۳a^۲-۲ab+۲b^۲)^۲+(۳a^۲-۲ab+۲b^۲)(۲a^۲-۲ab+۳b^۲)+$$
$$(۲a^۲-۲ab+۳b^۲)^۲=(۵a^۲-۵ab-۳b^۲)^۲-$$
$$-(۵a^۲-۵ab-۳b^۲)(۳a^۲+۵ab-۵b^۲)+$$
$$+(۳a^۲+۵ab-۵b^۲)^۲$$

این اتحاد را می‌توان به‌طور مستقیم با بسط و حذف پرانتزها ثابت کرد.

۱۰. برای اثبات درستی این اتحاد، آن را به این‌صورت می‌نویسیم:

$$(p^۲ - q^۲)^۴ = (p^۲ + pq + q^۲)^۴ - (۲pq + q^۲)^۴ +$$
$$+(p^۲ + pq + q^۲)^۴ - (۲pq + p^۲)^۴$$

عبارت سمت راست برابری را ساده و ثابت می‌کنیم، با سمت چپ برابری، یکی است.
با استفاده از دستور $A^۴ - B^۴ = (A + B)(A - B)(A^۲ + B^۲)$، برای سمت راست برابری، به این عبارت می‌رسیم:

$$(p^۳ + ۳pq + ۲q^۲)(p^۲ - pq)[(p^۲ + pq + q^۲)^۲ +$$
$$+(۲pq + q^۲)^۲] + (۲p^۲ + ۳pq + q^۲)(q^۲ - pq) \times$$
$$\times[(p^۲ + pq + q^۲)^۲ + (۲pq + p^۲)^۲] = (p + ۲q) \times$$
$$\times p(p^۲ - q^۲)[(p^۲ + pq + q^۲)^۲ + (۲pq + q^۲)^۲] +$$
$$+(۲p + q)q(q^۲ - p^۲)[(p^۲ + pq + q^۲)^۲ +$$
$$+(۲pq + p^۲)^۲] = (p^۲ - q^۲)\{(p^۲ + pq + q^۲)^۲ \times$$
$$\times[p^۲ + ۲pq^۲ - ۲pq - q^۲] + (p^۲ + ۲pq)(q^۲ + ۲pq) \times$$
$$\times[۲pq + q^۲ - ۲pq - p^۲]\} = (p^۲ - q^۲)^۲\{(p^۲ + pq + q^۲)^۲ -$$
$$-(p^۲ + ۲pq)(q^۲ + ۲pq)\} = (p^۲ - q^۲)^۴$$

۱۱. با جای‌گذاری و بسط عبارت‌ها، ثابت می‌شود.
۱۲. با جای‌گذاری و بسط عبارت‌ها، ثابت می‌شود.
۱۳. الف) در حالت‌هایی که n برابر ۰، ۱ یا ۲ باشد، به‌سادگی و به‌طور مستقیم ثابت می‌شود. به‌ازای $n = ۴$، اتحاد را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$(ix - ky)^۴ - (ix - kz)^۴ + (iy - kz)^۴ - (iy - kx)^۴ +$$
$$+(iz - kx)^۴ - (iz - ky)^۴ = ۰$$

دو عبارت اول را به این صورت تبدیل می‌کنیم:

$$(ix - ky)^۴ - (ix - kz)^۴ = [(ix - ky)^۲ + (ix - kz)^۲] \times$$
$$\times(۲ix - ky - kz)k(z - y) \qquad (۱)$$

باتوجه به برابری $x+y+z=0$، داریم

$$2ix-ky-kz=(2i+k)x$$

عبارت داخل کروشه را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$(2i^2+2ik)x^2+k^2(y^2+z^2)$$

بنابراین، داریم:

$$(ix-ky)^4-(ix-kz)^4=k(2i+k)(y^2-z^2)\times$$
$$\times[(2i^2+2ik)x^2+k^2(y^2+z^2)] \qquad (1')$$

اکنون، تنها باید این دو عبارت را تبدیل کنیم:

$$(iy-kz)^4-(iy-kx)^4 \qquad (2)$$
$$(iz-kx)^4-(iz-ky)^4 \qquad (3)$$

اما به‌سادگی دیده می‌شود که عبارت (۲) از عبارت اول نتیجه می‌شود، که با جای‌گشت دوری حرف‌های x، y و z، یعنی وقتی x به y، y به z و z به x تبدیل می‌شود، که پیش از این بررسی کرده‌ایم. عبارت (۳) از (۲) و آن هم از راه چنین جای‌گشتی به‌دست می‌آید. به‌جز این، احتیاجی به تکرار محاسبه‌ها برای ساده کردن عبارت‌های (۲) و (۳) وجود ندارد. تنها کافی است با جای‌گشت مناسب به نتیجه مطلوب دست یابیم. آن‌گاه داریم:

$$(iy-kz)^4-(iy-kx)^4=k(2i+k)(z^2-x^2)\times$$
$$\times[(2i^2+2ik)y^2+k^2(z^2+x^2)] \qquad (2')$$
$$(iz-kx)^4-(iz-ky)^4=k(2i+k)(x^2-y^2)\times$$
$$\times[(2i^2+2ik)z^2+k^2(x^2+y^2)] \qquad (3')$$

و با جمع عبارت‌های $(1')$، $(2')$ و $(3')$، نتیجه می‌گیریم:

$$k(2i+k)\{(2i^2+2ik)[(y^2-z^2)x^2+(z^2-x^2)y^2+$$
$$+(x^2-y^2)z^2]+k^2(y^4-z^4+z^4-x^4+x^4-y^4)\}=0$$

ب) بهازای $n=\text{۰}$ رابطه برقرار است. برای سادگی کار، مجموع سمت چپ برابری را بهاین صورت نمایش میدهیم:

$$\sum(x+k)^n$$

و مجموع سمت راست برابری را با

$$\sum(x+l)^n$$

بهازای $n=\text{۱}$، باید ثابت کنیم:

$$\text{۸}x+\sum k=\text{۸}x+\sum l,$$

یعنی باید ثابت کنیم:

$$\sum k=\sum l$$

سرانجام، با بررسی ثابت میکنیم: $\sum k=\sum l$ اما

$$\sum k=\text{۳}+\text{۵}+\text{۶}+\text{۹}+\text{۱۰}+\text{۱۲}+\text{۱۵}=\text{۶۰},$$
$$\sum l=\text{۱}+\text{۲}+\text{۴}+\text{۶}+\text{۷}+\text{۸}+\text{۱۱}+\text{۱۳}+\text{۱۴}=\text{۶۰}$$

بهازای $n=\text{۲}$، باید ثابت کنیم که:

$$\sum(x+k)^{\text{۲}}=\sum(x+l)^{\text{۲}}$$

یعنی

$$\text{۸}x^{\text{۲}}+\text{۲}x\sum k+\sum k^{\text{۲}}=\text{۸}x^{\text{۲}}+\text{۲}x\sum l+\sum l^{\text{۲}}$$

و بهاین ترتیب، باقی میماند اثبات اینکه:

$$\sum k^{\text{۲}}=\sum l^{\text{۲}}$$

که بهسادگی و بهطور مستقیم ثابت میشود.

به همین ترتیب، برای اثبات حالت آخر ($n=\text{۳}$)، تنها باید ثابت کنیم که:

$$\sum k^{\text{۳}}=\sum l^{\text{۳}}$$

۱۴. اتحاد اول به‌روش زیر ثابت می‌شود:

$$(a+b+c+d)^۲+(a+b-c-d)^۲+(a+c-b-d)^۲+$$
$$+(a+d-b-c)^۲=[(a+b)+(c+d)]^۲+[(a+b)-(c+d)]^۲+$$
$$+[(a-b)+(c-d)]^۲+[(a-b)-(c-d)]^۲=$$
$$=۲(a+b)^۲+۲(c+d)^۲+۲(a-b)^۲+۲(c-d)^۲=$$
$$=۲[(a+b)^۲+(a-b)^۲]+۲[(c+d)^۲+(c-d)^۲]=۴(a^۲+b^۲+c^۲+d^۲)$$

اتحادهای دوم و سوم نیز، به‌طور مستقیم و با چند تبدیل مقدماتی ثابت می‌شود.

۱۵. برابری را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$[(a+b+c)^۴-(a^۴+b^۴+c^۴)]+[(b+c-a)^۴-$$
$$-(a^۴+b^۴+c^۴)]+[(c+a-b)^۴-(a^۴+b^۴+c^۴)]+$$
$$+[(a+b-c)^۴-(a^۴+b^۴+c^۴)]=۲۴(a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲)$$

با بررسی عبارت اول داریم:

$$(a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲ac+۲bc)^۲-a^۴-b^۴-c^۴=$$
$$=۶a^۲b^۲+۶a^۲c^۲+۶b^۲c^۲+۴ac(a^۲+c^۲)+۴ab(a^۲+b^۲)+$$
$$+۴bc(b^۲+c^۲)+۱۲a^۲bc+۱۲b^۲ac+۱۲c^۲ab$$

بقیهٔ جمله‌ها، از جملهٔ اول و با جای‌گزینی‌های متوالی $-a$ به‌جای a، $-b$ به‌جای b، $-c$ به‌جای c به‌دست می‌آید. با جمع جمله‌ها، ثابت می‌شود که اتحاد برقرار است.

۱۶. داریم:

$$s(s-۲b)(s-۲c)+s(s-۲c)(s-۲a)+s(s-۲a)\times$$
$$\times(s-۲b)=(s-۲a)(s-۲b)(s-۲c)+۲a(s-۲b)\times$$
$$\times(s-۲c)+s(s-۲a)(۲s-۲c-۲b)=(s-۲a)\times$$
$$\times(s-۲b)(s-۲c)+۲a(s-۲b)(s-۲c)+s(s-۲a)۲a$$

با تبدیل مجموع به‌دست می‌آید:

$$۲a(s-۲b)(s-۲c)+s(s-۲a)۲a = ۲a[(s-۲b)\times$$
$$\times(s-۲c)+s(s-۲a)] = ۲a[(s-۲b)(s-۲c)+(s-۲a)\times$$
$$\times(s-۲b)+۲b(s-۲a)] = ۲a[(s-۲b)(۲s-۲c-۲a)+$$
$$+۲b(s-۲a)] = ۲a[(s-۲b)۲b+۲b(s-۲a)] =$$
$$= ۲a\cdot ۲b[s-۲b-۲a] = ۴ab\cdot ۲c = ۸abc$$

۱۷. عبارت سمت چپ برابری را برحسب توان‌های s بسط می‌دهیم:

$$(a+b+c)s^۲ - ۲s(a^۲+b^۲+c^۲)+a^۳+b^۳+c^۳+$$
$$+۲s^۳-۲s^۲(a+b+c)+۲s(ab+ac+bc)-۲abc$$

از آنجاکه $a+b+c=۲s$:

$$۲s^۳-۲s(a^۲+b^۲+c^۲)+a^۳+b^۳+c^۳+۲s^۳-۴s^۳+$$
$$+۲s(ab+ac+bc)-۲abc = -۲s(a^۲+b^۲+c^۲)+$$
$$+a^۳+b^۳+c^۳+۲s(ab+ac+bc)-۲abc =$$
$$= a^۳+b^۳+c^۳+(a+b+c)(ab+ac+bc-a^۲-b^۲-c^۲)-۲abc$$

با تبدیل مستقیم عبارت آخر، ثابت می‌شود که برابر abc است. (مساله ۲۰ را نیز ببینید.)

۱۸. داریم:

$$(۲\sigma^۲-۲a^۲)(۲\sigma^۲-۲b^۲) = (a^۲+c^۲-b^۲)(b^۲+c^۲-a^۲) =$$
$$= c^۴-(a^۲-b^۲)^۲$$

با استفاده از تبدیل دوری، به‌دست می‌آید:

$$(۲\sigma^۲-۲b^۲)(۲\sigma^۲-۲c^۲) = a^۴-(b^۲-c^۲)^۲,$$
$$(۲\sigma^۲-۲c^۲)(۲\sigma^۲-۲a^۲) = b^۴-(c^۲-a^۲)^۲$$

از این‌رو

$$4[(\sigma^2-a^2)(\sigma^2-b^2)+(\sigma^2-b^2)(\sigma^2-c^2)+(\sigma^2-c^2)\times$$
$$\times(\sigma^2-a^2)]=a^4+b^4+c^4-(a^2-b^2)-(b^2-c^2)^2-$$
$$-(c^2-a^2)^2=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2=$$
$$=-[a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2]=-[a^4-2(b^2-c^2)a^2+$$
$$+(b^2-c^2)^2-4a^2c^2]=4a^2c^2-(a^2-b^2+c^2)^2=(2ac+a^2-$$
$$-b^2+c^2)(2ac-a^2+b^2-c^2)=(a+b+c)(a+c-b)\times$$
$$\times(b-a+c)(b+a-c)$$

اما

$$a+b+c=2s,\ a+b-c=2(s-c),\ a+c-b=2(s-b),\ b+c-a=2(s-a)$$

و ملاحظه می‌کنید که اتحاد برقرار است.

۱۹. داریم:

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3y^2(x+z)+$$
$$+3z^2(x+y)+6xyz$$

بنابراین

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3\{x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+$$
$$+z^2x+z^2y+2xyz\}=3\{z(x^2+y^2+2xy)+z^2(x+y)+$$
$$xy(x+y)\}=3(x+y)\{z(x+y)+z^2+xy\}=$$
$$=3(x+y)(x+z)(z+y)$$

درنتیجه:

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(x+z)(y+z)$$

۲۰. داریم

$$(x+y+z)^{۳} = x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}+۳xy(x+y+z)+$$
$$+۳xz(x+y+z)+۳yz(x+y+z)-۳xyz$$

درنتیجه

$$x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}-۳xyz = (x+y+z)^{۳}-۳(x+y+z)\times$$
$$(xy+xz+yz) = (x+y+z)(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-xy-xz-yz)$$

۲۱. قرار دهید $a+b-c=x$، $b+c-a=y$، $c+a-b=z$، به‌سادگی دیده می‌شود که $x+y+z=a+b+c$ و درنتیجه، باید این عبارت را ساده کنیم:

$$(x+y+z)^{۳}-x^{۳}-y^{۳}-z^{۳}$$

باتوجه به مساله ۱۹، داریم:

$$(x+y+z)^{۳}-x^{۳}-y^{۳}-z^{۳} = ۳(x+y)(x+z)(y+z)$$

اما $x+y=۲b$، $x+z=۲a$، $y+z=۲c$، بنابراین:

$$(a+b+c)^{۳}-(a+b-c)^{۳}-(b+c-a)^{۳}-(c+a-b)^{۳} = ۲۴abc$$

۲۲. باتوجه به مساله ۱۹، داریم:

$$x^{۳}+y^{۳}+z^{۳} = (x+y+z)^{۳}-۳(x+y)(x+z)(y+z)$$

در این‌جا قرار دهید: $x=b-c$ و $y=c-a$ و $z=a-b$ نتیجه می‌شود:

$$x+y+z=۰,\ x+y=b-a,\ x+z=a-c,\ y+z=c-b$$

بنابراین:

$$(b-c)^{۳}+(c-a)^{۳}+(a-b)^{۳} = ۳(a-b)(a-c)(c-b)$$

۲۳. به‌سادگی از مساله ۲۰ نتیجه می‌شود. اما می‌توان از روش دیگری استفاده کرد.

$$(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲)=۰$$

از آنجاکه

$$a+b+c=۰$$

بنابراین

$$a^۳+b^۳+c^۳+ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)=۰$$

اما: $a+b=-c,\ a+c=-b,\ b+c=-a$

اکنون اتحاد مورد نظر به‌سادگی نتیجه می‌شود.

۲۴. داریم:

$$(a+b+c)^۲=۰,\quad a^۲+b^۲+c^۲=-۲(ab+ac+bc)$$

دو طرف برابری اخیر را به توان دو می‌رسانیم، نتیجه می‌شود؛

$$(a^۲+b^۲+c^۲)^۲=۴[a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲+۲a^۲bc+$$
$$+۲b^۲ac+۲c^۲ab]=۴[a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲+۲abc(a+$$
$$+b+c)]=۴[a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲]$$

از طرف دیگر

$$(a^۲+b^۲+c^۲)^۲=a^۴+b^۴+c^۴+۲(a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲)$$

پس:

$$۴(a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲)=۲(a^۲+b^۲+c^۲)^۲-۲(a^۴+b^۴+c^۴)$$

با مقایسه آن با برابری

$$۴(a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲)=(a^۲+b^۲+c^۲)^۲$$

نتیجه لازم به‌دست می‌آید.

۲۵. از آن‌جاکه

$$(a-b)+(b-c)+(c-a)=۰$$

بلافاصله از مساله ۲۴، جواب نتیجه می‌شود.

۲۶. الف) داریم (مساله ۲۳ را ببینید):

$$a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$$

و از آن‌جا:

$$(a^۳+b^۳+c^۳)(a^۲+b^۲+c^۲)=۳abc(a^۲+b^۲+c^۲)$$

آن‌گاه ، با تبدیل سمت چپ برابری، به‌دست می‌آید:

$$a^۵+b^۵+c^۵+a^۲b^۲(a+b)+a^۲c^۲(a+c)+b^۲c^۲(b+c)=$$
$$=۳abc(a^۲+b^۲+c^۲),$$

یا

$$a^۵+b^۵+c^۵-a^۲b^۲c-a^۲c^۲b-b^۲c^۲a=۳abc(a^۲+b^۲+c^۲)$$

از این‌رو

$$a^۵+b^۵+c^۵-abc(ab+ac+bc)=۳abc(a^۲+b^۲+c^۲)$$

اما: $-۲(ab+ac+bc)=a^۲+b^۲+c^۲$

به‌این ترتیب، نتیجهٔ نهایی به‌دست می‌آید.

ب) جواب بلافاصله از مساله ۲۳ و بخش الف مساله ۲۶ به‌دست می‌آید.

ج) رابطه‌ها را به‌این صورت می‌نویسیم:

$۲(a^۴+b^۴+c^۴)=(a^۲+b^۲+c^۲)^۲$ (مساله ۲۴)

$a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$ (مساله ۲۳)

با ضرب این برابری‌ها در هم، نتیجه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&۲[a^۷ + b^۷ + c^۷ + a^۳b^۳(a + b) + a^۳c^۳(a + c) + \\
&+b^۳c^۳(b + c)] = ۳abc(a^۲ + b^۲ + c^۲)^۲
\end{aligned}
$$

از این‌رو

$$
\begin{aligned}
&۲[a^۷ + b^۷ + c^۷ - a^۳b^۳c - a^۳c^۳b - b^۳c^۳a] = \\
&= ۳abc(a^۲ + b^۲ + c^۲)^۲
\end{aligned}
$$

یا

$$
\begin{aligned}
&۲(a^۷ + b^۷ + c^۷) - ۲abc(a^۲b^۲ + a^۲c^۲ + b^۲c^۲) = \\
&= ۳abc(a^۲ + b^۲ + c^۲)^۲
\end{aligned}
$$

ازطرف دیگر داریم:

$a^۲b^۲ + a^۲c^۲ + b^۲c^۲ = \frac{۱}{۴}(a^۲ + b^۲ + c^۲)^۲$ (مساله ۲۴)

بنابراین: $۲(a^۷ + b^۷ + c^۷) = \frac{۷}{۲}abc(a^۲ + b^۲ + c^۲)^۲$

با استفاده از نتیجهٔ الف مسالهٔ ۲۶، سرانجام به رابطهٔ لازم دست می‌یابیم.

۲۷. برای سادگی عمل‌ها، از نماد جمع استفاده می‌کنیم. از این‌رو، قرار می‌دهیم:

$$\alpha_۱ + \alpha_۲ + \ldots + \alpha_n = \sum_{k=۱}^{k=n} \alpha_k$$

با استفاده از این نماد، می‌توانیم بنویسیم:

$$a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + \ldots + a_nb_n = \sum_{k=۱}^{k=n} a_kb_k = a_۱b_۱ + \sum_{k=۲}^{k=n} a_kb_k$$

اما روشن است که

$$b_k = (b_۱ + b_۲ + \ldots + b_k) - (b_۱ + b_۲ + \ldots + b_{k-۱}) = s_k - s_{k-۱}$$

بنابراین، مجموع به‌این صورت درمی‌آید:

$$a_1b_1+\sum_{k=2}^{k=n}a_k(s_k-s_{k-1})=a_1b_1+\sum_{k=2}^{k=n-1}a_ks_k-$$
$$-\sum_{k=3}^{k=n}a_ks_{k-1}+a_ns_n-a_2s_1=(a_1-a_2)s_1+a_ns_n+$$
$$+\sum_{k=2}^{k=n-1}a_ks_k-\sum_{k=2}^{k=n-1}a_{k+1}s_k=(a_1-a_2)s_1+$$
$$+\sum_{k=2}^{k=n-1}(a_k-a_{k+1})s_k+a_ns_n=(a_1-a_2)s_1+(a_2-a_3)s_2+$$
$$+\ldots+(a_{n-1}-a_n)s_{n-1}+a_ns_n$$

۲۸. اگر پرانتزها را در سمت چپ برابری حذف کنیم و از رابطهٔ زیر استفاده کنیم، اثبات به‌آسانی انجام می‌شود:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{n}{2}\cdot s$$

۲۹. اگر به‌جای x و y، عبارت داده شده را برحسب x' و y' بنویسیم، نتیجه می‌شود:

$$A'=A\alpha^2+2B\alpha\gamma+C\gamma^2,$$
$$C'=A\beta^2+2B\beta\delta+C\delta^2,$$
$$B'=A\alpha\beta+B(\alpha\delta+\beta\gamma)+C\gamma\delta$$

با تشکیل عبارت $B'^2-A'C'$، به‌سادگی اتحاد موردنظر نتیجه می‌شود.

۳۰. داریم:

$$\sum_{i=1}^{i=n}p_iqi=\sum_{i=1}^{i=k}p_i(1-p_i)=\sum_{i=1}^{i=n}p_i-$$
$$-\sum_{i=1}^{i=n}p_i^2=np-\sum_{i=1}^{i=n}p_i^2,$$

زیرا $np = p_۱ + p_۲ + \ldots + p_n$. علاوه براین:

$$\sum_{i=۱}^{i=n} p_i qi = np - \sum_{i=۱}^{i=n}(p_i - p + p)^۲ = p - \sum_{i=۱}^{i=n}[(p_i - p)^۲ +$$

$$۲pp_۱ - p^۲] = np - \sum_{i=۱}^{i=n}(p_i - p)^۲ - ۲p\sum_{i=۱}^{i=n} p_i + np^۲ =$$

$$= np - \sum_{i=۱}^{i=n}(p_i - p)^۲ - np^۲$$

اما $np - np^۲ = np(۱ - p) = npq$، بنابراین، نتیجه می‌گیریم:

$$p_۱q_۱ + p_۲q_۲ + \ldots + p_nq_n = npq - (p_۱ - p)^۲ -$$
$$-(p_۲ - p)^۲ - \ldots - (p_n - p)^۲$$

۳۱. درواقع

$$\frac{۱}{۱} \cdot \frac{۱}{۲n - ۱} + \frac{۱}{۳} \cdot \frac{۱}{۲n - ۳} + \ldots + \frac{۱}{۲n - ۱} \cdot \frac{۱}{۱} =$$
$$= \frac{۱}{۲n}\left\{\frac{(۲n - ۱) + ۱}{۱ \times (۲n - ۱)} + \frac{(۲n - ۳) + ۳}{۳(۲n - ۳)} + \ldots + \frac{۱ + (۲n - ۱)}{(۲n - ۱) \cdot ۱}\right\} =$$
$$= \frac{۱}{۲n}\left\{\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲n - ۱} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲n - ۳} + \ldots + \frac{۱}{۲n - ۱} + \frac{۱}{۱}\right\} =$$
$$= \frac{۱}{n}\left(۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \ldots + \frac{۱}{۲n - ۱}\right)$$

۳۲. الف) روشن است که

$$s_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{n} = n\left[(۱ - ۱) + \left(\frac{۱}{۲} - ۱\right) + \left(\frac{۱}{۳} - ۱\right) +\right.$$
$$\left.+ \ldots + \left(\frac{۱}{n} - ۱\right)\right] = n - \left[\frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۳} + \ldots + \frac{n - ۱}{n}\right]$$

ب)

$$s_n = \sum_{k=۱}^{k=n} \frac{۱}{k},\ ns_n = \sum_{k=۱}^{k=n} \frac{n - k + k}{k} = \sum_{k=۱}^{k=n}\left(\frac{n - k}{\kappa} + ۱\right)$$

از این‌رو

$$ns_n = n + \left(\frac{n-۱}{۱} + \frac{n-۲}{۲} + \ldots + \frac{۱}{n-۱}\right)$$

۳۳. عبارت زیر را به سمت چپ برابری اضافه و از آن کم می‌کنیم:

$$۲\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} + \ldots + \frac{۱}{۲n}\right)$$

نتیجه می‌گیریم:

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \ldots + \frac{۱}{۲n-۱} - \frac{۱}{۲n} =$$
$$= \left(۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \ldots + \frac{۱}{۲n-۱}\right) - \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \ldots + \frac{۱}{۲n}\right) =$$
$$= \left(۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \ldots + \frac{۱}{۲n-۱}\right) + \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \ldots + \frac{۱}{۲n}\right) -$$
$$-۲\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \ldots + \frac{۱}{۲n}\right) = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \ldots + \frac{۱}{۲n-۱} + \frac{۱}{۲n} -$$
$$-\left(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{n}\right) = \frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \ldots + \frac{۱}{۲n}$$

۳۴. داریم:

$$\left(۱ + \frac{۱}{\alpha-۱}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۲\alpha-۱}\right)\left(۱ + \frac{۱}{۳\alpha-۱}\right)\ldots\left(۱ + \frac{۱}{(۲n-۱)\alpha-۱}\right) \times$$
$$\times\left(۱ - \frac{۱}{۲n\alpha-۱}\right) = \frac{\alpha(۲\alpha-۲)\cdot ۳\alpha\ldots(۲n-۱)\alpha(۲n\alpha-۲)}{(\alpha-۱)(۲\alpha-۱)(۳\alpha-۱)\ldots(۲n\alpha-۱)} =$$
$$= \frac{۱\cdot\alpha\cdot ۳\alpha\cdot ۵\cdot\alpha\ldots(۲n-۱)\alpha(۲n\alpha-۲)(۴\alpha-۲)\ldots(۲n\alpha-۲)}{(\alpha-۱)(۲\alpha-۱)\ldots(n\alpha-۱)[(n+۱)\alpha-۱][(n+۲)\alpha-۱]\ldots[(n+n)\alpha-۱]}$$
$$= \frac{۱\times\alpha\times ۳\times\alpha\times ۵\alpha\ldots(۲n-۱)\alpha(\alpha-۱)(۲\alpha-۱)\ldots(n\alpha-۱)}{[(n+۱)\alpha-۱]\ldots[(n+n)\alpha-۱](\alpha-۱)(۲\alpha-۱)\ldots(n\alpha-۱)} \times ۲^n =$$
$$= \frac{۱\times\alpha\times ۳\times\alpha\times ۵\times\alpha\ldots(۲n-۱)\cdot\alpha}{[(n+۱)\alpha-۱]\ldots[(n+n)\alpha-۱]}\cdot ۲^n$$

اما:

$$۱\cdot ۳\cdot ۵\ldots(۲n-۱)\cdot ۲^n = \frac{۱\cdot ۲\cdot ۳\cdot ۴\cdot ۵\ldots ۲n}{۲\cdot ۴\cdot ۶\ldots ۲n}\cdot ۲^n =$$

$$= \frac{۱ \cdot ۲ \cdot ۳ \cdot ۴ \cdot ۵ \dots ۲n}{۱ \cdot ۲ \cdot ۳ \dots n} = (n+۱)(n+۲)\dots ۲n,$$

که از آن، اتحاد لازم نتیجه می‌شود.

۳۵. فرض کنید $a \leq x < a + ۱$، که در آن، a یک عدد درست است. فاصله بین a و $a + ۱$ را به n بخش تقسیم می‌کنیم. آن‌گاه x در یکی از این فاصله‌ها قرار دارد، یعنی می‌توان یک عدد حسابی $p(۰ \leq p < n - ۱)$ به‌گونه‌ای پیدا کرد که داشته باشیم:

$$a + \frac{p}{n} \leq x < a + \frac{p+۱}{n}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
&a + \frac{p+۱}{n} \leq x + \frac{۱}{n} < a + \frac{p+۲}{n}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a + ۱ - \frac{۱}{n} \leq x + \frac{n-p-۱}{n} < a + ۱ + \frac{۱}{n}\\
&a + ۱ \leq x + \frac{n-p}{n} < a + ۱ + \frac{۱}{n}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a + \frac{p+n-۱}{n} \leq x + \frac{n-۱}{n} < a + \frac{p+n}{n}
\end{aligned}$$

از این‌رو

$$[x] = \left[x + \frac{۱}{n}\right] = \dots = \left[x + \frac{n-p-۱}{n}\right] = a$$
$$\left[x + \frac{n-p}{n}\right] = \dots = \left[x + \frac{n-۱}{n}\right] = a + ۱$$

درنتیجه

$$[x] + \left[x + \frac{۱}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-۱}{n}\right] =$$
$$= (n-p)a + p(a+۱) = an + p$$

از طرف دیگر، از نابرابری:

$$a+\frac{p}{n}\leq x<a+\frac{p+۱}{n}$$

نتیجه می‌گیریم

$$an+p\leq nx<an+p+۱$$

و از این‌رو $[nx]=an+p$

۳۶. داریم:

$$\cos(a+b)\cos(a-b)=[\cos a\cos b-\sin a\sin b]\times$$
$$\times[\cos a\cos b+\sin a\sin b]=\cos^۲ a\cos^۲ b-\sin^۲ a\sin^۲ b=$$
$$=\cos^۲ a(۱-\sin^۲ b)-(۱-\cos^۲ a)\sin^۲ b=\cos^۲ a-\sin^۲ b$$

۳۷. با بسط عبارت داخل پرانتز در سمت چپ برابری، تساوی به‌سادگی ثابت می‌شود.

۳۸. داریم:

$$(۱-\sin a)(۱-\sin b)(۱-\sin c)=\frac{(۱-\sin^۲ a)(۱-\sin^۲ b)(۱-\sin^۲ c)}{(۱+\sin a)(۱+\sin b)(۱+\sin c)}$$
$$=\frac{\cos^۲ a\cos^۲ b\cos^۲ c}{\cos a\cos b\cos c}=\cos a\cos b\cos c$$

۳۹. با ضرب دو طرف برابری در

$$(۱+\cos\alpha)(۱+\cos\beta)(۱+\cos\gamma)$$

نتیجه می‌گیریم:

$$[(۱+\cos\alpha)(۱+\cos\beta)(۱+\cos\gamma)]^۲=\sin^۲\alpha\sin^۲\beta\sin^۲\gamma$$

۴۰. با استفاده از دستور

$$\sin x\cos y=\frac{۱}{۲}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$$

به‌دست می‌آوریم:

$$۲\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin ۲\alpha-\sin ۲\beta,$$
$$۲\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)=\sin ۲\beta-\sin ۲\gamma$$

و به‌همین ترتیب تا آخر، از این‌جا اتحاد نتیجه می‌شود.

۴۱. با استفاده از دستور

$$\sin x\sin y=\frac{۱}{۲}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$$

اتحاد زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$(\cos ۲b-\cos ۲a)(\cos ۲d-\cos ۲c)+(\cos ۲b-\cos ۲c)\times$$
$$\times(\cos ۲a-\cos ۲d)+(\cos ۲b-\cos ۲d)(\cos ۲c-\cos ۲a)=۰$$

فرض کنید $\cos ۲b=\alpha$ و $\cos ۲a=\beta$ و $\cos ۲d=\gamma$ و $\cos ۲c=\delta$ در این‌صورت

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)=$$
$$=(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\gamma+\gamma-\delta)(\beta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)=$$
$$=(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)+(\gamma-\delta)(\beta-\gamma)+(\alpha-\gamma)\times(\delta-\beta)=۰$$

اما

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\gamma-\delta)(\beta-\gamma)=(\gamma-\delta)(\alpha-\gamma)$$

و

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)=(\alpha-\gamma)(\delta-\gamma)$$

از این‌رو مجموع موردنظر برابر است با

$$(\alpha-\gamma)(r-\delta)+(\alpha-\gamma)(\delta-\gamma)=۰$$

۴۲. الف) با جمع دو عبارت کسینوسی اول، به‌دست می‌آوریم $۲\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma$. ادامه کار ساده و روشن است.

ب) شبیه بخش الف حل می‌شود.

۴۳. داریم:

$$\sin\left(A+\frac{B}{۴}\right)+\cos\left(A+\frac{B}{۴}\right)=\sin\left(A+\frac{B}{۴}\right)+$$
$$+\sin\left(\frac{\pi}{۲}-A-\frac{B}{۴}\right)=۲\sin\frac{\pi}{۴}\cos\left(\frac{\pi}{۴}-A-\frac{B}{۴}\right)$$

با استفاده از تبدیل دوری (با نشان دادن مجموع با S) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{S}{\sqrt{۲}}=\cos\left(\frac{\pi}{۴}-A-\frac{B}{۴}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{۴}-B-\frac{C}{۴}\right)+$$
$$+\cos\left(\frac{\pi}{۴}-C-\frac{A}{۴}\right)=۲\cos\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{A+B}{۲}-\frac{B+C}{۸}\right)\times$$
$$\times\cos\left(\frac{A-B}{۲}+\frac{B+C}{۸}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{۴}+C+\frac{A}{۴}\right)$$

با استفاده از شرط $A+B+C=\pi$، می‌توان نشان داد:

$$\cos\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{A+B}{۲}-\frac{B+C}{۸}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{۸}+\frac{C}{۲}+\frac{A}{۸}\right)$$

بنابراین داریم:

$$\frac{S}{\sqrt{۲}}\left(\frac{\pi}{۸}+\frac{C}{۲}+\frac{A}{۸}\right)\cos\left(\frac{A-B}{۲}+\frac{B-C}{۸}\right)+۲\sin\left(\frac{\pi}{۸}+\frac{C}{۲}+\frac{A}{۸}\right)\times$$
$$\times\cos\left(\frac{\pi}{۸}+\frac{C}{۲}+\frac{A}{۸}\right)=۲\sin\left(\frac{\pi}{۸}+\frac{C}{۲}+\frac{A}{۸}\right)\left[\cos\left(\frac{A-B}{۲}+\frac{B-C}{۲}\right)\right.$$
$$\left.+\cos\left(\frac{\pi}{۸}+\frac{C}{۲}+\frac{A}{۸}\right)\right]=۴\sin\left(\frac{\pi}{۸}+\frac{A}{۲}+\frac{B}{۸}\right)\sin\left(\frac{\pi}{۸}+\frac{B}{۲}+\frac{C}{۸}\right)\times$$
$$\times\sin\left(\frac{\pi}{۸}+\frac{C}{۲}+\frac{A}{۸}\right)$$

۴۴. با انجام چند تبدیل مشابه مساله قبل به این نتیجه می‌رسیم که

$$\sin\frac{A}{۴}+\sin\frac{B}{۴}+\sin\frac{C}{۴}+\cos\frac{A}{۴}+\cos\frac{B}{۴}+\cos\frac{C}{۴}=$$
$$=۴\sqrt{۲}\cos\left(\frac{\pi}{۸}+\frac{C}{۸}\right)\cos\left(\frac{\pi}{۸}+\frac{B}{۸}\right)\cos\left(\frac{\pi}{۸}+\frac{A}{۸}\right)$$

۴۵. داریم:

$$\sin ۲a = ۲\sin a \cos a$$
$$\sin ۴a = ۲\sin ۲a \cos ۲a$$
$$\sin ۸a = ۲\sin ۴a \cos ۴a$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin(۲^n \times a) = ۲\sin ۲^{n-۱}a \cos ۲^{n-۱}a$$

با ضرب جمله به جمله و تقسیم دو طرف بر حاصل‌ضرب

$$\sin ۲a \sin ۴a \ldots \sin ۲^{n-۱}a$$

به‌دست می‌آید:

$$\sin ۲^n a = ۲^n \sin a \cos a \cos ۲a \ldots \cos ۲^{n-۱}a$$

از آنجا:

$$\cos a \cos ۲a \ldots \cos ۲^{n-۱}a = \frac{\sin ۲^n a}{۲^n \sin a}$$

۴۶. داریم:

$$\sin\frac{۲\pi}{۱۵} = ۲\sin\frac{\pi}{۱۵}\cos\frac{\pi}{۱۵}, \quad \sin\frac{۴\pi}{۱۵} = ۲\sin\frac{۲\pi}{۱۵}\cos\frac{۲\pi}{۱۵}$$
$$\sin\frac{۸\pi}{۱۵} = ۲\sin\frac{۴\pi}{۱۵}\cos\frac{۴\pi}{۱۵}, \quad \sin\frac{۱۶\pi}{۱۵} = ۲\sin\frac{۸\pi}{۱۵}\cos\frac{۸\pi}{۱۵}$$

با ضرب برابری‌ها و توجه به این‌که $\sin\frac{۱۶\pi}{۱۵} = -\sin\frac{\pi}{۱۵}$ و $\cos\frac{۸\pi}{۱۵} = -\cos\frac{۷\pi}{۱۵}$، نتیجه می‌گیریم:

$$\cos\frac{\pi}{۱۵}\cos\frac{۲\pi}{۱۵}\cos\frac{۴\pi}{۱۵}\cos\frac{۷\pi}{۱۵} = \frac{۱}{۲^۴}$$

به‌جز این $\cos\frac{۵\pi}{۱۵} = \frac{۱}{۲}$ و

$$\sin\frac{۶\pi}{۱۵} = ۲\sin\frac{۳\pi}{۱۵}\cos\frac{۳\pi}{۱۵}, \ \sin\frac{۱۲\pi}{۱۵} = ۲\sin\frac{۶\pi}{۱۵}\cos\frac{۶\pi}{۱۵}$$

از این‌رو

$$\cos\frac{۳\pi}{۱۵}\cos\frac{۶\pi}{۱۵}=\frac{۱}{۲^{۲}}$$

ادامهٔ اثبات قضیه ساده است.

۴۷. داریم:

$$\frac{\tan(A+B)}{\tan A}=\frac{\sin(A+B)\cos A}{\cos(A+B)\sin A}=\frac{\sin(۲A+B)+\sin B}{\sin(۲A+B)-\sin B}=\frac{۳}{۲}$$

۴۸. از رابطه‌های داده شده، داریم:

$$\sin ۲B=\frac{۳}{۲}\sin ۲A$$
$$۳\sin^{۲}A=۱-۲\sin^{۲}B=\cos ۲B$$

از این‌رو:

$$\cos(A+۲B)=\cos A\cos ۲B-\sin A\sin ۲B=$$
$$=\cos A\cdot ۳\sin^{۲}A-\frac{۳}{۲}\sin A\sin ۲A=۰$$

۴۹. داریم:

$$۲\cos a\cos\varphi=\cos(a+\varphi)+\cos(a-\varphi)$$

درنتیجه، عبارت، برابر است با:

$$\cos^{۲}\varphi+\cos^{۲}(a+\varphi)-[\cos^{۲}(a+\varphi)+\cos(a+\varphi)\cos(a-\varphi)]=$$
$$=\cos^{۲}\varphi-\cos^{۲}a\cos^{۲}\varphi+\sin^{۲}a\sin^{۲}\varphi=\sin^{۲}a$$

۵۰. برای مثال، داریم:

$$a^{۲}+a'^{۲}+a''^{۲}=\cos^{۲}\varphi\cos^{۲}\psi+\sin^{۲}\varphi\sin^{۲}\psi\cos^{۲}\delta+$$
$$+\cos^{۲}\varphi\sin^{۲}\psi+\sin^{۲}\varphi\cos^{۲}\psi\cos^{۲}\delta+\sin^{۲}\varphi\sin^{۲}\delta$$

(عبارت درجه دو در دو مربع اول حذف می‌شوند)، بنابراین:

$$a^۲ + a'^۲ + a''^۲ = (\cos^۲\varphi\cos^۲\psi + \cos^۲\varphi\sin^۲\psi) +$$
$$+(\sin^۲\varphi\sin^۲\psi\cos^۲\delta + \sin^۲\varphi\cos^۲\psi\cos^۲\delta) +$$
$$+\sin^۲\varphi\sin^۲\delta = \cos^۲\varphi + (\sin^۲\varphi\cos^۲\delta + \sin^۲\varphi\sin^۲\delta) = ۱$$

برابری‌های باقی‌مانده به‌طور مشابه ثابت می‌شوند.

فصل ۲

۱. اتحاد را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$q^۳ + q^۳\frac{(۲p^۳ - q^۳)^۳}{(p^۳ + q^۳)^۳} = p^۳ - p^۳\frac{(p^۳ - ۲q^۳)^۳}{(p^۳ + q^۳)^۳}$$

روشن است، عبارت سمت راست برابری را می‌توان با تبدیل p و q، از عبارت سمت چپ برابری به‌دست آورد. عبارت سمت چپ برابری را به چنان صورتی تبدیل می‌کنیم که از آن ثابت شود، پس از تبدیل، مقدار آن بدون تغییر باقی می‌ماند. آن‌گاه درستی اتحاد به روشنی ثابت می‌شود. داریم:

$$\frac{q^۳}{(p^۳ + q^۳)^۳}\{(p^۳ + q^۳)^۳ + (۲p^۳ - q^۳)^۳\} = \frac{۹p^۳q^۳}{(p^۳ + q^۳)^۳}(p^۶ + q^۶ - p^۶q^۶)$$

۲. داریم:

$$\frac{p^۳ + q^۳}{(p+q)^۳p^۳q^۳} + \frac{۳}{(p+q)^۴}\left(\frac{۱}{p^۲} + \frac{۱}{q^۲}\right) + \frac{۶(p+q)}{(p+q)^۵pq} =$$
$$\frac{p^۲ - pq - q^۲}{(p+q)^۲p^۳q^۳} + \frac{۳}{(p+q)^۴}\left(\frac{۱}{p^۲} + \frac{۱}{q^۲} + \frac{۲}{pq}\right) =$$
$$= \frac{p^۲ - pq + q^۲}{(p+q)^۲p^۳q^۳} + \frac{۳}{(p+q)^۴}\left(\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q}\right)^۲ = \frac{p^۲ - pq + q^۲}{(p+q)^۲p^۳q^۳} +$$

$$+\frac{۳}{(p+q)^۲p^۲q^۲}=\frac{۱}{(p+q)^۲p^۳q^۳}\times(p^۲-pq+q^۲+۳pq)=\frac{۱}{p^۳q^۳}$$

۳. با دسته‌بندی دو جمله آخر، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۲}{(p+q)^۴}\times\frac{q^۳-p^۳}{p^۳q^۳}+\frac{۲}{(p+q)^۴}\times\frac{q-p}{p^۲q^۲}=$$
$$=\frac{۲(q-p)}{(p+q)^۴p^۳q^۳}(p^۲+q^۲+۲pq)=\frac{۲(p-q)}{(p+q)^۲p^۳q^۳}$$

اکنون، با افزودن جملهٔ اول به آن، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{(p+q)^۳}\times\frac{q^۴-p^۴}{p^۴q^۴}+\frac{۲(q-p)}{(p+q)^۲p^۳q^۳}=\frac{q-p}{p^۴q^۴}$$

۴. باید ثابت کنیم:

$$\frac{۱+x}{۱-x}\cdot\frac{۱+y}{۱-y}\cdot\frac{۱+z}{۱-z}=۱$$

به‌جای x عبارت آن را جایگزین می‌کنیم، به‌دست می‌آید: $\frac{۱+x}{۱-x}=\frac{a}{b}$. از آنجاکه y و z از x با یک تبدیل دوری حرف‌های a و b و c به‌دست می‌آید، داریم:

$$\frac{۱+y}{۱-y}=\frac{b}{c};\quad \frac{۱+z}{۱-z}=\frac{c}{a}$$

بنابراین، درستی اتحاد مورد نظر، روشن می‌شود.

۵. داریم:

$$\frac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\frac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$$

اما اگر $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$، آنگاه $\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D}$ و برعکس، آن‌وقت اگر طرف دوم این برابری‌ها وجود داشته باشد، طرف اول نیز وجود دارد. با استدلالی مشابه قرار دهید $A=a+b+c+d$، $B=a+b-c-d$، $C=a-b+c-d$، $D=a-b-c+d$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d} \quad \text{یا} \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

بنابراین: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

۶. مخرج کسر را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$bcy^2 + bcz^2 - 2bcyz + acz^2 + acx^2 - 2aczx + abx^2 +$$
$$+aby^2 - 2abxy = c(ax^2 + by^2) + b(ax^2 + cz^2) +$$
$$+a(cz^2 + by^2) - 2bcyz - 2acxz - 2abxy =$$
$$(a+b+c)(ax^2 + by^2 + cz^2) - c^2z^2 - b^2y^2 - a^2x^2 - 2bcyz -$$
$$-2acxz - 2abxy = (a+b+c)(ax^2 + by^2 + cz^2) - (ax + by + cz)^2$$

چون بنابه فرض $ax + by + cz = 0$، مخرج کسر به این عبارت تبدیل می‌شود:

$$(a+b+c)(ax^2 + by^2 + cz^2)$$

و کسر برابر می‌شود با:

$$\frac{1}{a+b+c}$$

۷. سمت چپ برابری، مخرج مشترک می‌گیریم. صورت کسر برابر می‌شود با:

$$x^2y^2z^2(a^2 - b^2) + b^2(x^2 - a^2)(y^2 - a^2)(z^2 - a^2) -$$
$$-a^2(x^2 - b^2)(y^2 - b^2)(z^2 - b^2)$$

روشن است که:

$$(a^2 - x^2)(a^2 - y^2)(a^2 - z^2) = a^6 - (x^2 + y^2 + z^2)a^4 +$$
$$+(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)a^2 - x^2y^2z^2$$

از این‌رو

$$(b^2 - x^2)(b^2 - y^2)(b^2 - z^2) = b^6 - (x2 + y^2 + z^2)b^4 +$$
$$+(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)b^2 - x^2y^2z^2$$

با قرار دادن این عبارت‌ها در صورت کسر و انجام تمام تبدیل‌های لازم، مقدار کسر به‌دست می‌آید.

۸.

$$S_{۰} = \frac{۱}{(a-b)(a-c)} + \frac{۱}{(b-a)(b-c)} + \frac{۱}{(c-a)(c-b)}$$

کسرها را به یک مخرج تبدیل می‌کنیم:

$$S_{۰} = \frac{۱}{(a-b)(a-c)(b-c)}[(b-c)-(a-c)+(a-b)] = ۰$$

$$S_{۱} = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{۱}{(a-b)(a-c)(b-c)} \times$$

$$\times[a(b-c)-b(a-c)+c(a-b)] = ۰$$

$$S_{۲} = \frac{a^{۲}}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^{۲}}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^{۲}}{(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{۱}{(a-b)(a-c)(b-c)}[a^{۲}(b-c)-b^{۲}(a-c)+c^{۲}(a-b)]$$

صورت کسر را بررسی می‌کنیم داریم:

$$a^{۲}(b-c)-b^{۲}(a-c)+c^{۲}(a-b) = ab(a-b)-c(a^{۲}-b^{۲})+$$

$$+c^{۲}(a-b) = (a-b)(ab-ac-bc+c^{۲}) =$$

$$= (a-b)[a(b-c)-c(b-c)] = (a-b)(b-c)(a-c)$$

که از آن نتیجه می‌شود: $S_{۲} = ۱$ ، $S_{۳}$ ، $S_{۴}$ و $S_{۵}$ را می‌توان به‌طریق مشابه محاسبه کرد، اما در این‌جا به طریقه‌ای اندکی متفاوت عمل می‌کنیم.

به سادگی دیده می‌شود، این اتحاد وجود دارد:

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^{۳}-(a+b+c)x^{۲}+(ab+ac+bc)x-abc$$

به‌ترتیب قرار دهید $x = a$ ، $x = b$ و $x = c$. به‌این برابری‌ها می‌رسید:

$$a^{۳}-(a+b+c)a^{۲}+(ab+ac+bc)a-abc = ۰$$

$$b^۳-(a+b+c)b^۲+(ab+ac+bc)b-abc=۰$$
$$c^۳-(a+b+c)c^۲+(ab+ac+bc)c-abc=۰$$

به‌جز این، رابطه اول برابر $(a-b)(a-c)$، رابطه دوم را بر $(b-c)(b-a)$ و رابطهٔ سوم را بر $(c-a)(c-b)$ تقسیم و آن‌ها را جمله‌به‌جمله با هم جمع می‌کنیم؛ در این صورت

$$S_۳-(a+b+c)S_۲+(ab+ac+bc)S_۱-abcS_۰=۰$$

اما چون معلوم است که $S_۰=S_۱=۰$، $S_۲=۱$ داریم: $S_۳=a+b+c$

برای محاسبهٔ $S_۴$، اتحاد قبل را در نظر می‌گیریم و عضوهای آن را در x ضرب می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$$x(x-a)(x-b)(x-c)=x^۴-(a+b+c)x^۳+(ab+ac+bc)x^۲-abcx$$

با روشی مشابه، به‌دست می‌آید:

$$S_۴-(a+b+c)S_۳+(ab+ac+bc)S_۲-abcS_۱=۰$$

پس:

$$S_۴=(a+b+c)S_۳-(ab+ac+bc)S_۲=(a+b+c)^۲-ab-$$
$$-ac-bc=a^۲+b^۲+c^۲+ab+ac+bc$$

به‌همین ترتیب، برای محاسبهٔ $S_۵$، اتحاد اصلی را در $x^۲$ ضرب می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$S_۵-(a+b+c)S_۴+(ab+ac+bc)S_۳-abcS_۲=۰$$

بنابراین:

$$S_۵=(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲+ab+ac+bc)-(ab+ac+bc)\cdot$$
$$\cdot(a+b+c)+abc=(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲)+abc=a^۳+b^۳+c^۳$$
$$+a^۲b+a^۲c+b^۲a+b^۲c+c^۲a+c^۲b+abc$$

۹. این مساله شبیه مساله قبل حل می‌شود. به زبان دیگر، برابری‌های $S_0 = S_1 = S_2 = 0$، $S_3 = 1$ با یک بررسی مستقیم ثابت می‌شوند. برای محاسبهٔ s_4 می‌توان از این‌رو اتحاد استفاده کرد:

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = x^4 - (a+b+c+d)x^3 +$$
$$+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 - (abc+abd+acd+bcd)x + abcd$$

از آن‌جا $S_4 = (a+b+c+d)S_3 = a+b+c+d$

۱۰. مانند گذشته قرار دهید:

$$S_m = \frac{a^m}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^m}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^m}{(c-a)(c-b)}$$

جمله اول جمع σ_m را در نظر می‌گیریم و آن را به‌این صورت تبدیل می‌کنیم:

$$a^m \frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} = \frac{(a+b+c)a^{m+1} + a^{m-1} \cdot abc}{(a-b)(a-c)}$$

با استفاده از تبدیل دوری، عبارت‌های مشابهی برای جمله‌های دوم و سوم σ_m به‌دست می‌آوریم. اکنون تمام این عبارت‌ها را با هم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:
$\sigma_m = (a+b+c)s_{m+1} + abcs_{m-1}$ به‌این ترتیب (با چند تبدیل ساده):

$$\sigma_1 = (a+b+c)S_2 + abcS_0 = a+b+c$$
$$(S_2 = 1,\ S_0 = 0)$$
$$\sigma_2 = (a+b+c)S_3 + abcS_1 = (a+b+c)^2$$

هنگامی که $S_1 = 0$ و $S_3 = a+b+c$،

$$\sigma_3 = (a+b+c)S_4 + abcS_2 =$$
$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc) + abc$$
$$\sigma_4 = (a+b+c)S_5 + abcS_3 = (a+b+c)[(a+b+c) \times$$
$$\times(a^2+b^2+c^2) + 2abc]$$

۱۱. عبارت سمت چپ این اتحاد را به‌این صورت تبدیل می‌کنیم:

$$abc\left\{\frac{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)}{(a-\circ)(a-b)(a-c)}+\frac{(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)}{(b-\circ)(b-a)(b-c)}+\right.$$
$$\left.\frac{(c-\alpha)(c-\beta)(c-\gamma)}{(c-\circ)(c-a)(c-b)}+\frac{(\circ-\alpha)(\circ-\beta)(\circ-\gamma)}{(\circ-c)(\circ-a)(c-b)}-\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}\right\}$$

چهار جملهٔ اول مجموع داخل آکولاد را در نظر می‌گیریم.

صورت جمله اول را برحسب توان‌های a بسط می‌دهیم؛ به‌دست می‌آید:

$$a^{۳}-(\alpha+\beta+\gamma)a^{۲}+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)a-\alpha\beta\gamma$$

روی سه جملهٔ باقی‌مانده، عمل مشابه را انجام می‌دهیم، نتیجه می‌گیریم، مجموع چهار جملهٔ اول برابر است با:

$$S_{۳}-(\alpha+\beta+\gamma)S_{۲}+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)S_{۱}-\alpha\beta\gamma S_{\circ}$$

که در آن S_k، از جمع معلوم است (مساله ۹ را ببینید که در آن کافی است قرار دهیم $d=\circ$). با استفاده از نتیجه‌های این مساله، درمی‌یابیم که مجموع چهار جملهٔ اول برابر یک است و درنتیجه عبارت به‌این صورت درمی‌آید.

$$abc\left\{۱-\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}\right\}=abc-\alpha\beta\gamma$$

۱۲. این مجموع را در نظر بگیرید:

$$S_{۴}=\frac{\alpha^{۴}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}+\frac{\beta^{۴}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$$
$$\frac{\gamma^{۴}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}+\frac{\delta^{۴}}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$$

از مساله ۹ داریم $S_{۴}=\alpha+\beta+\gamma+\delta$. قرار دهید $\alpha=abc$، $\beta=abd$، $\gamma=acd$، $\delta=bcd$ آن‌گاه

$$\frac{\alpha^{۴}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}=\frac{a^{۴}b^{۴}c^{۴}}{(abc-abd)(abc-acd)(abc-bcd)}=$$
$$=\frac{a^{۲}b^{۲}c^{۲}}{(c-d)(b-d)(a-d)}$$

با استفاده از تبدیل دوری برای سه جملهٔ باقی‌مانده، عبارت مشابهی به‌دست می‌آوریم. بنابراین اتحاد داده شده ثابت می‌شود.

۱۳. الف) یکی از جمله‌ها را به‌این صورت تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)} = \frac{1}{a} \times \frac{\frac{1}{ab}\cdot\frac{1}{ac}}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)} =$$

$$= \frac{1}{abc} \times \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)}$$

آن‌گاه مجموع مورد نظر برابر است با:

$$\frac{1}{abc}\left\{\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)} + \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)} + \frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)}\right\} = \frac{1}{abc}S_2$$

اما (مساله ۸ را ببینید) $S_2 = 1$ و بنابراین

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-c)(b-a)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}$$

با وجود این، این نتیجه را می‌توان با روش دیگری به‌دست آورد. چهار کمیت a، b، c و o را در نظر می‌گیریم و برای آن‌ها S_0 را تشکیل می‌دهیم. در آن صورت داریم:

$$S_0 = \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} + \\ + \frac{1}{(0-a)(0-b)(0-c)} = 0$$

از آن‌جاکه $S_0 = 0$، بنابراین به نتیجهٔ قبلی دست می‌یابیم.

ب) به‌طریق مشابه مجموع داده شده را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$\frac{۱}{abc}\left\{\frac{\left(\frac{۱}{a}\right)^{۳}}{\left(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}\right)\left(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{c}\right)}+\frac{\left(\frac{۱}{b}\right)^{۳}}{\left(\frac{۱}{b}-\frac{۱}{a}\right)\left(\frac{۱}{b}-\frac{۱}{c}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{۱}{c}\right)^{۳}}{\left(\frac{۱}{c}-\frac{۱}{a}\right)\left(\frac{۱}{c}-\frac{۱}{b}\right)}\right\}=\frac{۱}{abc}S_{۲}=\frac{۱}{abc}\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right)$$

و همین‌طور این مجموع را

$$\frac{۱}{a^{۲}(a-b)(a-c)}+\frac{۱}{b^{۲}(b-a)(b-c)}+\frac{۱}{c^{۲}(c-a)(c-b)}=\frac{ab+ac+bc}{a^{۲}b^{۲}c^{۲}}$$

هنگام محاسبهٔ مجموع‌های دیگری به‌صورت زیر، می‌توان از روش مشابهی استفاده کرد:

$$\frac{۱}{a^{k}(a-b)(a-c)}+\frac{۱}{b^{k}(b-a)(b-c)}+\frac{۱}{c^{k}(c-a)(c-b)}$$

۱۴. داریم:

$$\frac{a^{k}}{(a-b)(a-c)(a-x)}+\frac{b^{k}}{(b-a)(b-c)(b-x)}+$$
$$\frac{c^{k}}{(c-a)(c-b)(c-x)}+\frac{x^{k}}{(x-a)(x-b)(x-c)}=۰$$

به‌ازای $k=۱$ و $k=۲$ (مساله ۹ را ببینید)، از این رو:

$$\frac{a^{k}}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b^{k}}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\frac{c^{k}}{(c-a)(c-b)(x-c)}$$
$$=\frac{x^{k}}{(x-a)(x-b)(x-c)}\qquad(k=۱,۲)$$

۱۵. داریم:

$$\frac{b+c+d}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)}=\frac{(a+b+c+d-x)+(x-a)}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)}=$$

$$(a+b+c+d-x)\frac{۱}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)}+\frac{۱}{(ba)(c-a)(d-a)}$$

تبدیل دوری را روی حرف‌های a، b، c، d به‌کار می‌گیریم و عبارت‌هایی را که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، با هم جمع می‌کنیم. برای سمت چپ مجموع، خواهیم داشت:

$$(a+b+c+d-x)\left\{\frac{۱}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-x)}+\right.$$

$$+\frac{۱}{(b-a)(b-c)(b-d)(b-x)}+\frac{۱}{(c-a)(c-b)(c-d)(c-x)}+$$

$$\left.+\frac{۱}{(d-a)(d-b)(d-c)(d-x)}\right\}$$

زیرا مجموع دوم برابر صفر است.

تنها باقی می‌ماند اثبات این مطلب که:

$$\frac{۱}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-x)}+\frac{۱}{(b-a)(b-c)(b-d)(b-x)}+$$

$$+\frac{۱}{(c-a)(c-b)(c-d)(c-x)}+\frac{۱}{(d-a)(d-b)(d-c)(d-x}+$$

$$+\frac{۱}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}=۰$$

می‌توان این کسرها را به کسری با یک مخرج تبدیل کرد و با انجام تبدیل‌های لازم در صورتِ کسر، به نتیجه رسید. ولی در این‌جا با روش دیگری مساله را حل می‌کنیم.

سمت چپ برابری را در $(a-x)(b-x)(c-x)(d-x)$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{(a-b)(a-c)(a-d)}(b-x)(c-x)(d-x)+\frac{۱}{(b-a)(b-c)(b-d)}\times$$

$$\times(a-x)(c-x)(d-x)+\frac{۱}{(c-a)(c-b)(c-d)}(a-x)(b-x)(d-x)$$

$$+\frac{۱}{(d-a)(d-b)(d-c)}(a-x)(b-x)(c-x)+۱$$

روشن است که با یک چندجمله‌ای درجه سوم برحسب x سروکار داریم. لازم است ثابت کنیم که این چندجمله‌ای، همواره برابر صفر است. برای این منظور، کافی است نشان دهیم (به ابتدای این بخش مراجعه کنید)، این چندجمله‌ای به‌ازای چهار مقدار خاص و مختلف x برابر صفر می‌شود. به‌جای x به‌طور متوالی، a، b و c و d قرار می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که مقدار این چندجمله‌ای به‌ازای این چهار مقدار x، برابر صفر می‌شود و درنتیجه متحد با صفر است.

۱۶. x^2 را به سمت چپ منتقل می‌کنیم، با این کار به یک سه‌جمله‌ای درجه دوم برحسب x دست می‌یابیم. برای اثبات این مطلب که این سه‌جمله‌ای متحد با صفر است کافی است نشان دهیم این سه‌جمله‌ای به‌ازای سه مقدار مختلف x برابر صفر است. اگر به‌جای x، مقدارهای a، b و c را قرار دهیم، ثابت می‌شود این اتحاد برقرار است.

۱۷. شبیه مساله قبل حل می‌شود. با وجود این، هم مساله ۱۶ و هم این مساله را می‌توان با استفاده از کمیت‌های S_k حل کرد (مساله ۸ و مساله‌های بعد از این را ببینید.)

۱۸. قرار دهید:

$$\frac{a-b}{c}=x, \quad \frac{b-c}{a}=y, \quad \frac{c-a}{b}=z$$

سمت چپ این برابری‌ها به‌این صورت درمی‌آید:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{x+z}{y}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+y}{z}$$

کسر $\frac{y+z}{x}$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$\frac{y+z}{x}=\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\cdot\frac{c}{a-b}=\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}=$$

$$=\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-a^2-c(b-a)}{ab}=\frac{c}{ab}(-a-b+c)=$$

$$\frac{c}{ab}(-a-b-c+2c)=\frac{2c^2}{ab}$$

چون $a+b+c=0$، با استفاده از تبدیل دوری نتیجه می‌شود:

$$\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}=\frac{2c^2}{ab}+\frac{2a^2}{bc}+$$

$$+\frac{۲b^۲}{ac}=\frac{۲}{abc}(a^۳+b^۳+c^۳)$$

اما اگر $a+b+c=۰$ آنگاه $a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$ (مساله ۲۳ از فصل ۱ را ببینید)، درنتیجه:

$$\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}=۶$$

۱۹. با ضرب عبارت داده شده در $(a+b)(b+c)(c+a)$ بهدست میآید:

$$(a-b)(a+c)(b+c)+(a+c)(a+b)(b-c)+$$
$$+(a+b)(c-a)(b+c)+(a-b)(c-a)(b-c)$$

این عبارت یک سهجملهای درجه دوم برحسب a است که بهازای $a=b$، $a=c$ و $a=۰$ صفر میشود و درنتیجه متحد با صفر است یعنی

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=۰,$$

در اینجا فرض کردیم $c\neq b$. اگر $b=c$، آنگاه بهسادگی و بهطور مستقیم ثابت میشود که اتحاد برقرار است.

۲۰. داریم:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{(b-a)+(a-c)}{(a-b)(a-c)}=\frac{۱}{(a-b)}-\frac{۱}{a-c}$$

دو جمله باقیمانده را با روش مشابه بررسی میکنیم که با انجام آن، به اتحاد مورد نظر دست مییابیم.

۲۱. پاسخ. صفر شبیه مساله ۱۹ حل کنید.

۲۲. کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{d^m(a-b)(b-c)+b^m(a-d)(c-d)}{c^m(a-b)(a-d)+a^m(b-c)(c-d)}-\frac{b-d}{a-c}=۰$$

در آغاز، مخرج مشترک میگیریم، آنگاه ثابت میکنیم، صورت کسر برابر صفر است. با وجود این، اگر صورت کسر را بر حاصلضرب $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$

تقسیم کنیم، به این عبارت می‌رسیم:

$$\frac{a^m}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^m}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^m}{(c-a)(c-b)(c-d)}+$$
$$+\frac{d^m}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

به‌ازای $m=۱,۲$، این عبارت برابر صفر است (مسالهٔ ۹ را ببینید)

۲۳. در آغاز ثابت می‌کنیم:

$$۱-\frac{x}{\alpha_۱}+\frac{x(x-\alpha_۱)}{\alpha_۱\alpha_۲}-\frac{x(x-\alpha_۱)(x-\alpha_۲)}{\alpha_۱\alpha_۲\alpha_۳}+\ldots+$$
$$+(-۱)^n\frac{x(x-\alpha_۱)(x-\alpha_۲)\ldots(x-\alpha_{n-۱})}{\alpha_۱\alpha_۲\ldots\alpha_n}=$$
$$=(-۱)^n\frac{(x-\alpha_۱)(x-\alpha_۲)\ldots(x-\alpha_n)}{\alpha_۱\alpha_۲\ldots\alpha_n}\qquad(*)$$

به‌همین ترتیب، روشن است که عبارت داخل آکولاد دوم، برابر است با:

$$\frac{(x+\alpha_۱)(x+\alpha_۲)\ldots(x+\alpha_n)}{\alpha_۱\alpha_۲\ldots\alpha_n}$$

و حاصل‌ضرب عبارت‌ها داخل آکولاد برابر است با:

$$(-۱)^n\frac{(x^۲-\alpha_۱^۲)(x^۲-\alpha_۲^۲)\ldots(x^۲-\alpha_n^۲)}{\alpha_۱^۲\alpha_۲^۲\ldots\alpha_n^۲}$$

با تبدیل $x^۲$ به x و $\alpha_i^۲$ به α_i و استفاده از برابری $(*)$ به‌ترتیب عکس، اتحاد مورد نظر به‌دست می‌آید.

۲۴. داریم:

$$\left(\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}-۱\right)+\left(\frac{c^۲+a^۲-b^۲}{۲ac}-۱\right)+\left(\frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲ab}+۱\right)=۰\ (*)$$

عبارت داخل پرانتز اول برابر است با:

$$\frac{(b-c)^۲-a^۲}{۲bc}=\frac{(b-c-a)(b-c+a)}{۲bc}$$

عبارت دوم برابر است با:

$$\frac{(a-c)^۲-b^۲}{۲ac}=\frac{(a-c-b)(a-c+b)}{۲ac}$$

به‌همین ترتیب، عبارت سوم به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{(a+b)^۲-c^۲}{۲ab}=\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{۲ab}$$

مجموع این عبارت‌ها را در نظر می‌گیریم:

$$-\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{۲bc}-\frac{(a+b-c)(c+b-a)}{۲ac}+\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{۲ab}$$
$$=\frac{a+b-c}{۲abc}\{c(a+b+c)-b(c+b-a)-a(a+bc-b)\}=$$
$$=\frac{(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{۲abc}$$

بنابراین، به‌این عبارت می‌رسیم:

$$\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{۲abc}=۰$$

که از آن، نتیجه می‌شود، دست‌کم یکی از عامل‌های ضرب صورت کسر برابر صفر است. فرض کنید $a+b-c=۰$، آن‌گاه تمام سه عبارت داخل پرانتز در برابری $(*)$ برابر صفر است و درنتیجه دو کسر داده شده برابر یک می‌شوند. حال آن‌که کسر سوم برابر ۱− است. بررسی دو حالت دیگر، نتیجهٔ مشابهی را به‌دست می‌دهد.

۲۵. در برابری اصلی، مخرج مشترک می‌گیریم و آن را ساده می‌کنیم، (پس از انجام چند تبدیل) نتیجه می‌شود:

$$(a+b)(a+c)(b+c)=۰ \qquad (۱)$$

اما برابری دوم را (که باید ثابت شود)، می‌توان به این‌صورت تبدیل کرد:

$$(a^n+b^n)(a^n+c^n)(b^n+c^n)=۰ \qquad (۲)$$

کاملاً روشن است که به‌ازای یک مقدار فرد n، برابری (۲) را می‌توان از برابری (۱) نتیجه گرفت، زیرا برای مثال، اگر $a+b=0$، آن‌گاه $a=-b$ و

$$a^n+b^n=a^n+(-a)^n=a^n-a^n=0$$

۲۶. این تناسب را، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{(bz+cy)yz}{-ax+by+cz}=\frac{(cx+az)xz}{ax-by+cz}=\frac{(ay+bx)xy}{ax+by-cz}$$

اما از تناسب $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}$ نتیجه می‌شود $\frac{A+C}{B+D}=\frac{C+E}{D+F}=\frac{A+E}{B+F}$ (این برابری، به‌سادگی ثابت می‌شود)، برای این منظور، قرار دهید $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=\lambda$ و A و C و E را برحسب λ و B، D و F به‌دست آورید.) بنابراین، داریم:

$$\frac{c(x^2+y^2)+z(ax+by)}{c}=\frac{a(z^2+y^2)+x(by+cz)}{a}=$$
$$=\frac{b(x^2+z^2)+y(cz+ax)}{b}$$

اگر $x^2+y^2+z^2$ را از هر جملهٔ این برابری، کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{z(ax+by-cz)}{c}=\frac{x(by+cz-ax)}{a}=\frac{y(cz+ax-by)}{b}$$

برابری‌های آغاز را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{ay+bx}{z(ax+by-cz)}=\frac{bz+cy}{x(-ax+by+cz)}=\frac{cx+az}{y(ax-by+cz)}$$

با ضرب دو برابری اخیر، دوبه‌دو در هم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{ay+bx}{c}=\frac{bz+cy}{a}=\frac{cx+az}{b}$$

بنابراین:

$$c=(ay+bx)\mu,$$
$$b=(cx+az)\mu,$$
$$a=(bz+cy)\mu$$

از این برابری‌ها، برابری اول را در c، برابری دوم را در b، برابری سوم را در a ضرب می‌کنیم و عبارت $b^۲ + c^۲ - a^۲$ را تشکیل می‌دهیم، به‌دست می‌آید $b^۲ + c^۲ - a^۲ = ۲\mu bcx$ به‌طور مشابه، به‌دست می‌آید:

$$c^۲ + a^۲ - b^۲ = ۲\mu cay,\ a^۲ + b^۲ - c^۲ = ۲\mu abz$$

از این‌رو، سرانجام

$$\frac{x}{a(b^۲ + c^۲ - a^۲)} = \frac{y}{b(a^۲ + c^۲ - b^۲)} = \frac{x}{c(a^۲ + b^۲ - c^۲)}$$

۲۷. از آن‌جا که $a + b + c = ۰$، می‌توان نوشت:

$$(a + b + c)(a\alpha + b\beta + c\gamma) = ۰$$

عبارت سمت چپ برابری را بسط می‌دهیم، حاصل می‌شود:

$$a^۲\alpha + b^۲\beta + c^۲\gamma + ab(\alpha + \beta) + ac(\alpha + \gamma) + bc(\beta + \gamma) = ۰,$$

اما $\alpha + \beta = -\gamma$، $\alpha + \gamma = -\beta$، $\beta + \gamma = -\alpha$ بنابراین

$$a^۲\alpha + b^۲\beta + c^۲\gamma - ab\gamma - ac\beta - cb\alpha = ۰$$

یا
$a^۲\alpha + b^۲\beta + c^۲\gamma - abc\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c}\right) = ۰$ و چون $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = ۰$، (بنا به فرض) داریم: $a^۲\alpha + b^۲\beta + c^۲\gamma = ۰$

۲۸. از برابری‌های

$$(b^۲ + c^۲ - a^۲)x = (c^۲ + a^۲ - b^۲)y = (a^۲ + b^۲ - c^۲)y = (a^۲ + b^۲ - c^۲)z$$

نتیجه می‌شود:

$$\frac{x}{\frac{۱}{b^۲ + c^۲ - a^۲}} = \frac{y}{\frac{۱}{c^۲ + a^۲ - b^۲}} = \frac{z}{\frac{۱}{a^۲ + b^۲ - c^۲}}$$

برای سادگی کار، قرار می‌گذاریم:

$$b^۲ + c^۲ - a^۲ = A, \quad c^۲ + a^۲ - b^۲ = B$$
$$a^۲ + b^۲ - c^۲ = C,$$

روشن است، این مساله هم‌ارز است با این مسالهٔ: اگر معادلهٔ

$$x^۳ + y^۳ + z^۳ = (x + y)(x + z)(y + z)$$

دارای جواب‌های

$$x = a,\ y = b,\ z = c$$

باشد، آن‌گاه دارای جواب‌های

$$x = \frac{۱}{A},\ y = \frac{۱}{B},\ z = \frac{۱}{C}$$

است. از طرفی می‌دانیم اتحاد (مسالهٔ ۱۹ از فصل ۱ را ببینید.)

$$(x + y + z)^۳ - x^۳ - y^۳ - z^۳ = ۳(x + y)(x + z)(y + z)$$

برقرار است. با استفاده از این اتحاد، به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که برابری‌های زیر هم‌ارزند.

$$x^۳ + y^۳ + z^۳ = (x + y)(x + z)(y + z) \quad (۱)$$

$$(x + y + z)^۳ = ۴(x^۳ + y^۳ + z^۳) = ۴(x + y)(x + z)(y + z) \quad (۲)$$

$$(x + y - z)(x + z - y)(y + z - x) = -۴xyz \quad (۳)$$

و وجود هریک از آن‌ها مستلزم وجود دیگران است. به‌این ترتیب، کافی است ثابت کنیم:

$$\left(\frac{۱}{A} + \frac{۱}{B} + \frac{۱}{C}\right)^۳ = ۴\left(\frac{۱}{A} + \frac{۱}{B}\right)\left(\frac{۱}{A} + \frac{۱}{C}\right)\left(\frac{۱}{B} + \frac{۱}{C}\right)$$

یعنی

$$(AB + AC + BC)^۳ = ۴(A + B)(A + C)(B + C) \cdot ABC$$

اما $B+C=۲a^۲$, $A+C=۲b^۲$, $A+B=۲c^۲$ بنابراین، باید ثابت کنیم:

$$(AB+AC+BC)^۳=۳۲a^۲b^۲c^۲\cdot ABC$$

نخست $AB+AC+BC$، سپس ABC را محاسبه می‌کنیم.

داریم:

$$AB+AC+BC=A(B+C)+BC=$$
$$=(b^۲+c^۲-a^۲)\cdot ۲a^۲+[a^۲+(b^۲-c^۲)][a^۲-(b^۲-c^۲)]=$$
$$=۲a^۲b^۲+۲a^۲c^۲-۲a^۴+a^۴-b^۴-c^۴+۲b^۲c^۲=-a^۴-b^۴-c^۴+$$
$$+۲a^۲b^۲+۲a^۲c^۲+۲b^۲c^۲=۴a^۲b^۲-(a^۲+b^۲-c^۲)^۲=$$
$$=(a-b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a+b+c)$$

بنابر برابری (۳)

$$(a+c-b)(b+c-a)(a+b-c)=-۴abc$$

بنابراین:

$$AB+AC+BC=-۴abc(a+b+c)$$

ABC را محاسبه می‌کنیم. قرار دهید:

$$a^۲+b^۲+c^۲=S,$$

در این‌صورت

$$ABC=(S-۲a^۲)(S-۲b^۲)(S-۲c^۲)=S^۳-$$
$$-۲(a^۲+b^۲+c^۲)S^۲+۴(a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲)S-۸a^۲b^۲c^۲=$$
$$=۴(a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲)S-S^۳-۸a^۲b^۲c^۲=$$
$$=۴\{۴a^۲b^۲+۴a^۲c^۲+۴b^۲c^۲-(a^۲+b^۲+c^۲)^۲\}-۸a^۲b^۲c^۲=$$
$$=-S\{a^۴+b^۴+c^۴-۲a^۲b^۲-۲a^۲c^۲-۲b^۲c^۲\}-۸a^۲b^۲c^۲=$$
$$=S(a+c-b)(b+c-a)(a+b-c)(a+b+c)-۸a^۲b^۲c^۲=$$
$$=-۴abc(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲)-۸a^۲b^۲c^۲=$$
$$=-۴abc\{a^۳+b^۳+c^۳+a^۲(b+c)+b^۲(a+c)+c^۲(a+b)+۲abc\}$$

اما

$$(a+b)(a+c)(b+c) = a^۲(b+c) + b^۲(a+c) + c^۲(a+b) + ۲abc$$

بنابراین، بنابر برابری (۱)، عبارت داخل پرانتز برابر $۲(a^۳ + b^۳ + c^۳)$ است. اما بنابر برابری (۲)

$$۲(a^۳ + b^۳ + c^۳) = \frac{۱}{۲}(a+b+c)^۳$$

بنابراین $ABC = -۲abc(a+b+c)^۳$

اما همان‌گونه که نتیجه گرفتیم:

$$AB + AC + BC = -۴abc(a+b+c)$$

بنابراین:

$$(AB+AC+BC)^۳ = ۳۲a^۲b^۲c^۲ \cdot ABC$$

۲۹. الف) داریم:

$$P_n = a_nP_{n-۱} + P_{n-۲},\ P_n - P_{n-۲} = a_nP_{n-۱},$$
$$Q_n = a_nQ_{n-۱} + Q_{n-۲}, Q_n - q_{n-۲} = a_nQ_{n-۱}$$

سمت چپ برابری در این مساله، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{P_{n+۲} - P_n}{P_n} \cdot \frac{P_{n+۱} - P_{n-۱}}{P_{n+۱}} = a_{n+۲}\frac{P_{n+۱}}{P_n} \cdot a_{n+۱}\frac{P_n}{P_{n+۱}} = a_{n+۲}a_{n+۱}$$

با روشی مشابه، به این نتیجه دست می‌یابیم که سمت راست نیز برابر $a_{n+۲}$. $a_{n+۱}$ است. به‌این ترتیب، اتحاد ثابت می‌شود.

ب- داریم:

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-۱}}{Q_{k-۱}} - \frac{P_kQ_{k-۱} - Q_kP_{k-۱}}{Q_kQ_{k-۱}} = \frac{(-۱)^{k-۱}}{Q_kQ_{k-۱}}$$

در این‌جا قرار دهید $k = ۱, ۲, \ldots, n$ و با جمع جمله به جمله آن نتیجه مورد نظر به‌دست می‌آید.

ج) داریم:

$$P_{n+2}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n+2} = (a_{n+2}P_{n+1} + P_n)Q_{n-2} -$$
$$-P_{n-2}(Q_{n+1}Q_{n+2} + Q_n) = a_{n+2}(P_{n+1}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n+1}) +$$
$$+P_nQ_{n-2} - P_{n-2}Q_n = a_{n+2}\{(a_{n+1}P_n + P_{n-1})Q_{n-2} -$$
$$-P_{n-2}(a_{n+1}Q_n + Q_{n-1})\} + (a_nP_{n-1} + P_{n-2})Q_{n-2} -$$
$$-P_{n-2}(a_nQ_{n-1} + Q_{n-2}) = a_{n+1}a_{n+2}(P_nQ_{n-2} - P_{n-2}Q_n) +$$
$$+a_{n+2}(P_{n-1}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n-1}) + a_n(P_{n-1}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n-2}) =$$
$$= a_{n+1}a_{n+2}\{(a_nP_{n-1} + P_{n-2})Q_{n-2} - P_{n-2}(a_nQ_{n-1} + Q_{n-2})\} +$$
$$+a_{n+2}(-1)^n + a_n(-1)^n = (a_{n+2}a_{n+1}a_n + a_{n+2} + a_n)(-1)^n$$

د) می‌دانیم $P_n = a_nP_{n-1} + P_{n-2}$. بنابراین

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}} = a_n + \frac{1}{\frac{a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3}}{p_{n-2}}}$$
$$= a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{p_{n-3}}{p_{n-2}}} = a_n + \frac{1}{a_{n-1}} + \cdots + \frac{1}{a + \frac{p_0}{p_1}} =$$
$$= a_n + \frac{1}{a_{n-1}} + \cdots + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_0}}$$

عبارت مربوط به $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ با روشی مشابه پیدا می‌شود.

۳۵. باتوجه به نتیجه‌های مساله قبل داریم:

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0) = (a_0, a_2, \ldots, a_n) = \frac{p_n}{Q_n}$$

در نتیجه $Q_n = p_{n-1}$.

۳۱. باید ثابت کنیم:

$$p_{n+1}^2 - p_{n-1}p_{n+1} = p_n p_{n+2} - p_n^2$$

یا $p_{n+1}(p_{n+1} - p_{n-1}) = p_n(p_{n+2} - p_n)$.

اما $p_{n+1} = ap_n + p_{n-1},\ p_{n+2} = ap_{n+1} + p_n$

در نتیجه $p_{n+1} - p_{n-1} = ap_n,\ p_{n+2} - p_n = ap_{n+1}$

۳۲. بنابه فرض داریم:

$$x = \frac{1}{(a, b, \ldots, l, a, b, \ldots, l)} \cdot \frac{p_n}{Q_n} = \frac{1}{(a, b, \ldots, l)}$$

یا

$$x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{l} + \frac{p_n}{Q_n}$$

بنابراین، اگر در این کسر، l به $l + \frac{p_n}{Q_n}$ تبدیل شود، x از $\frac{p_n}{Q_n}$ به‌دست می‌آید. اما $\frac{p_n}{Q_n} = \frac{lp_{n-1} + p_{n-2}}{lQ_{n-1} + Q_{n-2}}$، بنابراین

$$x = \frac{\left(l + \frac{p_n}{Q_n}\right)p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(l + \frac{p_n}{Q_n}\right)Q_{n-1} + Q_{n-2}} = \frac{p_n Q_n + p_n p_{n-1}}{Q_n^2 + p_n Q_{n-1}}$$

۳۳. روشن است، به‌ازای $k = 0, 1$، رابطه برقرار است. فرض کنید، این رابطه به‌ازای $k = n - 1$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم به‌ازای $k = n$ نیز برقرار است. از این‌رو، فرض می‌کنیم:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{p_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

باوجود این، بنابه قاعدهٔ مربوط به محاسبهٔ p_k و Q_k، داریم:

$$\frac{p_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{b_{n-1}p_{n-2} + a_{n-1}p_{n-3}}{b_{n-1}Q_{n-2} + a_{n-1}Q_{n-3}}$$

که در آن، p_{n-2}، p_{n-3} و Q_{n-2}، Q_{n-3} مستقل از a_{n-1} و b_{n-1} است. از طرف دیگر، روشن است کسر:

$$b_0+\frac{a_1}{b_1+\ddots+\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}+\frac{a_n}{b_n}}}$$

با تبدیل b_{n-1} به $b_{n-1}+\frac{a_n}{Q_n}$ از کسر زیر به‌دست می‌آید:

$$b_0+\frac{a_1}{b_1+\ddots+\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}}$$

بنابراین، به‌ترتیب داریم:

$$b_0+\frac{a_1}{b_1+\ddots+\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}+\frac{a_n}{b_n}}}=\frac{\left(b_{n-1}+\frac{a_n}{b_n}\right)p_{n-2}+a_{n-1}p_{n-3}}{\left(b_{n-1}+\frac{a_n}{b_n}\right)Q_{n-2}+a_{n-1}Q_{n-3}}=$$

$$=\frac{b_{n-1}p_{n-2}+a_{n-1}p_{n-3}+\frac{a_n}{b_n}p_{n-2}}{b_{n-1}Q_{n-2}+a_{n-1}Q_{n-3}+\frac{a_n}{b_n}Q_{n-2}}=\frac{p_{n-1}+\frac{a_n}{b_n}p_{n-2}}{Q_{n-1}+\frac{a_n}{b_n}Q_{r-2}}=$$

$$=\frac{b_np_{n-1}+a_np_{n-2}}{b_nQ_{n-1}+a_nQ_{n-2}}=\frac{p_n}{Q_n}$$

۳۴. مقدار این کسر را با $\frac{p_n}{Q_n}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\begin{aligned}p_1&=r, & Q_1&=r+1,\\ p_2&=r(r+1), & Q_2&=r^2+r+1\end{aligned}$$

با استفاده از روش استقرای ریاضی، ثابت می‌کنیم:

$$p_n=r\frac{r^n-1}{r-1},\ Q_n=\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

این برابری به‌ازای $n = ۱$ برقرار است. فرض می‌کنیم به‌ازای $n = m$ نیز برقرار باشد. ثابت می‌کنیم، در این صورت، به‌ازای $n = m + ۱$ نیز برقرار است، داریم:

$$p_{n+۱} = b_{m+۱}p_m + a_{m+۱}p_{m-۱}$$

در این حالت، به‌دست می‌آید:

$$p_{m+۱} = (r+۱)r\frac{r^m - ۱}{r-۱} - r^۲\frac{r^{m-۱} - ۱}{r-۱} = r\frac{r^{m+۱} - ۱}{r-۱}$$

به همین ترتیب، می‌توان نتیجه گرفت:

$$Q_{m+۱} = \frac{r^{m+۲} - ۱}{r-۱}$$

۳۵. قرار دهید:

$$\frac{۱}{u_r} + \frac{۱}{u_{r+۱}} = \frac{۱}{u_r + x_r}$$

آن‌گاه، به‌دست می‌آوریم:

$$x_r = -\frac{u_r^۲}{u_r + u_{r+۱}}$$

بنابراین: $$\frac{۱}{u_۱} + \frac{۱}{u_۲} = \frac{۱}{u_۱ - \frac{u_۱^۲}{u_۱ + u_۲}}$$

به‌جز این:

$$\frac{۱}{u_۱} + \frac{۱}{u_۲} + \frac{۱}{u_۳} = \frac{۱}{u_۱} + \frac{۱}{u_۲ + x_۲} = \frac{۱}{u_۱ + x'_۲},$$

که در آن: $$x'_۲ = -\frac{u_۱^۲}{u_۱ + u_۲ + x_۲}$$

به‌این ترتیب:

$$\frac{۱}{u_۱} + \frac{۱}{u_۲} + \frac{۱}{u_۳} = \frac{۱}{u_۱ - \frac{u_۱^۲}{u_۱ + u_۲ + x_۲}} = \frac{۱}{u_۱ - \frac{u_۱^۲}{u_۱ + u_۲} - \frac{u_۲^۲}{a_۲u_۳}}$$

با استفاده از روش استقرای ریاضی، به دستور کلی نیز دست می‌یابیم.

۳۶. کسر زیر را با $\frac{p_n}{Q_n}$ نمایش می‌دهیم:

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}$$

و کسر

$$\cfrac{c_1a_1}{c_1b_1+\cfrac{c_1c_2a_2}{c_2b_2+\ddots+\cfrac{c_{n-1}c_na_n}{c_nb_n}}}$$

را برابر $\frac{p'_n}{Q'_n}$ می‌گیریم. کافی است ثابت کنیم به‌ازای هر عدد حسابی مثبت n، $\frac{p_n}{Q_n}=\frac{p'_n}{Q'_n}$. داریم:

$$\frac{p_1}{Q_1}=\frac{a_1}{b_1} \text{ و } \frac{p_2}{Q_2}=\frac{a_1b_2}{b_1b_2+a_2},\dots;$$
$$\frac{p'_1}{Q'_1}=\frac{c_1a_1}{c_1b_1} \text{ و } \frac{p'_2}{Q'_2}=\frac{c_1c_2a_1b_2}{c_1c_2(b_1b_2+a_2)},\dots$$

می‌توان قرار داد: $p_1=a_1$، $Q_1=b_1$، $p_2=a_2b_2$، $Q_2=b_1b_2+a_2$ آن‌گاه رابطهٔ زیر برقرار است (مساله ۳۳ را ببینید)

$$p_{n+1}=b_{n+1}p_n+a_{n+1}p_{n-1},\ Q_{n+1}=b_{n+1}Q_n+a_{n+1}Q_{n-1}$$

قرار دهید:

$$p'_1=c_1a_1,\quad p'_2=c_1c_2a_1b_2$$
$$Q'_1=c_1b_1,\quad Q'_2=c_1c_2(b_1b_2+a_2)$$

ثابت می‌کنیم، درآن صورت به‌ازای تمام مقدارهای n، داریم:

$$p'_n=c_1c_2\dots c_np_n,\quad Q'_n=c_1c_2\dots c_nQ_n$$

درستی این برابری را، با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم این برابری به‌ازای اندیس کوچکتر از یا، برابر n برقرار باشد، آن‌وقت درستی آن را برای

اندیس $n + ۱$ ثابت می‌کنیم. داریم:

$$p'_{n+1} = c_{n+1}b_{n+1}p_n + c_nc_{n+1}a_{n+1}p'_{n-1},$$
$$Q'_{n+1} = c_{n+1}b_{n+1}Q'_n + c_nc_{n+1}a_{n+1}Q'_{n-1}$$

از این‌رو (بنابه فرض):

$$\begin{aligned} p'_{n+1} &= c_{n+1}b_{n+1}c_1c_2\ldots c_np_n + \\ &+c_nc_{n+1}a_{n+1}c_1c_2\ldots c_{n-1}p_{n-1} = \\ &= c_1c_2\ldots c_{n+1}(b_{n+1}p_n + a_{n+1}p_{n-1}) = \\ &= c_1c_2\ldots c_{n+1}p_{n+1}\end{aligned}$$

به‌همین ترتیب،

$$Q'_{n+1} = c_1c_2\ldots c_{n+1}Q_{n+1}$$

اکنون، به‌سادگی معلوم می‌شود که:

$$\frac{p_n}{Q_n} = \frac{p'_n}{Q'_n}$$

۳۷. الف) قرار دهید

$$2\cos x - \cfrac{1}{2\cos x - \cfrac{1}{2\cos x - \cfrac{1}{2\cos x - \ddots - \cfrac{1}{2\cos x}}}}$$

داریم: $\frac{p_1}{Q_1} = 2\cos x$
بنابراین، می‌توان قرار داد:

$$p_1 = \frac{\sin 2x}{\sin x} \quad Q_1 = \frac{\sin x}{\sin x}$$

به‌جز این $\frac{p_۲}{Q_۲} = ۲\cos x - \frac{۱}{۲\cos x} = \frac{۴\cos^۲ x - ۱}{\cos^۲ x}$ درنتیجه، می‌توان فرض کرد:

$$p_۲ = \frac{\sin ۳x}{\sin x},\ Q_۲ = \frac{\sin ۲x}{\sin x}$$

اکنون، ثابت می‌کنیم، به‌ازای همهٔ مقدارهای n داریم: $p_n = \frac{\sin(n+۱)x}{\sin x}$ و $Q_n = \frac{\sin nx}{\sin x}$.

فرض کنید، این برابری‌ها برای اندیس‌های کوچکتر یا مساوی n برقرار باشد ثابت می‌کنیم در این صورت، به‌ازای $n+۱$ نیز صادق است. داریم (مساله ۳۳ را ببینید)

$$p_{n+۱} = ۲\cos x\frac{\sin(n+۱)x}{\sin x} - \frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{۱}{\sin x}\sin(n+۲)x$$

به‌همین ترتیب، ثابت می‌کنیم $Q_{n+۱} = \frac{\sin(n+۱)x}{\sin x}$ که درنتیجه رابطه زیر به‌ازای هر عدد حسابی مثبت n برقرار است:

$$\frac{p_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+۱)x}{\sin nx}$$

ب) کسر مسلسل سمت راست برابری را برای $\frac{p_n}{Q_n}$ نمایش می‌دهیم. باید ثابت کنیم:

$$\frac{p_n}{Q_n} = ۱ + b_۲ + b_۲b_۳ + \ldots + b_۲b_۳\ldots b_n$$

داریم: $\frac{p_۱}{Q_۱} = \frac{۱}{۱},\ \frac{p_۲}{Q_۲} = \frac{b_۲+۱}{۱}$

بنابراین، می‌توان $p_۱ = ۱$، $Q_۱ = ۱$، $p_۲ = b_۲ + ۱$ و $Q_۲ = ۱$ اختیار کرد. در آن صورت، با استفاده از روش استقرای ریاضی، به‌سادگی ثابت می‌شود:

$$p_n = ۱ + b_۲ + b_۲b_۳ + \ldots + b_۲b_۳\ldots b_n,\quad Q_n = ۱,$$

۳۸. الف) به‌ترتیب داریم:

$$\sin a + \sin b + \sin c = \sin(a+b+c) =$$

$$= (\sin a + \sin b) + [\sin c - \sin(a+b+c)] =$$
$$= ۲\sin\frac{a+b}{۲}\cos\frac{a-b}{۲} - ۲\sin\frac{a+b}{۲}\cos\frac{a+b+۲c}{۲} =$$
$$= ۲\sin\frac{a+b}{۲}\left(\cos\frac{a-b}{۲} - \cos\frac{a+b+۲c}{۲}\right) =$$
$$= ۴\sin\frac{a+b}{۲}\sin\frac{a+c}{۲}\sin\frac{b+c}{۲}$$

ب) شبیه بخش الف، به نتیجه می‌رسد.

۳۹. این مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$\tan a + \tan b + \tan c$$

داریم:

$$\tan a + \tan b + \tan c = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} + \frac{\sin c}{\cos c} =$$
$$= \frac{\sin(a+b)\cos c + \sin c \cos a \cos b}{\cos a \cos b \cos c} =$$
$$= \frac{\sin(a+b)\cos c + \cos(a+b)\sin c - \cos(a+b)\sin c + \sin c \cos a \cos b}{\cos a \cos b \cos c}$$
$$= \frac{\sin(a+b+c) + \sin c[\cos a \cos b - \cos(a+b)]}{\cos a \cos b \cos c} =$$
$$= \frac{\sin(a+b+c) + \sin a \sin b \sin c}{\cos a \cos b \cos c}$$

که از آن‌جا، برابری مورد نظر نتیجه می‌شود.

۴۰. با فرض $a = A$، $b = B$، $c = C$ و $a+b+c = A+B+C = \pi$ برابری‌های الف، ب و ج از مساله‌های ۳۸ (الف و ب) و ۳۹ به‌دست می‌آید.

اکنون بخش د) را ثابت می‌کنیم. سمت چپ برابری را به این صورت می‌نویسیم:

$$S = \tan\frac{A}{۲}\tan\frac{B}{۲} + \tan\frac{C}{۲}\left(\tan\frac{A}{۲} + \tan\frac{B}{۲}\right)$$

اما چون

$$A + B + C = \pi$$

داریم:

$$\tan\frac{C}{۲}=\tan\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{A+B}{۲}\right)=\cot\frac{A+B}{۲}=\frac{۱}{\tan\frac{A+B}{۲}}$$

بنابراین ۱ $\;=\; S=\tan\frac{A}{۲}\tan\frac{B}{۲}+\dfrac{\tan\frac{A}{۲}+\tan\frac{B}{۲}}{\tan\frac{A+B}{۲}}$

زیرا $\tan\frac{A+B}{۲}=\dfrac{\tan\frac{A}{۲}+\tan\frac{B}{۲}}{۱-\tan\frac{A}{۲}\tan\frac{B}{۲}}$

ه) درواقع

$$\sin ۲A+sin۲B+\sin ۲C=\sin ۲A+۲\sin(B+C)\cos(B-C)$$
$$=۲\sin A\cos A+۲\sin A\cos(B-C)=۲\sin A\times$$
$$\times[\cos A+\cos(B-C)]=۴\sin A\sin B\sin C$$

۴۱. الف) کافی است بافرض

$$\cos a+\cos b+\cos c-۱-۴\sin\frac{a}{۲}\sin\frac{b}{۲}\sin\frac{c}{۲}=۰$$

رابطه‌ای بین a و b و c پیدا کنیم که با آن، حل مساله به پایان می‌رسد. عبارت سمت چپ برابری را به‌صورت مناسبی قابل محاسبه لگاریتمی می‌کنیم، یعنی تلاش می‌کنیم آن را به‌صورت ضرب تابع‌های مثلثاتی کمیت‌های a، b و c بنویسیم. داریم:

$$\cos a+\cos b=۲\cos\frac{a+b}{۲}\cos\frac{a-b}{۲}=$$
$$=۲\left(\cos^۲\frac{a}{۲}\cos^۲\frac{b}{۲}-\sin^۲\frac{a}{۲}\sin^۲\frac{b}{۲}\right)=\cos c-۱=-۲\sin^۲\frac{c}{۲}$$

بنابراین، عبارت سمت چپ برابری، به‌این صورت درمی‌آید:

$$۲\cos^۲\frac{a}{۲}\cos^۲\frac{b}{۲}-۲\sin^۲\frac{a}{۲}\sin^۲\frac{b}{۲}-۲\sin^۲\frac{c}{۲}-$$

$$-۴\sin\frac{a}{۲}\sin\frac{b}{۲}\sin\frac{c}{۲} = ۲\left[\cos^۲\frac{a}{۲}\cos^۲\frac{b}{۲} - \left(\sin^۲\frac{a}{۲}\sin^۲\frac{b}{۲} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+۲\sin\frac{a}{۲}\sin\frac{b}{۲}\sin\frac{c}{۲} + \sin^۲\frac{c}{۲}\right)\right] = ۲\left[\cos^۲\frac{a}{۲}\cos^۲\frac{b}{۲} -\right.$$

$$\left.-\left(\sin\frac{a}{۲}\sin\frac{b}{۲} + \sin\frac{c}{۲}\right)^۲\right] = ۲\left[\left(\cos\frac{a}{۲}\cos\frac{b}{۲} + \sin\frac{a}{۲}\sin\frac{b}{۲}\right) +\right.$$

$$\left.+\sin\frac{c}{۲}\right]\left[\left(\cos\frac{a}{۲}\cos\frac{b}{۲} - \sin\frac{a}{۲}\sin\frac{b}{۲}\right) - \sin\frac{c}{۲}\right] =$$

$$= ۲\left(\cos\frac{a-b}{۲} + \sin\frac{c}{۲}\right)\left(\cos\frac{a+b}{۲} - \sin\frac{c}{۲}\right) =$$

$$= ۲\left[\cos\frac{a-b}{۲} + \cos\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{c}{۲}\right)\right]\left[\cos\frac{a+b}{۲} - \cos\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{c}{۲}\right)\right] =$$

$$-۸\sin\frac{\pi+b+c-a}{۴}\sin\frac{\pi+a+c-b}{۴}\sin\frac{\pi+a+b-c}{۴}\times$$

$$\times\sin\frac{a+b+c-\pi}{۴}$$

بنابه فرض، این عبارت باید برابر صفر و درنتیجه، دست‌کم یکی از عامل‌های ضرب، برابر صفر باشد. اما از برابری $\sin\alpha = ۰$ نتیجه می‌گیریم $\alpha = k\pi$ (که k هر عدد درست می‌تواند باشد). بنابراین، دست‌کم یکی از چهار رابطهٔ زیر بین a، b و c وجود دارد که در رابطهٔ اصلی صدق می‌کند:

$$a+b+c = (۴k+۱)\pi,\ a+b-c = (۴k-۱)\pi$$

$$a+c-b = (۴k-۱)\pi,\ b+c-a = (۴k-۱)\pi$$

ب) داریم (مساله ۳۰ را ببینید):

$$\tan a + \tan b + \tan c - \tan a\tan b\tan c = \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a\cos b\cos c}$$

بنابه شرط‌های داده شده:

$$a+b+c = k\pi \text{ و } \sin(a+b+c) = ۰$$

ب) عبارت اصلی را تبدیل می‌کنیم، داریم:

$$1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c=$$
$$=1-\cos^2 a-\cos^2 b-(\cos^2 c-2\cos a\cos b\cos c+\cos^2 a\cos^2 b)+$$
$$+\cos^2 a\cos^2 b=1-\cos^2 a-\cos^2 b-(\cos c-\cos a\cos b)^2+$$
$$+\cos^2 a\cos^2 b=(1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b)-(\cos c-\cos a\cos b)^2=$$
$$=(\sin a\sin b-\cos c+\cos a\cos b)(\sin a\sin b+\cos c-\cos a\cos b)=$$
$$=[\cos c-\cos(a+b)][\cos(a-b)-\cos c]=$$
$$=4\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}$$

درنتیجه، دست‌کم یکی از این رابطه‌ها برقرار است:

$$a+b+c=2k\pi, a+b-c=2k\pi,\ a+c-b=2k\pi,$$
$$b+c-a=2k\pi$$

۴۲. قرار دهید:

$$x=\tan\frac{\alpha}{2} \text{ و } y=\tan\frac{\beta}{2} \text{ و } z=\tan\frac{\gamma}{2}$$

آن‌گاه $\tan\alpha=\frac{2x}{1-x^2}$، $\tan\beta=\frac{2y}{1-y^2}$ و $\tan\gamma=\frac{2z}{1-z^2}$ و برابری فرض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

اگر $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}=1$
آن وقت، برابری اخیر را به این صورت می‌نویسیم:

$$\tan\frac{\alpha}{2}\left(\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\right)-\left(1-\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}\right)=0$$

دو طرف برابری را بر $\tan\frac{\beta}{۲}\tan\frac{\gamma}{۲} - ۱$ تقسیم می‌کنیم:

$$\tan\frac{\alpha}{۲}\tan\frac{\beta+\gamma}{۲} - ۱ = ۰,\ \tan\frac{\alpha}{۲} = \cot\frac{\beta+\gamma}{۲} = \tan\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{\beta+\gamma}{۲}\right)$$

از این‌رو: $\frac{\alpha}{۲} + \frac{\beta+\gamma}{۲} - \frac{\pi}{۲} = k\pi$
(اگر تانژانت‌های دو زاویه برابر باشند، تفاضل آن دو زاویه مضربی از π است) و

$$\alpha + \beta + \gamma = (۲k + ۱)\pi$$

و از این‌جا، اثبات کامل می‌شود (مساله ۴۰ را ببینید.)

۴۳. قرار دهید: $a = \tan\alpha$، $b = \tan\beta$ و $c = \tan\gamma$. در این صورت

$$\frac{b-c}{۱+bc} = \frac{\tan\beta - \tan\gamma}{۱+\tan\beta\tan\gamma} = \tan(\beta-\gamma)$$

و برابری هم‌ارز است با

$$\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)+\tan(\alpha-\beta) = \tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha)\tan(\alpha-\beta)$$

اگر فرض کنیم $x = \beta - \gamma$، $y = \gamma - \alpha$ و $z = \alpha - \beta$ سرانجام، به‌دست می‌آید:

$$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x\tan y\tan z$$

اگر $x + y + z = ۰$، آن‌وقت

$$\tan(x+y) = \tan z,\ \frac{\tan x + \tan y}{۱ - \tan x\tan y} = -\tan z$$

بنابراین، درستی برابری ثابت می‌شود.

روشن است که دو مسالهٔ اخیر را می‌توان با تبدیل‌های مستقیم عبارت‌های جبری، بررسی و حل کرد.

۴۴. داریم:

$$\tan ۳\alpha = \frac{\sin ۳\alpha}{\cos ۳\alpha} = \frac{\sin\alpha(۳ - ۴\sin^۲\alpha)}{\cos\alpha(۱ - ۴\sin^۲\alpha)} = \tan\alpha\frac{۳ - ۴\sin^۲ x}{۱ - ۴\sin^۲ x}$$

هم صورت و هم مخرج این کسر را بر $\cos^2 \alpha$ تقسیم می‌کنیم و به‌جای $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ قرار می‌دهیم $1 + \tan^2 \alpha$؛ نتیجه می‌شود:

$$\tan 3\alpha = \tan \alpha \frac{3 - \tan^2 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha} = \tan \alpha \frac{\sqrt{3} + \tan \alpha}{1 - \sqrt{3}\tan \alpha} - \frac{\sqrt{3} - \tan \alpha}{1 + \sqrt{3}\tan \alpha}$$

بنابراین $\tan 3\alpha = \tan \alpha \tan\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \tan\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$

۴۵. دو طرف برابری داده شده را در $a + b$ ضرب می‌کنیم و به‌جای عدد یک در سمت راست برابری، $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2$ را جایگزین می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + \frac{b}{a} \sin^4 \alpha + \frac{a}{b} \cos^4 \alpha = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

و از آنجا، به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{b}{a} \sin^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \frac{a}{b} \cos^4 \alpha = 0;$$

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}} \sin^2 \alpha - \sqrt{\frac{a}{b}} \cos^2 \alpha\right)^2 = 0;$$

$$\frac{b}{a} \sin^4 \alpha = \frac{a}{b} \cos^4 \alpha;$$

یا $\gamma = \frac{\cos^4 \alpha}{b^2} = \frac{\sin^4 \alpha}{a^2}$ که با قرار دادن آن، در برابری اصلی، به‌دست می‌آید:

$$\lambda = \frac{1}{(a + b)^2}$$

بنابراین: $\frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3} = \frac{a}{(a + b)^4} + \frac{b}{(a + b)^4} = \frac{1}{(a + b)^3}$

۴۶. از برابری دوم داریم:

$$(a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \ldots + a_n \cos \alpha_n) \cos \theta -$$

$$-(a_1 \sin \alpha_1 - a_2 \sin \alpha_2 + \ldots + a_n \sin \alpha_n) \sin \theta = 0$$

باتوجه به برابری اول و این مطلب که $\sin\theta \neq ۰$، به‌دست می‌آید:

$$a_۱ \sin\alpha_۱ - a_۲ \sin\alpha_۲ + \ldots + a_n \sin\alpha_n = ۰ \qquad (*)$$

برابری اول را در $\cos\lambda$ و برابری $(*)$ را در $\sin\lambda$ ضرب می‌کنیم و نتیجهٔ دوم را از نتیجهٔ اول کم می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$a_۱ \cos(\alpha_۱ + \lambda) + a_۲ \cos(\alpha_۲ + \lambda) + \ldots + a_n \cos(\alpha_n + \lambda) = ۰$$

۴۷. روشن است که سمت چپ برابری، به‌عبارت زیر قابل تبدیل است:

$$(\tan\beta - \tan\gamma) + (\tan\gamma - \tan\alpha) + (\tan\alpha - \tan\beta) = ۰$$

۴۸. الف) داریم: $r_a - r = \dfrac{s}{p-a} - \dfrac{s}{p} = \dfrac{sa}{p(p-a)}$

بنابراین: $\dfrac{a^۲}{r_a - r} = \dfrac{ap(p-a)}{s}$

در نتیجه:

$$w = \frac{a^۲}{r_a - r} + \frac{b^۲}{r_b - r} + \frac{c^۲}{r_c - r} = \frac{p}{s}\{a(p-a) + b(p-b) + c(p-c)\}$$

اما

$$s^۲ = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

از این‌رو:

$$w = s\left\{\frac{a}{(p-b)(p-c)} + \frac{b}{(p-a)(p-c)} + \frac{c}{(p-a)(p-b)}\right\} =$$

$$= s\left\{\frac{(p-b)+(p-c)}{(p-b)(p-c)} + \frac{(p-a)+(p-c)}{(p-a)(p-c)} +\right.$$

$$\left. + \frac{(p-a)+(p-b)}{(p-a)(p-b)}\right\} = ۲(r_a + r_b + r_c)$$

ب) داریم (مساله ۹ را ببینید):

$$\sigma = \frac{a^۲ r_a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^۲ r_b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^۲ r_c}{(c-a)(c-b)} = s \times$$

$$\times\left\{\frac{a^۲}{(p-a)(a-b)(a-c)}+\frac{b^۲}{(p-b)(b-c)(b-a)}+\frac{c^۲}{(p-c)(c-a)(c-b)}\right\}$$

$$\frac{a^۲}{(p-a)(a-b)(a-c)}+\frac{b^۲}{(p-b)(b-a)(b-c)}+$$
$$+\frac{c^۲}{(p-c)(c-a)(c-b)}=\frac{p^۲}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

بنابراین

$$\sigma=\frac{sp^۲}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{sp^۳}{s^۲}=\frac{p^۳}{s}=\frac{p^۲}{r}$$

ج) نتیجه می‌گیریم:

$$r_a+r_b+r_c=s\left(\frac{۱}{p-a}+\frac{۱}{p-b}+\frac{۱}{p-c}\right)=\frac{s(ab+ac+bc-p^۲)}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

به‌جز این:

$$\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}=\frac{۱}{s}\{a(p-a)+b(p-b)+c(p-c)\}=$$
$$=\frac{۱}{s}(۲p^۲-a^۲-b^۲-c^۲)=\frac{۲}{s}(-p^۲+ab+ac+bc)$$

و اثبات قضیه روشن است.

د) مجموع اول را در نظر بگیرید:

$$\sigma=\frac{۱}{s^۲}\left\{\frac{bc(p-a)^۲}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac(p-b)^۲}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab(p-c)^۲}{(c-a)(c-b)}\right\}=$$
$$=\frac{۱}{s^۲}\left\{p^۲\left[\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}\right]-\right.$$
$$-۲pabc\left[\frac{۱}{(a-b)(a-c)}+\frac{۱}{(b-a)(b-c)}+\frac{۱}{(c-a)(c-b)}\right]+$$
$$\left.+abc\left[\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}\right]\right\}$$

اما (مسالهٔ ۸ را ببینید):

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0,$$
$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=0$$

بنابراین: $\sigma=\frac{p^2}{s^2}\left[\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}\right]$

به‌جز این:

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=$$
$$=abc\left\{\left[\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{(0-a)(0-b)(0-c)}\right]+\frac{1}{abc}\right\}=1$$

بنابراین $\sigma=\frac{p^2}{s^2}=\frac{1}{r^2}$.

مجموع دوم را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$\sigma=\frac{1}{r_ar_br_c}\left\{\frac{a^2r_a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2r_b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2r_c}{(c-a)(c-b)}\right\}=$$
$$=\frac{s}{r_ar_br_c}\left\{\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(p-a)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)(p-b)}+\right.$$
$$\left.\frac{c^2}{(c-b)(c-a)(p-c)}\right\}$$

اما

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-p)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)(b-p)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(c-p)}+$$
$$+\frac{p^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}=0$$

بنابراین:

$$\sigma = \frac{s(p-a)(p-b)(p-c)}{s^۳} \cdot \frac{p^۲}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p^۲}{s^۲} = \frac{۱}{r^۲}$$

ه) داریم:

$$\sigma = \frac{ar_a}{(a-b)(a-c)} + \frac{br_b}{(b-c)(b-a)} + \frac{cr_c}{(c-a)(c-b)} =$$
$$= s\left\{\frac{a}{(a-b)(a-c)(p-a)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)(p-b)} + \right.$$
$$\left. + \frac{c}{(c-a)(c-b)(p-c)}\right\} =$$
$$-s\left\{\frac{a}{(a-b)(a-c)(a-p)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)(p-b)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)(c-p)} + \right.$$
$$\left. + \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)} - \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}\right\} =$$
$$= \frac{sp}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p^۲}{s} = \frac{p}{r}$$

علاوه بر این:

$$\sigma = \frac{(b+c)r_a}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c+a)r_b}{(b-a)(b-c)} + \frac{(c+b)r_c}{(c-a)(c-b)} =$$
$$= s\left\{\frac{(b+c)}{(a-b)(a-c)(p-a)} + \frac{(c+a)}{(b-c)(b-a)(p-b)} + \frac{(a+b)}{(c-a)(c-b)(p-c)}\right\}$$
$$= s(a+b+c)\left\{\frac{۱}{(a-b)(a-c)(p-a)} + \right.$$
$$\left. \frac{۱}{(b-c)(b-a)(p-b)} + \frac{۱}{(c-a)(c-b)(p-c)}\right\} -$$
$$-s\left\{\frac{a}{(a-b)(a-c)(p-a)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)(p-b)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)(p-c)}\right\}$$

اما

$$\frac{۱}{(a-b)(a-c)(a-p)} + \frac{۱}{(b-c)(b-a)(b-p)} +$$
$$+ \frac{۱}{(c-a)(c-b)(c-p)} + \frac{۱}{(p-a)(p-b)(p-c)} = ۰$$

بنابراین، عبارت داخل آکولاد اول برابر $\frac{۱}{(p-a)(p-b)(p-c)}$ است. عبارت داخل آکولاد دوم برابر $\frac{p^۲}{s^۲}$ است.

از این‌جا:

$$\sigma = \frac{s(a+b+c)}{(p-a)(p-b)(p-c)} - \frac{p^۲}{s} - \frac{۲p^۲}{s} - \frac{p^۲}{s} = \frac{p^۲}{s} = \frac{p}{r}$$

۴۹. اتحاد مفروض را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\sin(a+b-c-d)\sin(a-b) = \sin(a-c)\sin(a-d) - \\ - \sin(b-c)\sin(b-d)$$

با استفاده از دستور

$$\sin A \sin B = \frac{۱}{۲}\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$$

به‌دست می‌آید:

$$\sin(a+b-c-d)\sin(a-b) = \frac{۱}{۲}\{\cos(۲b-c-d) - \cos(۲a-c-d)\},$$

$$\sin(a-c)\sin(a-d) = \frac{۱}{۲}\{\cos(c-d) - \cos(۲a-c-d)\},$$

$$\sin(b-c)\sin(b-d) = \frac{۱}{۲}\{\cos(c-d) - \cos(۲b-c-d)\}$$

و اثبات قضیه روشن است.

۵۰. الف) داریم:

$$۱ + \tan^۲\frac{\theta}{۲} = \frac{۱}{\cos^۲\frac{\theta}{۲}} = \frac{۲}{۱+\cos\theta} = \frac{b+c}{p}$$

که در آن: $a+b+c = ۲p$. بنابراین

$$۱ + \tan^۲\frac{\theta}{۲} + ۱ + \tan^۲\frac{\phi}{۱} + ۱ + \tan^۲\frac{\psi}{۲} = \frac{(b+c)+(a+c)+(a+b)}{p} = ۴$$

و درنتیجه: $\tan^۲\frac{\theta}{۲} + \tan^۲\frac{\phi}{۲} + \tan^۲\frac{\psi}{۲} = ۱$

ب) $\tan^{۲}\frac{\theta}{۲}=\frac{b+c}{p}-۱=\frac{p-a}{p}$

بنابراین: $\tan\frac{\theta}{۲}\tan\frac{\varphi}{۲}\tan\frac{\psi}{۲}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^{۳}}}$

اما همان‌طور که می‌دانیم: $\tan\frac{\theta}{۲}\tan\frac{\varphi}{۲}\tan\frac{\psi}{۲}=\tan\frac{A}{۲}\tan\frac{B}{۲}\tan\frac{C}{۲}$

۵۱. سمت چپ این برابری را، می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$\frac{۱}{\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)}\{\sin(b-c)-\sin(a-c)+\sin(a-b)\}$$

اما داریم:

$$\sin(b-c)-\sin(a-c)=۲\sin\frac{b-a}{۲}\cos\frac{b+a-۲c}{۲}$$

بنابراین، عبارت داخل پرانتز برابر است با:

$$۲\sin\frac{b-a}{۲}\cos\frac{b+a-۲c}{۲}-۲\sin\frac{b-a}{۲}\cos\frac{b-a}{۲}=$$
$$=۴\sin\frac{b-a}{۲}\sin\frac{b-c}{۲}\sin\frac{c-a}{۲}$$

اما

$$\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)=$$
$$=۸\sin\frac{a-b}{۲}\sin\frac{a-c}{۲}\sin\frac{b-c}{۲}\cos\frac{a-b}{۲}\cos\frac{a-c}{۲}\cos\frac{b-c}{۲}$$

اثبات قضیه روشن است.

۵۲. الف) کسر سمت چپ برابری، به‌این صورت است:

$$\frac{۱}{\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)}\{\sin a\sin(b-c)+\sin b\sin(c-a)+$$
$$+\sin c\sin(a-b)\}=\frac{۱}{\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)}\cdot\sum\sin a\sin(b-c)$$

که در آن، عمل جمع بر تمام عبارت‌های حاصل از عبارت زیر علامت جمع، با تبدیل دوری انجام می‌شود. اما:

$$\sin a\sin(b-c)=\frac{۱}{۲}[\cos(a-b+c)-\cos(a+b-c)]$$

بنابراین داریم:

$$\sum \sin a \sin(b-c) = \frac{۱}{۲}\{\cos(a+c-b) - \cos(a+b-c) + \cos(a+b-c)$$
$$- \cos(b+c-a) + \cos(c+b-a) - \cos(c+a-b)\} = ۰$$

ب) این اتحاد را می‌توان مانند حالت الف ثابت کرد. اما می‌توان بلافاصله به رابطه‌ای مشابه رابطه قسمت الف دست یافت. برای این منظور، a را به $\frac{\pi}{۲} - a$، b را به $\frac{\pi}{۲} - b$ و سرانجام c را به $\frac{\pi}{۲} - c$ تبدیل کنید.

۵۳. الف) باید ثابت کنیم که $\sum \sin a \sin(b-c) \cos(b+a-c) = ۰$ در این‌جا عمل جمع بر تمام عبارت‌های حاصل از عبارت اصلی با یک تبدیل دوری انجام می‌شود. اما:

$$\sin a \sin(b-c) = \frac{۱}{۲}\{\cos(a-b+c) - \cos(a+b-c)\}$$

بنابراین:

$$\sum \sin a \sin(b-c) \cos(b+c-a) = \frac{۱}{۲}\sum \cos(b+c-a) \times$$
$$\times \cos(a-b+c) - \frac{۱}{۲}\sum \cos(a+b-c)\cos(b+c-a) =$$
$$= \frac{۱}{۴}\{\cos ۲c - \cos ۲b + \cos ۲a - \cos ۲c + \cos ۲b - \cos ۲a +$$
$$+ \cos(۲b - ۲a) - \cos(۲c - ۲a) + \cos(۲c - ۲b) - \cos(۲a - ۲b) +$$
$$+ \cos(۲a - ۲c) - \cos(۲b - ۲c)\} = ۰$$

ب) این اتحاد را می‌توان از اتحاد الف با تبدیل a به $\frac{\pi}{۲} - a$، b به $\frac{\pi}{۲} - b$ و c به $\frac{\pi}{۲} - c$ به‌دست آورد.

ج) به‌طور مشابه به‌دست می‌آید:

$$\sum \sin a \sin(b-c) \sin(b+c-a) = \frac{۱}{۲}\{\sin ۲(b-a) + \sin ۲(c-b) + \sin ۲(a-c)\}$$

تنها اثبات این مطلب باقی می‌ماند که:

$$\frac{۱}{۲}\{\sin ۲(b-a) + \sin ۲(c-b) + \sin ۲(a-c)\} =$$
$$= ۲\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)$$

د) مشابه قسمت ج ثابت می‌شود یا a را به $a-\frac{\pi}{2}$، b را به $b-\frac{\pi}{2}$ و c را به $c-\frac{\pi}{2}$ تبدیل کنید.

۵۴. الف) داریم:

$$\begin{aligned}&\sum \sin^3 A\cos(B-C)=\sum \sin^2 A\sin A\cos(B-C)=\\&=\frac{1}{2}\sum \sin^2 A[\sin(A+B-C)+\sin(A-B+C)\}\end{aligned}$$

اما چون $A+B+C=\pi$، بنابراین

$$\begin{aligned}&\sum \sin^2 A\cos(B-C)=\frac{1}{2}\sum \sin^2 A(\sin 2C+\sin 2B)=\\&=\sum \sin 2A(\sin B\cos B+\sin C\cos C)=\\&=\sin^2 A\sin B\cos B+\sin^2 A\sin C\cos C+\sin^2 B\sin C\cos C+\\&+\sin^2 B\sin A\cos A+\sin^2 C\cos A\sin A+\sin^2 C\sin B\cos B=\\&=\sin A\sin B(\sin A\cos B+\cos A\sin B)+\\&+\sin A\sin C(\sin A\cos C+\cos A\sin C)+\sin B\sin C\times\\&\times(\sin B\cos C+\cos B\sin C)=\sin A\sin B\sin(A+B)+\\&+\sin A\sin C\sin(A+C)+\sin B\sin C\sin(B+C)=\\&=3\sin A\sin B\sin C\end{aligned}$$

ب) داریم:

$$\begin{aligned}&\sum \sin^3 A\sin(B-C)=\sum \sin^2 A\sin A\sin(B-C)=\\&=\sum \sin^2 A\sin(B+C)\sin(B-C)=\frac{1}{2}\sum \sin^2 A[\cos 2C-\cos^2 B]\\&=\sum \sin^2 A(\sin^2 B-\sin^2 C)=\\&=\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C\sum\left(\frac{1}{\sin^2 C}-\frac{1}{\sin^2 B}\right)=\\&=\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C\left\{\frac{1}{\sin^2 C}-\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 A}-\right.\end{aligned}$$

$$-\frac{۱}{\sin^{۲} C}+\frac{۱}{\sin^{۲} B}-\frac{۱}{\sin^{۲} A}\Bigg\} = ۰$$

۵۵. الف) داریم:

$$\sin ۳x = ۳\sin x - ۴\sin^{۳} x$$

بنابراین:

$$\sum \sin ۳A \sin^{۳}(B-C) = \frac{۱}{۴}\sum \sin ۳A\{۳\sin(B-C) -$$
$$-\sin ۳(B-C)\} = \frac{۳}{۴}\sum \sin ۳(B+C)\sin(B-C) -$$
$$-\frac{۱}{۴}\sum \sin ۳(B+C)\sin ۳(B-C) = \frac{۳}{۸}\sum\{\cos(۲B+۴C) -$$
$$-\cos(۴B+۲C)\} - \frac{۱}{۸}\sum(\cos ۶C - \cos ۶B) =$$
$$= \frac{۳}{۸}\{\cos ۲(B+۲C) - \cos ۲(C+۲B) + \cos ۲(C+۲A) -$$
$$-\cos ۲(A+۲C) + \cos ۲(A+۲B) - \cos ۲(B+۲A)\} -$$
$$-\frac{۱}{۸}\{\cos ۶C - \cos ۶B + \cos ۶A - \cos ۶C + \cos ۶B - \cos ۶A\}$$

اما $\cos(۲B+۴C) = \cos(۲B+۴A)$

$$\cos(۲C+۴B) = \cos(۲C+۴A),\ \cos(۲A+۴C) = \cos(۲A+۴B)$$

از این‌رو، سرانجام به‌دست می‌آید.

$$\sum \sin ۳A \sin^{۳}(B-C) = ۰$$

ب) از آن‌جاکه $\cos ۳x = ۴\cos^{۳} x - ۳\cos x$ داریم:

$$\sum \sin ۳A \cos^{۳}(B-C) = \frac{۱}{۴}\sum \sin ۳(B+C)\{\cos ۳(B-C) +$$
$$+۳\cos(B-C)\} = \frac{۱}{۴}\sum \sin ۳(B+C)\cos ۳(B-C) +$$
$$+\frac{۳}{۴}\sum \sin ۳(B+C)\cos(B-C) = \frac{۱}{۸}\sum(\sin ۶B + \sin ۶C) + \frac{۳}{۸}\sum \times$$

$$\times\{\sin(۴B+۲C)+\sin(۲B+۴C)\}=\frac{۱}{۴}(\sin ۶A+\sin ۶B+\sin ۶C)=$$
$$\sin ۳A\sin ۳B\sin ۳C$$

فصل ۳

۱. درستی این اتحاد را می‌توان با بررسی و تحقیق، برای مثال، با روش زیر ثابت کرد. باتوجه به دستورهای (ابتدای فصل مربوط به «مسالهها» را ببینید)، نتیجه می‌گیریم:

$$\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۳}{۲}}+\sqrt{\frac{۱}{۲}},\ \sqrt{۲-\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۳}{۲}}-\sqrt{\frac{۱}{۲}}$$

بنابراین، داریم:

$$\frac{۲+\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}=\frac{\left(\sqrt{\frac{۳}{۲}}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}\right)^۲}{\sqrt{۲}+\sqrt{\frac{۳}{۲}}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}}=\frac{(۱+\sqrt{۳})^۲\cdot\sqrt{۲}}{۲(۳+\sqrt{۳})}=$$
$$=\frac{(۱+\sqrt{۳})^۲\cdot\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}(۱+\sqrt{۳})}=\frac{۱+\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}}$$

به‌همین ترتیب، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}=\frac{\left(\sqrt{\frac{۳}{۲}}-\sqrt{\frac{۱}{۲}}\right)^۲}{\sqrt{۲}-\sqrt{\frac{۳}{۲}}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}}=\frac{(۱-\sqrt{۳})^۲\cdot\sqrt{۲}}{۲(۳-\sqrt{۳})}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۶}}$$

در نتیجه

$$\left(\frac{۲+\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}+\frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}\right)^۲=\left(\frac{۱+\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}}+\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۶}}\right)^۲=$$
$$=\left(\frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}}\right)^۲=۲$$

۲. این اتحادها را با بررسی مستقیم ثابت می‌کنیم:

الف) فرض کنید $\alpha = \sqrt[۳]{۲}$ یعنی $\alpha^۳ = ۲$، کافی است ثابت کنیم:

$$(۱ - \alpha + \alpha^۲)^۳ = ۹(\alpha - ۱)$$

داریم:

$$(۱ - \alpha + \alpha^۲) = ۱ + \alpha^۲ + \alpha^۴ + ۲\alpha^۲ - ۲\alpha^۳ - ۲\alpha = ۳(\alpha^۲ - ۱)$$

از آن‌جاکه:

$$\alpha^۳ = ۲,\ \alpha^۴ = ۲\alpha$$

درنتیجه:

$$(۱ - \alpha + \alpha^۲)^۳ = ۳(\alpha^۲ - \alpha + ۱)(\alpha^۲ - ۱) =$$
$$= ۳(\alpha^۲ - \alpha + ۱)(\alpha + ۱)(\alpha - ۱) = ۳(\alpha^۳ + ۱)(\alpha - ۱) = ۹(\alpha - ۱)$$

ب) باید ثابت کنیم:

$$(\sqrt[۳]{۲} + \sqrt[۳]{۲۰} - \sqrt[۳]{۲۵})^۲ = ۹(\sqrt[۳]{۵} - \sqrt[۳]{۴})$$

عبارت سمت چپ برابری را به توان دو می‌رسانیم، به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[۳]{۴} + \sqrt[۳]{۴۰۰} + \sqrt[۳]{۶۲۵} + ۲\sqrt[۳]{۴۰} - ۲\sqrt[۳]{۵۰} - ۲\sqrt[۳]{۵۰۰} =$$
$$= \sqrt[۳]{۴} + ۲\sqrt[۳]{۵۰} + ۵\sqrt[۳]{۵} + ۴\sqrt[۳]{۵} - ۲\sqrt[۳]{۵۰} - ۱۰\sqrt[۳]{۴} = ۹(\sqrt[۳]{۵} - \sqrt[۳]{۴})$$

ج) مانند قسمت ب حل می‌شود.

د) باید ثابت کنیم:

$$\left(\frac{\sqrt[۴]{۵} + ۱}{\sqrt[۴]{۵} - ۱}\right)^۴ = \frac{۳ + ۲\sqrt[۴]{۵}}{۳ - ۲\sqrt[۴]{۵}}$$

قرار دهید: $\alpha = \sqrt[۴]{۵}$ داریم:

$$\left(\frac{\sqrt[۴]{۵} + ۱}{\sqrt[۴]{۵} - ۱}\right)^۴ = \frac{(\alpha + ۱)^۴}{(\alpha - ۱)^۴} = \frac{۱ + ۴\alpha + ۶\alpha^۲ + ۴\alpha^۳ + \alpha^۴}{۱ - ۴\alpha + ۶\alpha^۲ - ۴\alpha^۳ + \alpha^۴} =$$
$$= \frac{۳ + ۲\alpha + ۳\alpha^۲ + ۲\alpha^۳}{۳ - ۲\alpha + ۳\alpha^۲ - ۲\alpha^۳}$$

زیرا $\alpha^{4} = 5$.

علاوه بر این:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}\right)^{4} = \frac{3+2\alpha+\alpha^{2}(3+2\alpha)}{3-2\alpha+\alpha^{2}(3-2\alpha)} = \frac{3+2\alpha}{3-2\alpha} = \frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}$$

هـ) کافی است ثابت کنیم:

$$(1+\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{9})^{3} = 5(2-\sqrt[5]{27})$$

فرض می‌کنیم $\alpha = \sqrt[5]{3}$ یا $\alpha^{5} = 3$. داریم:

$$(1+\alpha-\alpha^{2})^{2} = 1+\alpha^{2}+\alpha^{4}+2\alpha-2\alpha^{2}-2\alpha^{3} = 1+3\alpha-\alpha^{2}-2\alpha^{3}+\alpha^{4}$$

علاوه بر این

$$(1+\alpha-\alpha^{2})^{3} = 1+3\alpha-5\alpha^{3}+3\alpha^{5}-\alpha^{6}$$

چون $\alpha^{5} = 3$، پس $\alpha^{6} = 3\alpha$، درنتیجه

$$(1+\alpha-\alpha^{2})^{3} = 10-5\alpha^{3} = 5(2-\sqrt[5]{27})$$

۶) قرار می‌دهیم $\alpha = \sqrt[5]{2}$ و برابری اول را ثابت می‌کنیم که می‌توان آن را به‌این صورت نوشت:

$$5(1+\alpha+\alpha^{3})^{2} = (1+\alpha^{2})^{5}$$

سمت راست برابر است با:

$$1+5\alpha^{2}+10\alpha^{4}+10\alpha^{6}+5\alpha^{8}+\alpha^{10} = 5(1+\alpha^{2}+2\alpha^{4}+2\alpha^{6}+\alpha^{8})$$

زیرا $\alpha^{10} = 4$ به‌جز این

$$\alpha^{5} = 2,\ \alpha^{6} = 2\alpha,\ \alpha^{8} = 2\alpha^{3}$$

و درنتیجه:

$$(1+\alpha^{3})^{5} = 5(1+\alpha^{2}+2\alpha^{4}+4\alpha+2\alpha^{3})$$

تنها اثبات این مطلب می‌ماند که:

$$(1+\alpha+\alpha^{3})^{2} = 1+4\alpha+\alpha^{2}+2\alpha^{3}+2\alpha^{4}$$

این برابری به‌سادگی با حذف پرانتزهای سمت چپ و انجام چند تبدیل ساده ثابت می‌شود. برای اثبات برابری دوم، باید نشان دهیم:

$$\sqrt[5]{\frac{۱}{۵}} + \sqrt[5]{\frac{۴}{۵}} = \left(\sqrt[5]{\frac{۱۶}{۱۲۵}} + \sqrt[5]{\frac{۸}{۱۲۵}} + \sqrt[5]{\frac{۲}{۱۲۵}} - \sqrt[5]{\frac{۱}{۱۲۵}}\right)^{۲}$$

یا

$$۵(۱ + \sqrt[5]{۴}) = (\sqrt[5]{۱۶} + \sqrt[5]{۸} + \sqrt[5]{۲} - ۱)^{۲}$$

اگر فرض کنیم $\alpha = \sqrt[5]{۲}$ ، به‌دست می‌آید: $\alpha^{۵} = ۲$، $\alpha^{۶} = ۲\alpha$، $\alpha^{۷} = ۲\alpha^{۲}$ و $\alpha^{۸} = ۲\alpha^{۳}$. در این صورت، باید ثابت کرد:

$$(\alpha^{۴} + \alpha^{۳} + \alpha - ۱)^{۲} = ۵(۱ + \alpha^{۲})$$

سمت چپ برابری را بسط می‌دهیم، نتیجه می‌شود:

$$۱ + \alpha^{۲} + \alpha^{۶} + \alpha^{۸} + ۲\alpha^{۷} + ۲\alpha^{۵} - ۲\alpha^{۴} + ۲\alpha^{۴} - ۲\alpha^{۳} - ۲\alpha$$

استفاده از این برابری‌ها به ما امکان می‌دهد، به‌جای توان‌های بالای α، توان پایینتر را قرار دهیم. با انجام آن، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

۳. قرار دهید: $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d} = \lambda$ در آن صورت:

$$A = \lambda a,\ B = \lambda b,\ C = \lambda c,\ D = \lambda d$$

و درنتیجه:

$$\sqrt{Aa} + \sqrt{Bb} + \sqrt{Cc} + \sqrt{Dd} = \sqrt{\lambda}(a + b + c + d)$$

اما

$$A + B + C + D = \lambda(a + b + c + d)$$

و

$$\lambda = \frac{A + B + C + D}{a + b + c + d}$$

یعنی

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{A + B + C + D}}{\sqrt{a + b + c + d}}$$

در برابری زیر، مقدار به‌دست آمده را به‌جای $\sqrt{\lambda}$ قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{\lambda}(a+b+c+d)$$

اتحاد موردنظر به‌دست می‌آید.

۴. فرض می‌کنیم: $\sqrt[۳]{ax^۲+by^۲+cz^۲}=A$ داریم:

$$A=\sqrt[۳]{\frac{ax^۳}{x}+\frac{by^۳}{y}+\frac{cz^۳}{z}}=\sqrt{ax^۳\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}\right)}=x\sqrt[۳]{a}$$

زیرا

$$ax^۳=by^۳=cz^۳ \text{ و } \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=۱$$

به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آید: $A=y\sqrt[۳]{b}$ و $A=z\sqrt[۳]{c}$. بنابراین

$$\frac{A}{x}=\sqrt[۳]{a},\ \frac{A}{y}=\sqrt[۳]{b},\ \frac{A}{z}=\sqrt[۳]{c}$$

این برابری‌ها را جمله‌به‌جمله با هم جمع می‌کنیم، حاصل می‌شود:

$$A\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}\right)=\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}+\sqrt[۳]{c}$$

سرانجام، نتیجه می‌شود: $A=\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}+\sqrt[۳]{c}$

۵. بافرض $\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۲}}+۱$ و $\beta=\frac{۱}{\sqrt{۲}}-۱$، داریم:

$$a_n=\alpha^n+\beta^n,\ b_n=\alpha^n-\beta^n;\ \left(\alpha\beta=\frac{۱}{۲}\right)$$

ثابت می‌کنیم: $a_{m+n}=a_ma_n-\frac{a_{m-n}}{۲^n}$ داریم:

$$a_ma_n-\frac{a_{m-n}}{۲^n}=(\alpha^m+\beta^m)(\alpha^n+\beta^n)-\frac{\alpha^{m-n}+\beta^{m-n}}{۲^n}=$$

$$=\alpha^{m+n}+\beta^{m+n}+\alpha^n\beta^n(\alpha^{m-n}+\beta^{m-n})-\frac{\alpha^{m-n}+\beta^{m-n}}{۲^n}$$

اما $\alpha^n\beta^n=\frac{۱}{۲^n}$، پس

$$a_ma_n-\frac{a_{m-n}}{۲^n}=\alpha^{m+n}+\beta^{m+n}=\alpha_{m+n}$$

رابطهٔ دوم به‌صورت مشابه ثابت می‌شود.

۶. بافرض $\alpha = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ و $\beta = ۱ - \frac{\sqrt{۵}}{۲}$، به‌دست می‌آید:

$$\alpha + \beta = ۱, \alpha\beta = -۱$$

علاوه بر این $\alpha^۲ - \alpha - ۱ = ۰$ و $\beta^{-}\beta - ۱ = ۰$ و

$$u_n = \frac{۱}{\sqrt{۵}}(\alpha^n - \beta^n)$$

اثبات الف): داریم:

$$u_n + u_{n-۱} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}(\alpha^n - \beta^n) + \frac{۱}{\sqrt{۵}}(\alpha^{n-۱} - \beta^{n-۱}) =$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۵}}\{(\alpha^n + \alpha^{n-۱}) - (\beta^n + \beta^{n-۱})\}$$

دو طرف برابری $\alpha^۲ - \alpha - ۱ = ۰$ را در $\alpha^{n-۱}$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\alpha + ۱ = \alpha^۲ \Rightarrow \alpha^n + \alpha^{n-۱} = \alpha^{n+۱}$$

به‌همین ترتیب، خواهیم داشت: $\beta^n + \beta^{n-۱} = \beta^{n+۱}$ بنابراین:

$$u_n + u_{n-۱} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}(\alpha^{n+۱} - \beta^{n+۱}) = u_{n+۱}$$

ب) داریم:

$$u_k u_{n-k} + u_{k-۱}u_{n-k-۱} = \frac{۱}{۵}\{(\alpha^k - \beta^k)(\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}) +$$
$$+(\alpha^{k-۱} - \beta^{k-۱})(\alpha^{n-k-۱} - \beta^{n-k-۱})\} = \frac{۱}{۵}\{\alpha^n + \beta^n - \alpha^k\beta^{n-k} -$$
$$-\beta^k\alpha^{n-k} + \alpha^{n-۲} + \beta^{n-۲} - \beta^{k-۱}\alpha^{n-k-۱} - \beta^{n-k-۱}\alpha^{k-۱}\} =$$
$$= \frac{۱}{۵}\{\alpha^n + \alpha^{n-۲} + \beta^n + \beta^{n-۲} - \beta^n\left(\frac{\alpha^k}{\beta^k} + \frac{\alpha^{k-۱}}{\beta^{k+۱}}\right) - \alpha^n\left(\frac{\beta^k}{\alpha^k} + \frac{\beta^{k-۱}}{\alpha^{k+۱}}\right)\}$$
$$= \frac{۱}{۵}\left\{\alpha^n + \alpha^{n-۲} + \beta^n + \beta^{n-۲} - \beta^n\frac{\alpha^k\beta + \alpha^{k-۱}}{\beta^{k+۱}} - \alpha^n\frac{\beta\alpha^k + \beta^{k-۱}}{\alpha^{k+۱}}\right\} =$$

$$= \frac{۱}{۵}\left\{\alpha^n + \alpha^{n-۲} + \beta^n + \beta^{n-۲} - \beta^n \frac{\alpha^{k-۱}(\alpha\beta + ۱)}{\beta^{k+۱}} - \alpha^n \frac{\beta^{k-۱}(\alpha\beta + ۱)}{\alpha^{k+۱}}\right\}$$

$$= \frac{۱}{۵}(\alpha^n + \alpha^{n-۲} + \beta^n + \beta^{n-۲})$$

از آن‌جاکه $\alpha\beta + ۱ = ۰$، این تبدیل‌ها را انجام می‌دهیم:

$$\frac{۱}{۵}\{\alpha^n + \alpha^{n-۲} + \beta^n + \beta^{n-۲}\} = \frac{۱}{۵}\left\{\alpha^{n-۱}\left(\alpha + \frac{۱}{\alpha}\right) + \beta^{n-۱}\left(\beta + \frac{۱}{\beta}\right)\right\}$$

$$= \frac{۱}{۵}\{\alpha^{n-۱}(\alpha - \beta) + \beta^{n-۱}(\beta - \alpha)\} = \frac{\alpha - \beta}{۵}(\alpha^{n-۱} - \beta^{n-۱}) =$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۵}}(\alpha^{n-۱} - \beta^{n-۱}) = u_{n-۱}$$

ج) با قرار دادن $n = ۲k$، از قسمت ب به‌دست می‌آید و آنگاه k را به n تبدیل کنید.

د) باید نشان دهیم:

$$۵(\alpha^{۳n} - \beta^{۳n}) - (\alpha^n - \beta^n)^۳ - (\alpha^{n+۱} - \beta^{n+۱})^۳ +$$
$$+(\alpha^{n-۱} - \beta^{n-۱})^۳ = ۰$$

سمت چپ برابری، به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$۵(\alpha^{۳n} - \beta^{۳n}) - \alpha^{۳n}\left(\alpha^۳ + ۱ - \frac{۱}{\alpha^۳}\right) + ۳a^{۲n}\beta^n\left(a^۲\beta + ۱ - \frac{۱}{\alpha^۲\beta}\right) -$$
$$-۳\alpha^n\beta^{۲n}\left(\alpha\beta^۲ + ۱ - \frac{۱}{\alpha\beta^۲}\right) + \beta^{۳n}\left(\beta^۳ + ۱ - \frac{۱}{\beta^۳}\right)$$

به‌سادگی نشان داده می‌شود که $\alpha^۲\beta + ۱ - \frac{۱}{\alpha^۲\beta} = ۰$، $\alpha\beta^۲ + ۱ - \frac{۱}{\alpha\beta^۲} = ۰$. از سوی دیگر، به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که:

$$\alpha^۳ + ۱ - \frac{۱}{\alpha^۳} = \beta^۳ + ۱ - \frac{۱}{\beta^۳} = \alpha^۳ + \beta^۳ + ۱ =$$
$$= (\alpha + \beta)(\alpha^۲ - \alpha\beta + \beta^۲) + ۱ = \alpha^۲ - \alpha\beta + \beta^۲ + ۱ = ۵$$

از این‌جا، درستی اتحاد نتیجه می‌شود.

ه) باید ثابت کنیم:

$$(\alpha^n-\beta^n)^4-(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}) = 25$$

نخست ثابت می‌کنیم:

$$(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})(a^{n+2} - \beta^{n+2}) = \alpha^{2n} - (-1)^n(a^4 + \beta^4),$$
$$(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + (-1)^n(\alpha^2 + \beta^2)$$

اما

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3,\ \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = 7$$

بنابراین:

$$(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})(\alpha^{n-1} - \beta^{n+1})(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) =$$
$$= (\alpha^{2n} + \beta^{2n})^2 - (-1)^n 4(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) - 21$$

از سوی دیگر

$$(\alpha^n - \beta^n)^4 = \alpha^{4n} - 4\alpha^{3n}\beta^n + 4 - 4\alpha^n\beta^{3n} + \beta^{4n} = \alpha^{4n} + \beta^{4n} + 4 -$$
$$-4(-1)^n(\alpha^{2n} + \beta^{2n})$$

با کم کردن نخستین برابری اخیر از برابری دوم آن، به نتیجه لازم می‌رسیم.

مساله‌های و)، ز) و ت)، شبیه حالت‌های پیش به نتیجه می‌رسند.

۷. الف) داریم:

$$2[(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} - a][(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} - b] =$$
$$= 2(a^2 + b^2) - 2(a + b)(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} + 2ab =$$
$$(a^2 + b^2) - 2(a + b)\sqrt{a^2 + b^2} + (a + b)^2 + (a^2 + b^2) + 2ab - (a + b)^2$$

(آن را به‌صورت یک عبارت درجه دوم می‌نویسیم). درنتیجه

$$2[(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} - a][(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} - b] = (a + b - \sqrt{a^2 + b^2})^2$$

به‌این ترتیب، اتحاد اول نتیجه می‌شود.

ب) عبارت داخل آکولاد قسمت چپ برابری را در هم ضرب می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$۳(a^۳+b^۳)^{\frac{۲}{۳}} - ۳(a+b)(a^۳+b^۳)^{\frac{۱}{۳}} + ۳ab =$$
$$= ۳(a^۲-ab+b^۲)^{\frac{۲}{۳}}(a+b)^{\frac{۲}{۳}} - ۳(a^۲-ab+b^۲)^{\frac{۱}{۳}}(a+b)^{\frac{۴}{۳}} +$$
$$+(a+b)^۲ - (a^۲-ab+b^۲) = [(a+b)^{\frac{۲}{۳}} - (a^۲-ab+b^۲)^{\frac{۱}{۳}}]^۳$$

اثبات بقیه بخش‌ها، دشوار نیست.

۸. به‌سادگی دیده می‌شود: $ax = \sqrt{\frac{۲a-b}{b}}$. از این‌رو

$$\frac{۱-ax}{۱+ax} = \frac{۱-\sqrt{\frac{۲a-b}{b}}}{۱+\sqrt{\frac{۲a-b}{b}}} = \frac{\left(۱-\sqrt{\frac{۲a-b}{b}}\right)^۲}{۱-\frac{۲a-b}{b}} =$$

$$= \frac{b}{۲(b-a)}\left(۱-۲\sqrt{\frac{۲a-b}{b}}+\frac{۲a-b}{b}\right) = \frac{a-b\sqrt{\frac{۲a-b}{b}}}{b-a}$$

به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{\frac{۱+bx}{۱-bx}} = \sqrt{\frac{۱+\frac{b}{a}\sqrt{\frac{۲a-b}{b}}}{۱-\frac{b}{a}\sqrt{\frac{۲a-b}{b}}}} = \frac{۱+\frac{b}{a}\sqrt{\frac{۲a-b}{b}}}{\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}\cdot\frac{۲a-b}{b}}} =$$

$$= \frac{a+b\sqrt{\frac{۲a-b}{b}}}{\sqrt{a^۲-۲ab+b^۲}} = \frac{a+b\sqrt{\frac{۲a-b}{b}}}{\sqrt{(b-a)^۲}} = \frac{a+b\sqrt{\frac{۲a-b}{b}}}{b-a}$$

(زیرا $b-a>۰$). با ضرب دو عبارت به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{a-b\sqrt{\frac{۲a-b}{b}}}{b-a}\cdot\frac{a+b\sqrt{\frac{۲a-b}{b}}}{b-a} = \frac{a^۲-b^۲\frac{۲a-b}{b}}{(b-a)^۲} = \frac{a^۲-۲ab+b^۲}{(b-a)^۲} = ۱$$

۹. عبارت $n^3 - 3n - 2$ را به ضرب عامل‌ها تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$n^3 - 3n^2 - 2 = n^3 - n - 2n - 2 = n(n^2 - 1) - 2(n + 1) =$$
$$= (n + 1)(n^2 - n - 2) = (n + 1)^2(n - 2)$$

به‌همین ترتیب: $n^3 - 3n + 2 = (n - 1)^2(n + 2)$.
اکنون می‌توان نوشت:

$$\frac{n^3 - 3n - 2 + (n^2 - 1)\sqrt{n^2 - 4}}{n^3 - 3n + 2 + (n^2 - 1)\sqrt{n^2 - 4}} = \frac{(n + 1)^2(n - 2) + (n^2 - 1)\sqrt{n^2 - 4}}{(n - 1)^2(n + 2) + (n^2 - 1)\sqrt{n^2 - 4}}$$
$$= \frac{(n + 1)\sqrt{n - 2}((n + 1)\sqrt{n - 2} + (n - 1)\sqrt{n + 2})}{(n - 1)\sqrt{n + 2}((n - 1)\sqrt{n + 2} + (n + 1)\sqrt{n - 2})} = \frac{(n + 1)\sqrt{n - 2}}{(n - 1)\sqrt{n + 2}}$$

۱۰. کسر دومِ داخل کروشهٔ اول را در نظر می‌گیریم و ساده می‌کنیم:

$$\frac{1 - a}{\sqrt{1 - a^2} - 1 + a} = \frac{1 - a}{\sqrt{1 - a^2} - (1 - a)} = \frac{\sqrt{1 - a}}{\sqrt{1 + a} - \sqrt{1 - a}}$$

از این‌رو، عبارت تبدیل شده به‌این صورت درمی‌آید:

$$\left[\frac{\sqrt{1 + a}}{\sqrt{1 + a} - \sqrt{1 - a}} + \frac{\sqrt{1 - a}}{\sqrt{1 + a} - \sqrt{1 - a}}\right] \cdot \frac{\sqrt{1 - a^2} - 1}{a} =$$
$$= \frac{\sqrt{1 + a} + \sqrt{1 - a}}{\sqrt{1 + a} - \sqrt{1 - a}} \cdot \frac{\sqrt{1 - a^2} - 1}{a} =$$
$$= \frac{2a}{(\sqrt{1 + a} - \sqrt{1 - a})^2} \cdot \frac{(\sqrt{1 - a^2} - 1)}{a} =$$
$$= \frac{2(\sqrt{1 - a^2} - 1)}{(1 + a + 1 - a - 2\sqrt{1 - a^2})} = -1$$

۱۱. از دستور تبدیل رادیکال‌های مرکب، به‌سادگی نتیجه می‌شود:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

در مساله داده شده داریم:

$$A = x, \quad B = ۴x - ۴, \quad A^۲ - B = x^۲ - ۴x + ۴,$$
$$\sqrt{A^۲ - B} = \sqrt{(x-۲)^۲} = \begin{cases} x - ۲ & (x > ۲), \\ ۲ - x & (x < ۲) \end{cases}$$

در حالت اول داریم:

$$\sqrt{x + ۲\sqrt{x-۱}} + \sqrt{x - ۲\sqrt{x-۱}} = ۲\sqrt{\frac{x + x - ۲}{۲}} = ۲\sqrt{x-۱}$$

و در حالت دوم نتیجه می‌گیریم:

$$\sqrt{x + ۲\sqrt{x-۱}} + \sqrt{x - ۲\sqrt{x-۱}} = ۲\sqrt{\frac{x + ۲ - x}{۲}} = ۲$$

به‌سادگی ملاحظه می‌شود که عبارت مورد بررسی نیز برابر ۲ است.

۱۲. در این حالت: $A = a + b + c$ و $B = ۴ac + ۴bc$، درنتیجه

$$A^۲ - B = (a+b+c)^۲ - ۴ac - ۴bc =$$
$$= a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab - ۲bc - ۲ac = (a + b - c)^۲$$

اگر $a + b - c > ۰$، آن‌وقت $\sqrt{A^۲ - B} = a + b - c$،
و اگر $a + b - c < ۰$، آن‌وقت $\sqrt{A^۲ - B} = c - a - b$.

بنابراین، به‌سادگی نتیجه می‌گیریم که عبارت داده شده در حالت $a + b > c$ برابر $۲\sqrt{a+b}$ و در حالت $a + b < c$، برابر $۲\sqrt{c}$ است به‌ازای $a + b = c$، این مقدارها با هم برابرند.

۱۳. عبارت را به‌این صورت نشان می‌دهیم:

$$\sqrt[۳]{-\frac{q}{۲} + \sqrt{\frac{q^۲}{۴} + \frac{p^۳}{۲۷}}} = u, \quad \sqrt[۳]{-\frac{q}{۲} - \sqrt{\frac{q^۲}{۴} + \frac{p^۳}{۲۷}}} = v$$

آن‌گاه $x = u + v$، درنتیجه

$$x^۳ = (u+v)^۳ = u^۳ + v^۳ + ۳uv(u+v)$$

اما $uv = \frac{-p}{۳}$ و $u^۳ + v^۳ = -q$. بنابراین

$$x^۳ = -q - px \Rightarrow x^۳ + px + q = ۰$$

که همان نتیجهٔ لازم است.

۱۴. می‌توان به‌عنوان نمونه، به این صورت زیر عمل کرد. قرار دهید:

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=z$$

آن‌گاه (با ضرب و تقسیم سمت چپ برابری بر $\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}$)، نتیجه می‌شود:

$$\frac{a-b}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}=z \Rightarrow \sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}=\frac{a-b}{z}$$

از آن‌جا $۲\sqrt{x+b}=z-\frac{a-b}{z}$ و $۲\sqrt{x+a}=z+\frac{a-b}{z}$.
یعنی هر دو ریشه برحسب z و بدون رادیکال بیان می‌شوند.

۱۵. قرار دهید: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{۱}{\lambda}$ درنتیجه:

$$a'=a\lambda,\quad b'=b\lambda,\quad c'=c\lambda,\quad \lambda=\frac{a'+b'+c'}{a+b+c}$$

بنابراین:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a'}+\sqrt{b'}+\sqrt{c'}=(۱+\sqrt{\lambda})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

و کسر به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{۱}{(۱+\sqrt{\lambda})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}=\frac{(۱-\sqrt{\lambda})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(۱-\lambda)(a+b-c+۲\sqrt{ab})}=$$
$$=\frac{(۱-\sqrt{\lambda})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-۲\sqrt{ab})}{(۱-\lambda)(a^۲+b^۲+c^۲-۲ab-۲ac-۲bc)}=$$
$$\frac{(\sqrt{a+b+c}-\sqrt{a'+b'+c'})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-۲\sqrt{ab})\sqrt{a+b+c}}{(a+b+c-a'-b'-c')(a^۲+b^۲+c^۲-۲ab-۲ac-۲bc)}$$

۱۶. قرار دهید: $\sqrt[۳]{۲}=p+\sqrt{q}$. از این‌رو:

$$۲=p^۳+۳pq+(۳p^۲+q)\sqrt{q},$$

از آن‌جاکه q مربع کامل نیست، باید داشته باشیم: $۳p^۲+q=۰$، که ناممکن است،

۱۷. الف) داریم:

$$\tan\left(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\tan\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

(ب، د)

$$\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$

(الف، ج)

$$\cos(۲\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

(ج، د)

$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

(ب، ج)

$$\sin(\pi-\alpha)=-\sin(-\alpha)=+\sin\alpha$$

(ب)

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$

(ج، د)

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=-\cos\alpha$$

اکنون نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{-\cot\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha}+\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=-۱+\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۰$$

ب) در این حالت نتیجه می‌شود:

(ب، ج)

$$\cos(۳\pi-\alpha)=(-۱)^{۳}\sin(-\alpha)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha$$

(ب)

$$\cos(۳\pi+\alpha)=(-۱)^{۳}\cos\alpha=-\cos\alpha$$

(ب، د)

$$\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=-\cos\alpha$$

(الف یا ب، د)

$$\cos\left(\frac{۵\pi}{۲}-\alpha\right)=\cos\left(۲\pi+\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

بنابراین، داریم:

$$(۱-\sin\alpha-\cos\alpha)(۱+\sin\alpha+\cos\alpha)+\sin^۲\alpha=$$
$$=[۱-(\sin\alpha+\cos\alpha)][۱+(\sin\alpha+\cos\alpha)]+\sin ۲\alpha=$$
$$=۱-(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲+\sin ۲\alpha=$$
$$=۱-\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha+\sin ۲\alpha=۰,$$

ج) مشابه حالت‌های قبل حل می‌شود.

۱۸. از آن‌جاکه $۱-\cos\alpha=۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$، یعنی $\sin\frac{\alpha}{۲}=\pm\sqrt{\frac{۱-\cos\alpha}{۲}}$. ولی باتوجه به شرط‌های مساله

$$\frac{\alpha}{۲}=k\pi+\frac{\alpha_۰}{۲}\quad\left(۰\le\frac{\alpha_۰}{۲}<\pi\right)$$

بنابراین $\sin\frac{\alpha}{۲}=\sin\left(k\pi+\frac{\alpha_۰}{۲}\right)=(-۱)^k\sin\frac{\alpha_۰}{۲}$. که در آن $۰\ge\frac{\sin\alpha_۰}{۲}$.

بنابراین، درواقع:

$$\sin\frac{\alpha}{۲}=(-۱)^k\sqrt{\frac{۱-\cos\alpha}{۲}}$$

گزارهٔ دوم مشابه آن ثابت می‌شود.

۱۹. درستی برخی از دستورهای داده شده را ثابت می‌کنیم. برای مثال ثابت می‌کنیم، اگر $n\equiv ۰ \pmod ۲$، آن‌گاه $A_{۱۶}\equiv ۰$، قرار دهید $n=۲l$. در آن صورت:

$$\frac{۱}{۲}A_{۱۶}=\cos\left(\frac{l\pi}{۴}+\pi-\frac{۳\pi}{۳۲}\right)+\cos\left(\frac{۳l\pi}{۴}+\pi-\frac{۵\pi}{۳۲}\right)+$$
$$+\cos\left(\frac{۵l\pi}{۴}+\frac{۵\pi}{۳۲}\right)+\cos\left(\frac{۷l\pi}{۴}+\frac{۳\pi}{۳۲}\right)=$$
$$=-\cos\left(\frac{l\pi}{۴}-\frac{۳\pi}{۳۲}\right)-\cos\left(l\pi-\frac{l\pi}{۴}-\frac{۵\pi}{۳۲}\right)+$$

$$+\cos\left(\frac{l\pi}{۴}+l\pi+\frac{۵\pi}{۳۲}\right)+\cos\left(۲l\pi-\frac{l\pi}{۴}+\frac{۳\pi}{۳۲}\right)=$$
$$=-\cos\left(\frac{l\pi}{۴}-\frac{۳\pi}{۳۲}\right)-(-۱)^l\cos\left(\frac{l\pi}{۴}-\frac{۵\pi}{۳۲}\right)+$$
$$+(-۱)^l\cos\left(\frac{l\pi}{۴}+\frac{۵\pi}{۳۲}\right)+\cos\left(\frac{l\pi}{۴}-\frac{۳\pi}{۳۲}\right)=۰$$

برای مثال، ثابت می‌کنیم، اگر $n\equiv ۱,۳,۴(\mathrm{mod}\ ۷)$ آن‌گاه $A_{۱۴}\equiv ۰$. داریم:

$$\frac{۱}{۲}A_{۱۴}=\cos\left(\frac{۱}{۷}n\pi-\frac{۱۳\pi}{۱۴}\right)+\cos\left(\frac{۳n\pi}{۷}-\frac{۳\pi}{۱۴}\right)+$$
$$+\cos\left(\frac{۵n\pi}{۷}-\frac{۳\pi}{۱۴}\right)$$

اگر به‌جای n عددی را جایگزین کنیم که با آن به پیمانهٔ ۷ قابل مقایسه است، آن‌گاه تمام کسینوس‌ها تنها یک عامل مشترک برابر $۱\pm$ را به‌دست خواهند داد. در واقع، فرض کنید $n\equiv\alpha(mod ۷)$ یعنی $n=\alpha+۷N$ که در آن N یک عدد درست است. بنابراین

$$\cos\left(\frac{kn\pi}{۷}-\beta\right)=\cos\left(\frac{k(\alpha+۷N)\pi}{۷}-\beta\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{k\alpha\pi}{۷}+kN\pi-\beta\right)=(-۱)^{kN}\cos\left(\frac{k\alpha\pi}{۷}-\beta\right)=$$
$$=(-۱)^N\cos\left(\frac{k\alpha\pi}{۷}-\beta\right)$$

از آن‌جا که در حالت مساله $k=۱,۳,۵$ و درنتیجه فرد است، (β برابر یا $\frac{۳}{۱۴}\pi$ است یا $\frac{۱۳}{۱۴}\pi$)؛ بنابراین، برای اثبات این‌که $A_{۱۴}=۰$ به‌ازای $n\equiv ۱,۳,۴(mod\ ۷)$، کافی است ثابت کنیم این برابری، به‌ازای $n=۱,۳,۴$ برقرار است. درستی آن، به سادگی ثابت می‌شود.

نخست قرار دهید $n=۱$. آن‌گاه ثابت می‌کنیم که:

$$\cos\left(\frac{۱}{۷}\pi-\frac{۱۳}{۱۴}\pi\right)+\cos\left(\frac{۳}{۷}\pi-\frac{۳}{۱۴}\pi\right)+\cos\left(\frac{۵}{۷}\pi-\frac{۳}{۱۴}\pi\right)=۰$$

پس از انجام تبدیل‌های لازم، نتیجه می‌گیریم:

$$\cos\frac{۱۱}{۱۴}\pi+\cos\frac{۳}{۱۴}\pi+\cos\frac{۷}{۱۴}\pi=\cos\left(\pi-\frac{۳\pi}{۱۴}\right)+\cos\frac{۳\pi}{۱۴}+\cos\frac{\pi}{۲}=$$
$$=-\cos\frac{۳\pi}{۱۴}+\cos\frac{۳}{۱۴}\pi=۰$$

اکنون، فرض کنید $n = ۳$، آن‌گاه باید ثابت کنیم:

$$\cos\left(\frac{۳}{۷}\pi - \frac{۱۳}{۱۴}\pi\right) + \cos\left(\frac{۹}{۷}\pi - \frac{۳}{۱۴}\pi\right) +$$
$$+ \cos\left(\frac{۱۵}{۷}\pi - \frac{۳}{۱۴}\pi\right) = \cos\frac{۷\pi}{۱۴} + \cos\frac{۱۵}{۱۴}\pi + \cos\frac{۲\pi}{۱۴}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{۱۴}\right) +$$
$$+ \cos\left(۲\pi - \frac{\pi}{۱۴}\right) = -\cos\frac{\pi}{۱۴} + \cos\frac{\pi}{۱۴} = ۰$$

به‌همین ترتیب و با روشی مشابه، ثابت می‌شود، به‌ازای $n = ۴$ نیز به‌مقدار صفر دست می‌یابیم.

ثابت می‌کنیم که $A_۸$ هرگز صفر نمی‌شود، یعنی به‌ازای هیچ مقدار حسابی از n صفر نمی‌شود. داریم:

$$\frac{۱}{۲}A_۸ = \cos\left(\frac{۱}{۴}n\pi - \frac{۷}{۱۶}\pi\right) + \cos\left(-\frac{۱}{۴}n\pi + n\pi - \frac{۱}{۱۶}\pi\right)$$
$$= \cos\left(\frac{۱}{۴}n\pi - \frac{۷}{۱۶}\pi\right) + (-۱)^n\cos\left(\frac{۱}{۴}n\pi + \frac{۱}{۱۶}\pi\right)$$

این حالت‌ها را در نظر بگیرید:

الف) فرض کنید $n \equiv ۰ (mod\ ۴)$، $n = ۴N$. آن‌گاه:

$$\frac{۱}{۲}A_۸ = \cos\left(N\pi - \frac{۷}{۱۶}\pi\right) + (-۱)^{۴N}\cos\left(N\pi + \frac{۱}{۱۶}\pi\right) =$$
$$= (-۱)^N\cos\frac{۷}{۱۶}\pi + (-۱)^N\cos\frac{۱}{۱۶}\pi =$$
$$= (-۱)^N\left(\cos\frac{۱}{۱۶}\pi + \cos\frac{۷}{۱۶}\pi\right)$$

عبارت داخل پرانتز، برابر صفر نیست، زیرا معرف مجموع کسینوس‌های دو زاویهٔ حاده است.

ب) فرض کنید $n \equiv ۱ (mod\ ۴)$ یعنی $n = ۱ + ۴N$.

$$\frac{۱}{۲}A_۸ = \cos\left(\frac{\pi}{۴} + N\pi - \frac{۷}{۱۶}\pi\right) + \cos\left(\frac{۳\pi}{۴} + ۳N\pi - \frac{۱}{۱۶}\pi\right) =$$
$$= (-۱)^N\left\{\cos\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{۷}{۱۶}\pi\right) + \cos\left(\frac{۳\pi}{۴} - \frac{۱}{۱۶}\pi\right)\right\} =$$
$$= (-۱)^N\left\{\cos\frac{۳}{۱۶}\pi + \cos\frac{۱}{۱۶}\pi\right\}$$

روشن است، مجموع داخل آکولاد برابر صفر نیست و درنتیجه، در این حالت نیز، A_8 برابر صفر نمی‌شود. تنها باقی می‌ماند بررسی حالت‌های: $n \equiv ۳(mod\ ۴)$ و $n \equiv ۲(mod\ ۴)$؛ که ما آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

۲۰. کافی است ثابت کنیم: $\sum p(k) = ۰$. اگر

$k = n, n-۱, n-۲, n-۴, n-۵, n-۶$ که، در آن، علامت قبل از $p(k)$ بر طبق مقدار n انتخاب می‌شود.

روشن است که:

$$\sum p(k) = A\sum(k+۳)^۲ + c\sum(-۱)^k + D\sum\cos\frac{۲\pi k}{۳}$$

دو جمع اول سمت راست، برابر صفر است. باقی می‌ماند اثبات این مطلب که: $\sum\cos\frac{۲\pi k}{۳} = ۰$.

اگر k یک عدد حسابی باشد، این حالت‌ها ممکن است:

الف) k بر ۳ بخش‌پذیر است، یعنی $k = ۳l$؛

ب) هنگام تقسیم بر ۳، باقی‌ماندهٔ ۱ دارد: $k = ۳l + ۱$؛

ج) هنگام تقسیم بر ۳، باقی‌مانده ۲ دارد: $k = ۴l + ۲$.

در حالت الف: $\cos\frac{۲\pi k}{۳} = ۱$ در حالت‌های ب و ج: $\cos\frac{۲\pi k}{۳} = \cos\frac{۲\pi}{۳}$.

اکنون، نخست فرض می‌کنیم n بر ۳ بخش‌پذیر است. آن‌گاه:

$$\sum\cos\frac{۲\pi k}{۳} = \frac{\cos ۲\pi n}{۳} - \cos\frac{۲\pi(n-۱)}{۳} - \cos\frac{۲\pi(n-۲)}{۳} + $$
$$+\cos\frac{۲\pi(n-۴)}{۳} + \cos\frac{۲\pi(n-۵)}{۳} - \cos\frac{۲\pi(n-۶)}{۳}$$

اما $۲ \equiv -۱(mod\ ۳)$ و

$$\cos\frac{۲\pi k}{۳} = \cos\frac{۲\pi k'}{۳} \quad [k \equiv k'(mod\ ۳)]$$

از آن‌جاکه بنابه فرض $n \equiv ۰(mod\ ۳)$، داریم:

$$n-۱ \equiv -۱, \quad n-۲ \equiv ۱, \quad n-۴ \equiv -۱, \quad n-۵ \equiv +۱, \quad n-۶ \equiv ۰$$

و جمع به‌این صورت درمی‌آید:

$$۱ - \cos\frac{۲\pi}{۳} - \cos\frac{۲\pi}{۳} + \cos\frac{۲\pi}{۳} + \cos\frac{۲\pi}{۳} - ۱ = ۰$$

باقی می‌ماند اثبات این مطلب که ثابت کنیم، در حالت‌های $n \equiv \pm ۱(mod\ ۳)$ هم، مجموع برابر صفر است. اثبات این مطلب مشابه حالت قبل است.

۲۱. داریم:

$$\sin ۱۵^\circ = \sin(۴۵^\circ - ۳۰^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۶}\right) = \sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۶} - \cos\frac{\pi}{۴}\sin\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cdot\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cdot\frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$$

به‌طور مشابه، $\cos ۱۵^\circ$ نیز محاسبه می‌شود. داریم: $\sin ۱۸^\circ = \sin\frac{\pi}{۱۰} = \cos\frac{۲\pi}{۵}$ اما $۲\sin\frac{\pi}{۵}\cos\frac{\pi}{۵} = \sin\frac{۲\pi}{۵}$ و

$$۲\sin\frac{۲\pi}{۵}\cos\frac{۲\pi}{۵} = \sin\frac{۴\pi}{۵} = \sin\frac{\pi}{۵}$$

با ضرب جمله به جملهٔ این تساوی‌ها، به‌دست می‌آید،

$$\cos\frac{\pi}{۵}\cos\frac{۲\pi}{۵} = \frac{۱}{۴}$$

از سوی دیگر

$$\cos\frac{\pi}{۵} - \cos\frac{۲\pi}{۵} = ۲\sin\frac{۳\pi}{۱۰}\sin\frac{\pi}{۱۰} = ۲\cos\frac{\pi}{۵}\cos\frac{۲\pi}{۵} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین، اگر قرار دهید:

$$\sin\frac{\pi}{۱۰} = \cos\frac{۲\pi}{۵} = x, \quad \cos\frac{\pi}{۵} = y$$

به‌دست می‌آید: $y - x = \frac{۱}{۲}$ و $xy = \frac{۱}{۴}$.

اما: $(x+y)^۲ = (x-y)^۲ + ۴xy = \frac{۱}{۴} + ۱ = \frac{۵}{۴}$

در نتیجه: $x + y = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$.

با استفاده از این رابطه و رابطهٔ $y - x = \frac{۱}{۲}$، نتیجه می‌گیریم:

$$x = \sin\frac{\pi}{۱۰} = \sin ۱۸^\circ = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۴}$$

اکنون، $\cos ۱۸^\circ$ به‌سادگی محاسبه می‌شود.

۲۲. در واقع

$$\sin ۶^\circ = \sin(۶۰^\circ - ۵۴^\circ) = \sin ۶۰^\circ \cos ۵۴^\circ - \cos ۶۰^\circ \sin ۵۴^\circ$$

اما

$$\sin ۵۴^\circ = \cos ۳۶^\circ = ۱ - ۲\sin^۲ ۱۸^\circ = ۱ - ۲\frac{۶ - ۲\sqrt{۵}}{۱۶} = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۴}$$
$$\cos ۵۴^\circ = \sqrt{۱ - \sin^۲ ۵۴^\circ} = \frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۵}}$$

برای به‌دست آوردن نتیجهٔ موردنظر، باید این مقدارها را در دستور اول جایگزین کنیم، $\cos ۶^\circ$ با همین روش به‌دست می‌آید.

۲۳. توجه داشته باشید که:

$$-\frac{\pi}{۲} \le \arcsin x \le +\frac{\pi}{۲}, \quad -\frac{\pi}{۲} < \mathrm{arctg} x < +\frac{\pi}{۲} \qquad (۱)$$
$$۰ \le \arccos x \le \pi, \quad ۰ < \mathrm{arccot} x < \pi$$
$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \cos(\arccos x) = x \qquad (۲)$$
$$\tan(\mathrm{arctg} x) = x, \quad \cot(\mathrm{arccot} x) = x$$

اکنون، ثابت می‌کنیم: $\cos(\arcsin x) = \sqrt{۱ - x^۲}$

قرار دهید: $\arcsin x = y$، در آن صورت

$$\sin y = x$$

می‌خواهیم $\cos y$ را محاسبه کنیم. اما می‌دانیم:

$$\cos y = \sqrt{۱ - \sin^۲ y} = \sqrt{۱ - x^۲}$$

و از رادیکال علامت مثبت بیرون می‌آید، زیرا

$$-\frac{\pi}{۲} \le y \le +\frac{\pi}{۲}$$

و درنتیجه: $\cos y \ge ۰$.

اکنون، برای مثال، ثابت می‌کنیم:

$$\cos(\mathrm{arctg}x) = \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^۲}}$$

قرار دهید: $\tan y = x$ و $\mathrm{arctg}x = y$ مقدار $\cos y$ را باید پیدا کنیم. داریم:

$$\frac{۱}{\cos^۲ y} = ۱ + \tan^۲ y = ۱ + x^۲$$

درنتیجه: $\cos^۲ y = \frac{۱}{۱ + x^۲}$ و $\cos y = \cos(\mathrm{arctg}x) = \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^۲}}$ از رادیکال، دوباره، علامت مثبت بیرون می‌آید، زیرا $\cos y \geq ۰$.

بقیهٔ دستورها، به روش مشابه ثابت می‌شود.

۲۴. بنابه تعریف: $-\frac{\pi}{۲} < \mathrm{arctg}x < +\frac{\pi}{۲}$, $۰ < \mathrm{arccot}x < \pi$.

بنابراین

$$-\frac{\pi}{۲} < \mathrm{arctg}x + \mathrm{arccot}x < +\frac{۳\pi}{۲}$$

اکنون $\sin(\mathrm{arctg}x + \mathrm{arccot}x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin(\mathrm{arctg}x + \mathrm{arccot}x) = \sin(\mathrm{arctg}x)\cos(\mathrm{arccot}x) +$$
$$+ \cos(\mathrm{arctg}x)\sin(\mathrm{arccot}x) = \frac{x}{\sqrt{۱ + x^۲}} \cdot \frac{x}{\sqrt{۱ + x^۲}} +$$
$$+ \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^۲}} \cdot \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^۲}} = ۱$$

بنابراین، اگر سینوس زاویهٔ معینی برابر ۱ باشد، آن‌گاه این زاویه برابر است با: $\frac{\pi}{۲} + ۲k\pi$، که در آن، k هر عدد حسابی دلخواه می‌تواند باشد، یعنی به‌بیان دیگر:

$$\mathrm{arctg}x + \mathrm{arccot}x$$

می‌تواند یکی از این مقدارها را اختیار کند:

$$\ldots, \frac{-۷\pi}{۲}, \frac{-۳\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲}, \frac{۹\pi}{۲}, \ldots$$

اما تنها یکی از این مقدارها، یعنی $\frac{\pi}{۲}$ در فاصلهٔ بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $+\frac{\pi}{۲}$ قرار دارد. بنابراین به‌ناچار

$$\text{arctg}x + \text{arccot}x = \frac{\pi}{۲}$$

به همین ترتیب، ثابت می‌کنیم:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{۲}$$

قبل از همه داریم:

$$-\frac{\pi}{۲} \leq \arcsin x + \arccos x \leq \frac{۳\pi}{۲}$$

از سوی دیگر:

$$\sin(\arcsin x + \arccos x) = \sin(\arcsin x)\cos(\arccos x) +$$
$$+ \cos(\arcsin x)\sin(\arccos x) = x^۲ + \sqrt{۱ - x^۲} \cdot \sqrt{۱ - x^۲} = ۱$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{۲}$$

۲۵. قبل از هر چیز ثابت می‌کنیم، اختلاف بین کمیت‌های

$$\text{arctg}x + \text{arctg}y$$

و

$$\text{arctg}\frac{x+y}{۱-xy}$$

برابر $\varepsilon\pi$ است که در آن، ε یک عدد درست است. درواقع

$$\tan\left(\text{arctg}\frac{x+y}{۱-xy}\right) = \frac{x+y}{۱-xy}$$

$$\tan(\text{arctg}x + \text{arctg}y) = \frac{\tan(\text{arctg}x) + \tan(\text{arctg}y)}{۱ - \tan(\text{arctg}x)\tan(\text{arctg}y)} = \frac{x+y}{۱-xy}$$

اما اگر دو کمیت تانژانت‌های مساوی داشته باشند، آن‌گاه اختلاف آن‌ها، به‌صورت مضربی از π است. بنابراین

$$\text{arctg}x + \text{arctg}y = \text{arctg}\frac{x+y}{۱-xy} + \varepsilon\pi \qquad (*)$$

اکنون، مقدار دقیق ε را پیدا می‌کنیم. از آن‌جاکه:

$$-\frac{\pi}{۲} < \text{arctg}x < +\frac{\pi}{۲}, \quad -\frac{\pi}{۲} < \text{arctg}y < +\frac{\pi}{۲}$$

داریم: $-\pi < \text{arctg}x + \text{arctg}y < +\pi$، و درنتیجه

$$\left|\text{arctg}\frac{x+y}{۱-xy} + \varepsilon\pi\right| < \pi$$

و چون $-\frac{\pi}{۲} < \text{arctg}\frac{x+y}{۱-xy} < +\frac{\pi}{۲}$، بنابراین $|\varepsilon| < ۲$ و درنتیجه ε می‌تواند تنها یکی از سه مقدار ۰، ۱+ و ۱− باشد.

برای به‌دست آوردن مقدار ε، این برابری را می‌نویسیم:

$$\cos(\text{arctg}x + \text{arctg}y) = \cos\left(\text{arctg}\frac{x+y}{۱-xy} + \varepsilon\pi\right)$$

از این‌رو

$$\cos(\text{arctg}x)\cos(\text{arctg}y) = \sin(\text{arctg}x)\sin(\text{arctg}y) = \\ = \cos\left(\text{arctg}\frac{x+y}{۱-xy}\right)\cos\varepsilon\pi$$

باتوجه به نتیجه‌های مساله ۲۳ داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱+y^۲}} - \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}\cdot\frac{y}{\sqrt{۱+y^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۱+\left(\frac{x+y}{۱-xy}\right)^۲}}\cdot\cos\varepsilon\pi$$

درنتیجه:

$$\cos\varepsilon\pi = \frac{۱-xy}{\sqrt{(۱+x^۲)(۱+y^۲)}}\sqrt{۱+\left(\frac{x+y}{۱-xy}\right)^۲}$$

و داریم:

$$\sqrt{۱+\left(\frac{x+y}{۱-xy}\right)^۲} = \sqrt{\frac{(۱+x^۲)(۱+y^۲)}{(۱-xy)^۲}} = \frac{\sqrt{(۱+x^۲)(۱+y^۲)}}{\sqrt{(۱-xy)^۲}}$$

اما $\sqrt{(۱-xy)^۲} = ۱-xy$ اگر $۱-xy > ۰$ یعنی اگر $xy < ۱$ اما $\sqrt{(۱-xy)^۲} = ۱-xy$ (با شرط $۱-xy > ۰$، یعنی $xy < ۱$)؛ ولی در حالت $xy > ۱$، داریم: $\sqrt{(۱-xy)^۲} = xy-۱$.

بنابراین $\cos \varepsilon\pi = ۱$ اگر $xy < ۱$ و $\cos \varepsilon\pi = -۱$ اگر $xy > ۱$. از آن‌جا که $\varepsilon\pi$ تنها مقدارهای ۰، π و $-\pi$ را اختیار می‌کند، نتیجه می‌گیریم که اگر $xy < ۱$، آن‌گاه $\varepsilon = ۰$ و اگر $xy > ۱$، آن‌گاه $\varepsilon = \pm ۱$. در حالت‌های زیر، علامت ε تعیین می‌شود. اگر $xy > ۱$ و $x > ۰$، آن‌گاه $y > ۰$، در آن صورت $\operatorname{arctg} x > ۰$ و $\operatorname{arctg} y > ۰$ و $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{۱-xy} < ۰$.

سمت چپ برابری $(*)$ یک کمیت مثبت است. درنتیجه، سمت راست برابری هم، باید مثبت باشد و بنابراین $\varepsilon\pi$ باید بیشتر از صفر باشد و $\varepsilon = +۱$. به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود، اگر $xy > ۱$ و $x < ۰$، $y < ۰$، آن‌گاه $\varepsilon = -۱$.

۲۶. به‌ترتیب داریم:

$$۴\operatorname{arctg}\frac{۱}{۵} = ۲\operatorname{arctg}\frac{۱}{۵} + ۲\operatorname{arctg}\frac{۱}{۵} = ۲\operatorname{arctg}\frac{\frac{۲}{۵}}{۱-\frac{۱}{۲۵}} =$$

$$= ۲\operatorname{arctg}\frac{۵}{۱۲} = \operatorname{arctg}\frac{۵}{۱۲} + \operatorname{arctg}\frac{۵}{۱۲} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{\frac{۵}{۱۲}+\frac{۵}{۱۲}}{۱-\frac{۲۵}{۱۴۴}} = \operatorname{arctg}\frac{۱۲۰}{۱۱۹}$$

به‌جز این:

$$\operatorname{arctg}\frac{۱۲۰}{۱۱۹} + \operatorname{arctg}\left(-\frac{۱}{۲۳۹}\right) = \operatorname{arctg}\frac{\frac{۱۲۰}{۱۱۹}-\frac{۱}{۲۳۹}}{۱+\frac{۱۲۰}{۱۱۹}\cdot\frac{۱}{۲۳۹}} =$$

$$= \operatorname{arctg} ۱ = \frac{\pi}{۴}$$

۲۷. راهنمایی. با استفاده از دستور مساله ۲۵، به‌سادگی نتیجه به‌دست می‌آید.

۲۸. قبل از هر چیز، توجه کنید، چون $\arcsin x$ بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $+\frac{\pi}{۲}$ است و $۲\operatorname{arctg} x$ بین $-\pi$ و π قرار دارد، داریم:

$$-\frac{۳\pi}{۲} \leq ۲\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{۲x}{۱+x^۲} \leq \frac{۳\pi}{۲}$$

اکنون، سینوس زاویه مورد نظر را پیدا می‌کنیم، یعنی ببینیم عبارت

$$\sin\left(۲\mathrm{arctg}x + \arcsin\frac{۲x}{۱+x^۲}\right)$$

برابر چه عددی است؟ داریم:

$$\sin\left(۲\mathrm{arctg}x + \arcsin\frac{۲x}{۱+x^۲}\right) = \sin(۲\mathrm{arctg}x)\cos\left(\arcsin\frac{۲x}{۱+x^۲}\right) +$$

$$+\cos(۲\mathrm{arctg}x)\sin\left(\arcsin\frac{۲x}{۱+x^۲}\right)$$

نخست $\sin(۲\mathrm{arctg}x)$ را محاسبه می‌کنیم. اگر فرض کنیم

$$\mathrm{arctg}x = y, \quad \tan y = x$$

به‌دست می‌آید:

$$\sin(۲\mathrm{arctg}x) = \sin ۲y = \tan ۲y \cos ۲y$$

ولی

$$\tan ۲y = \frac{۲\tan y}{۱-\tan^۲ y}, \quad \cos ۲y = \frac{۱-\tan^۲ y}{۱+\tan^۲ y}$$

بنابراین

$$\sin(۲\mathrm{arctg}x) = \frac{۲\tan y}{۱+\tan^۲ y} = \frac{۲x}{۱+x^۲}$$

به‌جز این، چون $x > ۱$، بنابراین

$$\cos\left(\arcsin\frac{۲x}{۱+x^۲}\right) = \sqrt{۱-\left(\frac{۲x}{۱+x^۲}\right)^۲} = \sqrt{\frac{(۱-x^۲)^۲}{(۱+x^۲)^۲}} = \frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}$$

درضمن، روشن است:

$$\cos(۲\mathrm{arctg}x) = \frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$$

$$\sin\left(\arcsin\frac{۲x}{۱+x^۲}\right) = \frac{۲x}{۱+x^۲},$$

درنتیجه

$$\sin\left(۲\mathrm{arctg}x+\mathrm{arctg}\sin\frac{۲x}{۱+x^۲}\right)=$$
$$=\frac{۲x}{۱+x^۲}\cdot\frac{x^۲-۱}{۱+x^۲}+\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\cdot\frac{۲x}{۱+x^۲}=۰$$

به‌این ترتیب، سینوس زاویه مطلوب، برابر صفر است، درنتیجه این زاویه می‌تواند برابر یکی از این مقدارها باشد:

$$\ldots,\ -۳\pi,\ -۲\pi,\ -\pi,\ ۰,\ \pi,\ ۲\pi,\ ۳\pi,\ \ldots$$

اما در بین این مقدارها، تنها سه مقدار $\pi-$، ۰ و π در فاصله $\frac{۳\pi}{۲}-$ تا $\frac{۳\pi}{۲}+$ قرار دارد. از سوی دیگر، $۱<x$، و درنتیجه، $۲\mathrm{arctg}x>۰$ و $\arcsin\frac{۲x}{۱+x^۲}>۰$ و بنابراین، مجموع

$$۲\mathrm{arctg}x+\arcsin\frac{۲x}{۱+x^۲}$$

بزرگتر از صفر است و بنابراین، تنها می‌تواند برابر π باشد.

۲۹. روشن است که

$$-\pi\le\mathrm{arctg}x+\mathrm{arctg}\frac{۱}{x}\le+\pi$$

این عبارت را تشکیل می‌دهیم:

$$\sin\left(\mathrm{arctg}x+\mathrm{arctg}\frac{۱}{x}\right)$$

سینوس زاویه مورد نظر، برابر است با (مساله ۲۳ را ببینید):

$$\sin(\mathrm{arctg}x)\cos\left(\mathrm{arctg}\frac{۱}{x}\right)+\cos(\mathrm{arctg}x)\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{۱}{x}\right)=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲}}}+\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}\frac{\frac{۱}{x}}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲}}}=$$

$$\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}\cdot\frac{\sqrt{x^۲}}{\sqrt{۱+x^۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}\cdot\frac{\sqrt{x^۲}}{x\cdot\sqrt{۱+x^۲}}=\frac{x^۲}{۱+x^۲}+\frac{۱}{۱+x^۲}=۱$$

با شرط $x > ۰$ (چون در این حالت $\sqrt{x^۲} = x$ است). اگر $x < ۰$، آن‌گاه $\sqrt{x^۲} = -x$ و داریم $\sin\left(\text{arctg}x + \text{arctg}\frac{۱}{x}\right) = -۱$. بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$\text{arctg}x + \text{arctg}\frac{۱}{x} = \pm\frac{\pi}{۲} + ۲k\pi$$

که در آن، علامت مثبت برای حالت $x > ۰$ و علامت منفی برای حالت $x < ۰$ است.

اما از سوی دیگر، چون

$$-\pi \leq \text{arctg}x + \text{arctg}\frac{۱}{x} \leq +\pi,$$

مساله حل شده است.

۳۰. با محاسبهٔ عبارت

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y)$$

به‌دست می‌آید:

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y) = \sin(\arcsin x)\cos(\arcsin y) + \cos(\arcsin x) \times$$
$$\times \sin(\arcsin y) = x\sqrt{۱ - y^۲} + y\sqrt{۱ - x^۲}$$

بنابراین، باتوجه به دو زاویهٔ

$$\arcsin x + \arcsin y, \quad \arcsin(x\sqrt{۱ - y^۲} + y\sqrt{۱ - x^۲})$$

می‌توان ادعا کرد که سینوس‌ها برابر یکدیگر هستند.

بنابراین، اگر داشته باشیم:

$$\sin\alpha = \sin\beta, \quad ۲\sin\frac{\alpha - \beta}{۲}\cos\frac{\alpha + \beta}{۲} = ۰$$

آن‌وقت، یا $\frac{\alpha - \beta}{۲} = k\pi$ و یا $\frac{\alpha + \beta}{۲} = (۲k' + ۱)\frac{\pi}{۲}$ (k و k' عددهایی درست هستند)، یعنی یا

$$\alpha = \beta + ۲k\pi$$

و یا

$$\alpha = -\beta + (۲k' + ۱)\pi$$

بنابراین، می‌توان پذیرفت

$$\arcsin x + \arcsin y = \eta \arcsin(x\sqrt{۱ - y^۲} + y\sqrt{۱ - x^۲}) + \varepsilon\pi,$$

که در آن، $\eta = +۱$ اگر ε زوج باشد و $\eta = -۱$ اگر ε فرد باشد. برای این‌که ε را دقیق‌تر تعیین کنیم، از دو طرف عبارت داده شده کسینوس می‌گیریم. نتیجه می‌شود:

$$\cos(\arcsin x + \arcsin y) = \cos[\eta \arcsin(x\sqrt{۱ - y^۲} + y\sqrt{۱ - x^۲}) + \varepsilon\pi]$$

از این‌رو

$$\sqrt{۱ - x^۲} \cdot \sqrt{۱ - y^۲} - xy = (-۱)^\varepsilon \cos[\arcsin(x\sqrt{۱ - y^۲} + y\sqrt{۱ - x^۲})]$$

به‌جز این

$$\sqrt{۱ - x^۲} \cdot \sqrt{۱ - y^۲} - xy = (-۱)^\varepsilon \sqrt{۱ - (x\sqrt{۱ - y^۲} + y\sqrt{۱ - x^۲})^۲}$$

رادیکال سمت راست برابری را می‌توان به‌این صورت تبدیل کرد:

$$۱ - (x\sqrt{۱ - y^۲} + y\sqrt{۱ - x^۲})^۲ = ۱ - x^۲(۱ - y^۲) - y^۲(۱ - x^۲) -$$
$$-۲xy\sqrt{۱ - x^۲} \cdot \sqrt{۱ - y^۲} = (۱ - x^۲)(۱ - y^۲) -$$
$$-۲xy\sqrt{۱ - x^۲} \cdot \sqrt{۱ - y^۲} + x^۲y^۲ = (\sqrt{۱ - x^۲}\sqrt{۱ - y^۲} - xy)^۲$$

اگر معلوم شود که: $\sqrt{۱ - x^۲} \cdot \sqrt{۱ - y^۲} - xy > ۰$
آن‌گاه

$$\sqrt{۱ - (x\sqrt{۱ - y^۲} + y\sqrt{۱ - x^۲})^۲} = \sqrt{(\sqrt{۱ - x^۲} \cdot \sqrt{۱ - y^۲} - xy)^۲} =$$
$$= \sqrt{۱ - x^۲} \cdot \sqrt{۱ - y^۲} - xy$$

بنابراین، در این حالت $(-۱)^\varepsilon = +۱$، یعنی ε عددی زوج است. ولی، اگر $\sqrt{۱ - x^۲}\sqrt{۱ - y^۲} - xy < ۰$، آن‌گاه $(-۱)^\varepsilon = -۱$ و ε عددی فرد است.

اکنون به‌عبارت $۱ - x^۲ - y^۲$ می‌پردازیم. داریم:

$$۱ - x^۲ - y^۲ = ۱ - x^۲ - y^۲ + x^۲y^۲ - x^۲y^۲ = (۱ - x^۲)(۱ - y^۲) - x^۲y^۲$$
$$= (\sqrt{۱ - x^۲}\sqrt{۱ - y^۲} - xy)(\sqrt{۱ - x^۲}\sqrt{۱ - y^۲} + xy)$$

کمیت $۱ - x^۲ - y^۲$ می‌تواند بزرگتر یا کوچکتر یا برابر صفر باشد. این سه حالت را در نظر می‌گیریم:

الف) فرض کنید $۱ - x^۲ - y^۲ > ۰$ یعنی $x^۲ + y^۲ < ۱$. اگر حاصل‌ضرب دو عامل ضرب مثبت باشد، آن‌گاه این عامل‌ها یا هم‌زمان مثبت هستند یا هم‌زمان منفی و بنابراین، یا داریم:

$$\sqrt{۱ - x^۲}\sqrt{۱ - y^۲} - xy > ۰, \quad \sqrt{۱ - x^۲} \cdot \sqrt{۱ - y^۲} + xy > ۰$$

و یا

$$\sqrt{۱ - x^۲}\sqrt{۱ - y^۲} - xy < ۰, \quad \sqrt{۱ - x^۲} \cdot \sqrt{۱ - y^۲} + xy < ۰$$

اما حالت دوم ناممکن است، زیرا با جمع دو نابرابری اخیر، نتیجه می‌گیریم:

$$\sqrt{۱ - x^۲}\sqrt{۱ - y^۲} < ۰$$

که غیرممکن است. ولی اگر دو نابرابری اول وجود داشته باشد، آنگاه

$$\sqrt{۱ - x^۲}\sqrt{۱ - y^۲} - xy > ۰$$

درنتیجه، در این حالت ε زوج است.

ب) $۱ - x^۲ - y^۲ < ۰$. یکی از این دو حالت پیش می‌آید، $\sqrt{۱ - x^۲}\sqrt{۱ - y^۲} + xy < ۰$ و $\sqrt{۱ - x^۲}\sqrt{۱ - y^۲} - xy > ۰$ و $\sqrt{۱ - x^۲}\sqrt{۱ - y^۲} + xy > ۰$ و $\sqrt{۱ - x^۲}\sqrt{۱ - y^۲} - xy < ۰$ از دو نابرابری اول نتیجه می‌شود $xy < ۰$ که، از آن‌جا، به‌دست می‌آید $\sqrt{۱ - x^۲}\sqrt{۱ - y^۲} - xy > ۰$، که به‌معنای زوج بودن ε است. از نابرابری دوم نتیجه می‌شود $xy > ۰$ که به‌معنای فرد بودن ε است.

ج) سرانجام فرض کنید $۱ - x^۲ - y^۲ = ۰$، در آن‌صورت، دوباره دو حالت امکان‌پذیر است: یا $xy \leq ۰$ یا $xy > ۰$.

در حالت اول $\sqrt{۱ - x^۲} \cdot \sqrt{۱ - y^۲} - xy > ۰$ و از این‌رو، ε زوج است. به‌همین ترتیب، حالت دوم یک ε زوج ($\varepsilon = ۰$) را به‌دست می‌دهد. زیرا این رابطه وجود دارد:

$$\arcsin x + \arcsin\sqrt{۱ - x^۲} = \frac{\pi}{۲} \quad (x > ۰)$$

بنابراین، می‌توان تعیین کرد، آیا ε زوج است یا فرد. اکنون مقدار ε را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$|\arcsin x + \arcsin y| < \pi$$

درنتیجه: •

$$|\eta \arcsin(x\sqrt{۱ - y^۲} + y\sqrt{۱ - x^۲}) + \varepsilon\pi| < \pi$$

از این‌رو $۲ > |\varepsilon|$.

به‌این دلیل، ε می‌تواند تنها سه مقدار ۰، ۱+، ۱− را اختیار کند. با مقایسهٔ این نتیجه‌ها می‌توان ادعا کرد که

اگر $x^۲ + y^۲ \le ۱$ یا اگر $xy < ۰$ آن‌گاه $\varepsilon = ۰$، $\eta = +۱$.

اگر $x^۲ + y^۲ > ۱$ یا اگر $xy > ۰$، آن‌گاه $\varepsilon = \pm ۱$، $\eta = -۱$.

برای تعیین این‌که چه‌وقت $\varepsilon = +۱$ و چه‌وقت $\varepsilon = -۱$، توجه کنید که به‌ازای $x > ۰$، $y > ۰$، $\arcsin x + \arcsin y > ۰$ و در نتیجه:

$$-\arcsin(x\sqrt{۱ - y^۲} + y\sqrt{۱ - x^۲}) + \varepsilon\pi > ۰$$

بنابراین، در این حالت، $\varepsilon = +۱$. با این وجود، اگر $x < ۰$، $y < ۰$، آن‌گاه روشن است که $\varepsilon = -۱$.

۳۱. داریم (مساله ۲۴ را ببینید):

$$\arccos x + \arccos\left(\frac{x}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۳ - ۳x^۲}\right) =$$
$$= \pi - \arcsin x - \arcsin\left(\frac{x}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۳ - ۳x^۲}\right);$$

از سوی دیگر (مساله ۳۰):

$$\arcsin x + \arcsin\left(\frac{x}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۳ - ۳x^۲}\right) = \eta \arcsin\xi + \varepsilon\pi$$

که در آن:

$$\xi = x\sqrt{۱ - \left(\frac{x}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sqrt{۱ - x^۲}\right)^۲} + \left(\frac{x}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sqrt{۱ - x^۲}\right)\sqrt{۱ - x^۲}$$

اما

$$۱ - \left(\frac{x}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sqrt{۱ - x^۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}(\sqrt{۱ - x^۲} - \sqrt{۳}x)^۲$$

و چون $x \ge \frac{۱}{۲}$، داریم $۴x^۲ \ge ۱$، $۳x^۲ \ge ۱ - x^۲$ و $\sqrt{۳}x \ge \sqrt{۱ - x^۲}$. بنابراین

$$\sqrt{۱ - \left(\frac{x}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sqrt{۱ - x^۲}\right)^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(\sqrt{۱ - x^۲} - \sqrt{۳}x)^۲} =$$
$$= \frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}x - \sqrt{۱ - x^۲})$$

و $\xi = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

درنتیجه $\arcsin\xi = \frac{\pi}{۳}$

تنها نکته‌ای باقی ماند به‌دست آوردن η و ε است (مسالهٔ ۳۰ را ببینید.) حال ثابت می‌کنیم:

$$x^۲ + \left(\frac{x}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sqrt{۱ - x^۲}\right)^۲ > ۱$$

داریم:

$$x^۲ + \frac{x^۲}{۴} + \frac{۳}{۴}(۱ - x^۲) + \frac{۱}{۲}\sqrt{۳}x\sqrt{۱ - x^۲} \ge \frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۲}x^۲ +$$
$$+\frac{۱}{۲}(۱ - x^۲) = \frac{۵}{۴}$$

درنتیجه: $\varepsilon = +۱$ و $\eta = -۱$

بنابراین:

$$\arccos x + \arccos\left(\frac{x}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۳ - ۳x^۲}\right) = \pi - \left(-\frac{\pi}{۳} + \pi\right) = \frac{\pi}{۳}$$

۳۲. داریم $\tan A = \frac{۱}{۷}$، $\tan B = \frac{۱}{۳}$. اکنون $\cos ۲A$ را محاسبه می‌کنیم. از آنجاکه $۱ + \tan^۲ A = \frac{۱}{\cos^۲ A}$، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{\cos^۲ A} = ۱ + \frac{۱}{۴۹} = \frac{۵۰}{۴۹} \text{ و } \cos^۲ A = \frac{۴۹}{۵۰}$$

اما

$$\cos^۲ A = ۲\cos^۲ A - ۱ = \frac{۹۸}{۵۰} - ۱ = \frac{۲۴}{۲۵}$$

به‌جز این، چون $\sin ۲B = ۲\sin B\cos B$ و

$$\cos ۲B = ۲\cos^۲ B - ۱ = \frac{۲}{۱+\tan^۲ B} - ۱ = \frac{۴}{۵}$$

در نتیجه:

$$\sin ۴B = ۲\cdot\frac{۴}{۵}\cdot\frac{۳}{۵} = \frac{۲۴}{۲۵} \text{ و } \sin ۴B = \cos ۲A$$

۳۳. بنابه فرض داریم:

$$(a+b)^۲ = ۹ab \text{ یا } \left(\frac{a+b}{۳}\right)^۲ = ab$$

اثبات بقیه روشن است.

۳۴. قرار دهید: $\log_a n = x$ و $\log_{ma} n = y$، یعنی $a^x = n$ و $m^y a^y = n$. بنابراین

$$a^x = m^y a^y \text{ و } a^{\frac{x}{y}} = ma$$

از برابری آخر در پایهٔ a لگاریتم می‌گیریم، نتیجه لازم به‌دست می‌یابد.

۳۵. قرار دهید:

$$\frac{x(y+z-x)}{\log x} = \frac{y(z+x-y)}{\log y} = \frac{z(x+y-z)}{\log z} = \frac{۱}{t}$$

در این صورت

$$\log x = tx(y+z-x) \text{ و } \log y = ty(z+x-y) \text{ و } \log z = tz(x+y-z)$$

بنابراین:

$$y\log x + x\log y = ۲txyz,\quad y\log z + z\log y =$$
$$= ۲txyz,\quad z\log x + x\log z = ۲txyz$$

در نتیجه:

$$y\log x + x\log = z\log x + x\log z = y\log z + z\log y,$$
$$\log x^y y^x = \log z^y y^z = \log x^z z^x$$

و سرانجام

$$x^y y^x = z^y y^z = x^z z^x$$

۳۶. الف) قرار دهید: $\log_b a = x$، در این صورت $b^x = a$. از این برابری در پایهٔ a لگاریتم می‌گیریم، درنتیجه

$$x\log_a b = ۱$$

اما $x = \log_b a$، درنتیجه $\log_b a \cdot \log_a b = ۱$.

ب) داریم: $a^{\log_a b} = b$. بنابراین

$$a^{\frac{\log_b^{(\log_b^a)}}{\log^a}} = \frac{۱}{(a^{\log_b^a})}\log_b^{(\log_b^a)} = (a^{\log_a^b})^{\log_b^{(\log_b^a)}} =$$
$$= b^{\log_b(\log_b^a)} = \log_b a$$

۳۷. از رابطهٔ داده شده نتیجه می‌گیریم:

$$y^{۱-\log x} = ۱۰, \quad z^{۱-\log y} = ۱۰$$

از این برابری‌ها در پایهٔ ۱۰ لگاریتم می‌گیریم، نتیجه می‌شود:

$$(۱-\log x)\log y = ۱, \quad (۱-\log y)\log z = ۱$$

که از آن:

$$\log x = ۱ - \frac{۱}{\log y} = ۱ - \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{\log y}} = \frac{۱}{۱-\log z}$$

درنتیجه $x = ۱۰^{\frac{۱}{۱-\log z}}$.

۳۸. از برابری اصلی نتیجه می‌شود:

$$a^۲ = (c-b)(c+b)$$

بنابراین

$$۲\log_{c+b} a = \log_{c+b}^{(c-b)} + ۱, ۲\log_{c-b}^a = \log_{c-b}^{(c+b)} + ۱$$

با ضرب این برابری‌ها در هم، نتیجه می‌گیریم:

$$۴\log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a = \log_{c+b}(c-b) + \log_{c-b}(c+b) + ۱ + \log_{c+b}(c-b)\log_{c-b}(c+b)$$

یعنی $\log_{a-b}(c+b)\log_{c+b}(c-b) = ۱$

درنتیجه

$$۴\log_{c+b} a \log_{c-b} a = ۲\log_{b+c} a - ۱ + ۲\log_{c-b} a$$

۳۹. فرض کنیم $\log_a N = x$، $\log_c N = y$ و $\log_{\sqrt{ac}} N = z$، برابری اخیر را می‌توان به‌صورت $N = (ac)^{\frac{z}{۲}}$ نوشت: بنابراین

$$\log_a N = \frac{z}{۲}(۱ + \log_a c), \quad \log_c N = \frac{z}{۲}(۱ + \log_c a)$$

از آن‌جا

$$\frac{۲x}{z} - ۱ = \log_a c, \quad \frac{۲y}{z} - ۱ = \log_c a$$

درنتیجه: $\left(\frac{۲y}{z} - ۱\right)\left(\frac{۲x}{z} - ۱\right) = ۱$ یا $\frac{x-z}{z-y} = \frac{x}{y}$.

۴۰. داریم:

$$\log^x_{a_۱ a_۲ \ldots a_n} = \frac{۱}{\log_x(a_۱ a_۲ \ldots a_n)} = \frac{۱}{\log_x a_۱ + \log_x a_۲ + \ldots + \log_x a_n}$$

$$= \frac{۱}{\frac{۱}{\log a_۱ x} + \frac{۱}{\log_{a_۲} x} + \ldots + \frac{۱}{\log_{a_n} x}}$$

۴۱. قرار دهید: $a_n = aq^n$ و $b_n = b + nd$. در این صورت

$$\log a_n = \log a + n\log q \cdot \log a_n - b_n =$$

$$= \log a + n\log q - b - nd = \log a - b$$

بنابراین $n\log q - nd = ۰$، $\log_\beta q = d$ و $\beta^d = q$ و درنتیجه $\beta = q^{\frac{۱}{d}}$.

فصل ۴

۱. داریم:

$$\left(\frac{x-ab}{a+b} - c\right) + \left(\frac{x-ac}{a+c} - b\right) + \left(\frac{x-bc}{b+c} - a\right) = ۰$$

بنابراین:

$$\frac{x-ab-ac-bc}{a+b}+\frac{x-ac-ab-bc}{a+c}+\frac{x-bc-ac-ab}{b+c}=۰,$$

یا

$$(x-ab-ac-bc)\left(\frac{۱}{a+b}+\frac{۱}{a+c}+\frac{۱}{b+c}\right)=۰,$$

اگر داشته باشیم $\frac{۱}{a+b}+\frac{۱}{a+c}+\frac{۱}{b+c}\neq ۰$، آن‌وقت

$$x=ab+ac+bc,$$

اگر $\frac{۱}{a+b}+\frac{۱}{a+c}+\frac{۱}{b+c}=۰$، می‌توان ثابت کرد معادلهٔ داده شده یک اتحاد است، یعنی به‌ازای تمام مقدارهای حقیقی x برقرار است.

۲. معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$\left(\frac{x-a}{bc}-\frac{۱}{b}-\frac{۱}{c}\right)+\left(\frac{x-b}{ac}-\frac{۱}{a}-\frac{۱}{c}\right)+\left(\frac{x-c}{ab}-\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}\right)=۰,$$

در این صورت، به‌دست می‌آید:

$$\frac{x-a-b-c}{bc}+\frac{x-b-a-c}{ac}+\frac{x-c-b-a}{ab}=۰,$$

از آن‌جا $(x-a-b-c)\left(\frac{۱}{bc}+\frac{۱}{ac}+\frac{۱}{ab}\right)=۰$ و درنتیجه:

$$x=a+b+c$$

البته، فرض شده است که هیچ‌یک از کمیت‌های a، b و c و نیز $\frac{۱}{ab}+\frac{۱}{ac}+\frac{۱}{bc}$ صفر نیست.

۳. اگر در معادله فرض کنیم:

$$۶x+۲a=A,\quad ۳b+c=B,\quad ۲x+۶a=C,\quad b+۳c=D$$

در آن صورت، معادله به‌این صورت نوشته می‌شودو

$$\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D}\qquad (*)$$

به دو طرف معادله عدد یک را اضافه می‌کنیم، درنتیجه

$$\frac{۲A}{A-B}=\frac{۲C}{C-D}$$

واگر یک واحد از دو طرف معادله (*) کم می‌کنیم:

$$\frac{۲B}{A-B}=\frac{۲D}{C-D}$$

دو برابری اخیر را جمله‌به‌جمله بر هم تقسیم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\Rightarrow\frac{۶x+۲a}{۳b+c}=\frac{۲x+۶a}{b+۳c}$$

از آن‌جا

$$\left(\frac{۶}{۳b+c}-\frac{۲}{b+۳c}\right)x=\left(\frac{۶}{b+۳c}-\frac{۲}{۳b+c}\right)a$$

و $x=\frac{ab}{c}$.

۴. به دو طرف معادله عدد ۳ را اضافه می‌کنیم و آن را به‌ترتیب، به این صورت تبدیل می‌کنیم:

$$\left(\frac{a+b-x}{c}+۱\right)+\left(\frac{a+c-x}{b}+۱\right)+\left(\frac{b+c-x}{a}+۱\right)=۴-\frac{۴x}{a+b+c};$$

$$(a+b+c-x)\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right)=۴\frac{a+b+c-x}{a+b+c};$$

$$(a+b+c-x)\left(\frac{۱}{b}+\frac{۱}{a}+\frac{۱}{c}-\frac{۴}{a+b+c}\right)=۰;$$

$$x=a+b+c$$

۵. از $\sqrt[p]{b+x}$ عبارت سمت چپ برابری، فاکتور و سپس مخرج مشترک می‌گیریم

$$\sqrt[p]{b+x}\frac{b+x}{bx}=\frac{c}{a}\sqrt[p]{x}$$

از آن‌جا $\frac{bc}{a}=\frac{(b+x)^{۱+\frac{۱}{p}}}{x^{۱+\frac{۱}{p}}}$ و یا

$$\left(\frac{b+x}{x}\right)^{\frac{p+۱}{p}}=\frac{bc}{a},\quad\frac{b+x}{x}=\left(\frac{bc}{a}\right)^{\frac{p}{p+۱}}$$

که سرانجام، مقدار x را به ما می‌دهد:

$$\frac{b}{x} = \left(\frac{bc}{a}\right)^{\frac{p}{p+1}} - 1 \Rightarrow x = \frac{b}{\left(\frac{bc}{a}\right)^{\frac{p}{p+1}} - 1}$$

۶. الف) دو طرف معادلهٔ داده شده را به توان دو می‌رسانیم، بعد از ساده کردن به‌ترتیب چنین می‌شود:

$$2\sqrt{x^2 - 1} = 1 - 2x;$$
$$4x^2 - 4 = 1 + 4x^2 - 4x \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

در حالت کلی، از آن‌جا که به توان دو رساندن یک معادله، همیشه منجر به معادله‌ای هم‌ارز با معادله داده شده نمی‌شود و به معادله‌ای منجر می‌شود که اغلب، علاوه بر ریشه‌های معادله داده شده، ریشه‌هایی متمایز با آن‌ها (موسوم به ریشه‌های اضافی) پیدا می‌کند، لازم است با جایگزینی ریشه تحقیق کنیم، آیا $\frac{5}{4}$ در واقع ریشهٔ معادلهٔ اصلی است یا خیر. تحقیق نشان می‌دهد که $\frac{5}{4}$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند. (در این‌جا، مانند گذشته، تنها مقدارهای اصلی ریشه‌ها را در نظر می‌گیریم).

ب) تمام تبدیل‌های لازم را مشابه تبدیل‌های مساله قبل انجام دهید، نتیجه می‌گیرید $x = \frac{5}{4}$، که ریشهٔ معادله است.

۷. با در نظر گرفتن دستور مربوط به مکعب مجموع دو متغیر به‌صورت

$$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$$

دو طرف معادله داده شده را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$a + \sqrt{x} + a - \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{a^2 - x}(\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} + \sqrt{a - \sqrt{x}}) = b,$$

که باتوجه به برابری $\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$، به‌دست می‌آید؛

$$2a + 3\sqrt[3]{a^2 - x} - \sqrt[3]{b} = b, \quad x = a^2 - \frac{(b - 2a)^3}{27b}$$

با فرض $a^2 - \frac{(b - 2a)^3}{27} \geq 0$ و باتوجه به این‌که، برابری مکعب‌های دو عدد، به معنی برابری خود آن عددها است، مقدار x، که به‌دست آمده است، در معادلهٔ اصلی نیز صدق می‌کند.

۸. دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم، نتیجه می‌گیریم:

$$-\sqrt{x^۴ - x^۲} = x^۲ - ۲x \Rightarrow x^۴ - x^۲ = x^۲(x - ۲)^۲;$$
$$x^۲[x^۲ - ۱ - x^۲ - ۴ + ۴x] = x^۲(۴x - ۵) = ۰$$

به این ترتیب معادله اخیر دو ریشهٔ $x = ۰$ و $x = \frac{۵}{۴}$ دارد.

با قرار دادن این مقدارها در معادلهٔ اصلی، روشن می‌شود که تنها مقدار $x = \frac{۵}{۴}$ در معادله صدق می‌کند.

۹. برای این‌که مخرج را از بین ببریم، به‌ترتیب، به‌دست می‌آید

$$(\sqrt{a} + \sqrt{x - b})\sqrt{b} = \sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{x - a});$$
$$\sqrt{b(x - b)} = \sqrt{a(x - a)}; \quad b(x - b) = a(x - a), \quad x = a + b$$

به‌سادگی دیده می‌شود، این مقدار x، ریشهٔ معادلهٔ اصلی است.

۱۰. صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x})^۲ = ۲x\sqrt{b}$$

و یا

$$\sqrt{a^۲ - x^۲} = x\sqrt{b} - a$$

دو طرف این برابری را به توان دو می‌رسانیم، این دو ریشه به‌دست می‌آید:

$$x = ۰, \quad x = \frac{۲a\sqrt{b}}{۱ + b}$$

$x = ۰$ ریشه این معادله نیست و با شرط $b \geq ۱$ ریشهٔ دوم، ریشهٔ معادله اصلی است.

در واقع، داریم:

$$\sqrt{a + x} = \sqrt{a + \frac{۲a\sqrt{b}}{۱ + b}} = \sqrt{a}\frac{\sqrt{(۱ + \sqrt{b})^۲}}{۱ + b} = \sqrt{a}\frac{۱ + \sqrt{b}}{\sqrt{۱ + b}};$$
$$\sqrt{a - x} = \sqrt{a - \frac{۲a\sqrt{b}}{۱ + b}} = \sqrt{a}\sqrt{\frac{(\sqrt{b} - ۱)^۲}{۱ + b}} = \sqrt{a}\frac{\sqrt{b} - ۱}{\sqrt{۱ + b}}$$

(با شرط $\sqrt{b} - ۱ \geq ۰$)

با جایگزینی مقدارهای $\sqrt{a+x}$ و $\sqrt{a-x}$ در معادلهٔ اصلی، ثابت می‌شود که این ادعا درست است.

۱۰. همهٔ معادله‌های دستگاه را با هم جمع می‌کنیم:

$$x+y+z+v=\frac{a+b+c+d}{۳}$$

درنتیجه

$$v=(x+y+z+v)-(x+y+z)=\frac{a+b+c+d}{۳}-a=\frac{b+c+d-۲a}{۳}$$

به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$z=\frac{a+c+d-۲b}{۳},\quad y=\frac{a+b+d-۲c}{۳},\quad x=\frac{a+b+c-۲d}{۳}$$

۱۲. چهار معادلهٔ دستگاه را با هم جمع می‌کنیم، حاصل می‌شود:

$$۴x_۱=۲a_۱+۲a_۲+۲a_۳+۲a_۴;$$
$$x_۱=\frac{a_۱+a_۲+a_۳+a_۴}{۲}$$

دو معادله آخر را در ۱− ضرب کرده، آن‌گاه، تمام چهار معادله را با هم جمع می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$x_۲=\frac{a_۱+a_۲-a_۳-a_۴}{۲}$$

به‌همین ترتیب، دو مجهول دیگر هم به‌دست می‌آید:

$$x_۳=\frac{a_۱-a_۲+a_۳-a_۴}{۲},\quad x_۴=\frac{a_۱-a_۲-a_۳+a_۴}{۲}$$

۱۳. قرار دهید $x+y+z+v=s$. آن‌گاه دستگاه را به‌این صورت بنویسید:

$$ax+m(s-x)=k,$$
$$by+m(s-y)=l,$$
$$cz+m(s-z)=p,$$
$$dv+m(s-v)=q$$

طوری‌که

$$ms + x(a-m) = k, \quad ms + y(b-m) = l,$$
$$ms + z(c-m) = p, \quad ms + v(d-m) = q$$

از این‌رو

$$x = \frac{k}{a-m} - \frac{m}{a-m}s, \quad y = \frac{l}{b-m} - \frac{m}{b-m}s, \quad z = \frac{p}{c-m} - \frac{m}{c-m}s$$
$$v = \frac{q}{d-m} - \frac{m}{d-m}s \qquad (*)$$

با جمع جمله به جملهٔ این برابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$s = \frac{k}{a-m} + \frac{l}{b-m} + \frac{p}{c-m} + \frac{q}{d-m} -$$
$$-ms\left(\frac{۱}{a-m} + \frac{۱}{b-m} + \frac{۱}{c-m} + \frac{۱}{d-m}\right)$$

درنتیجه

$$s\left[۱ + m\left(\frac{۱}{a-m} + \frac{۱}{b-m} + \frac{۱}{c-m} + \frac{۱}{d-m}\right)\right] =$$
$$\frac{k}{a-m} + \frac{l}{b-m} + \frac{p}{c-m} + \frac{q}{d-m}$$

که از آن s به‌دست می‌آید؛ سپس، از برابری‌های $(*)$ مقدار هریک از مجهول‌های x، y، z و v پیدا می‌شود.

۱۴. بافرض

$$\frac{x_۱ - a_۱}{m_۱} = \frac{x_۲ - a_۲}{m_۲} = \ldots = \frac{x_p - a_p}{m_p} = \lambda$$

به‌دست می‌آید:

$$x_۱ = a_۱ + m_۱\lambda,$$
$$x_۲ = a_۲ + m_۲\lambda,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_p = a_p + m_p\lambda$$

با قرار دادن این مقدارها در آخرین معادلهٔ داده شده، به‌دست می‌آید:

$$x_۱ + x_۲ + \ldots + x_p = a = (a_۱ + a_۲ + \ldots + a_p) + \lambda(m_۱ +_۲ + \ldots + m_p)$$

از آنجا $\lambda = \frac{a - a_۱ - a_۲ - \ldots - a_p}{m_۱ + m_۲ + \ldots + m_p}$.
که از آن‌جا، به‌سادگی مقدارهای $x_۱$، $x_۲$، ...، x_p به‌دست می‌آید.

۱۵. اگر قرار دهیم:

$$\frac{۱}{x} = x', \quad \frac{۱}{y} = y', \quad \frac{۱}{z} = z', \quad \frac{۱}{v} = v',$$

آن‌گاه، جواب این دستگاه منجر به جواب دستگاه مسالهٔ ۱۱ می‌شود. با استفاده از نتیجهٔ مساله ۱۱، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$x = \frac{۳}{a + b + c - ۲d}, \quad y = \frac{۲}{a + b + d - ۲c},$$
$$z = \frac{۳}{a + c + d - ۲b}, \quad v = \frac{۲}{b + c + d - ۲a},$$

۱۶. معادله اول را بر ab، معادلهٔ دوم را بر ac و معادلهٔ سوم را بر bc تقسیم می‌کنیم (با این فرض که $abc \neq ۰$)، نتیجه می‌شود:

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = \frac{c}{ab}, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{b}{ac}, \quad \frac{z}{c} + \frac{y}{b} = \frac{a}{bc}$$

از مجموع این معادله‌ها

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{c}{ab} + \frac{b}{ac} + \frac{a}{bc}\right)$$

بنابراین

$$\frac{z}{c} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{x}{c}\right) - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{c}{ab} + \frac{b}{ac} + \frac{a}{bc}\right) - \frac{c}{ab}$$

درنتیجه $\frac{z}{c} = \frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{۲abc}$، یعنی $z = \frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{۲ab}$ به همین ترتیب:

$$y = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲ac}, \quad x = \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc}$$

۱۷. قبل از همه، یک جواب بدیهیِ $x = y = z = ۰$ را داریم. اکنون به جست‌وجوی جواب‌های غیرصفر می‌گردیم، یعنی برای x، y و zهایی که مخالف صفر هستند. نخستین معادلهٔ داده شده را بر yz، معادلهٔ دوم را بر zx و معادله سوم را بر xy تقسیم می‌کنیم. حاصل می‌شود:

$$\frac{c}{x} + \frac{b}{y} = ۲d, \quad \frac{a}{x} + \frac{c}{z} = ۲d', \quad \frac{b}{y} + \frac{a}{x} = ۲d''$$

از آن‌جا $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = d + d' + d''$ و بنابراین

$$\frac{a}{x} = d' + d'' - d, \quad \frac{b}{y} = d + d'' - d', \quad \frac{c}{z} = d + d' - d''$$

سرانجام

$$x = \frac{a}{d' + d'' - d}, \quad y = \frac{b}{d + d'' - d'}, \quad z = \frac{c}{d + d' - d''}$$

۱۸. دستگاه را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{ay + bx}{xy} = \frac{۱}{c}, \quad \frac{az + cx}{xz} = \frac{۱}{b}, \quad \frac{bz + cy}{zy} = \frac{۱}{a}$$

از این‌رو:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{۱}{c}, \quad \frac{a}{x} + \frac{c}{z} = \frac{۱}{b}, \quad \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{۱}{a}$$

درنتیجه (مساله قبل را ببینید):

$$x = \frac{۲a^۲bc}{ac + ab - bc}, \quad y = \frac{۲ab^۲c}{bc + ab - ac}, \quad z = \frac{۲abc^۲}{bc + ac - ab}$$

۱۹. جواب بدیهی است از $x = y = z = ۰$. دو طرف هر معادله از دستگاه را بر xyz تقسیم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{xz} + \frac{۱}{xy} - \frac{۱}{yz} = \frac{۱}{a^۲}, \quad \frac{۱}{xy} + \frac{۱}{yz} - \frac{۱}{xz} = \frac{۱}{b^۲}$$

$$\frac{۱}{yz} + \frac{۱}{xz} - \frac{۱}{xy} = \frac{۱}{c^۲}$$

با جمع دوبه‌دو آن‌ها، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۲}{xy} = \frac{۱}{a^۲} + \frac{۱}{b^۲}, \quad \frac{۲}{yz} = \frac{۱}{b^۲} + \frac{۱}{c^۲}, \quad \frac{۲}{xz} = \frac{۱}{a^۲} + \frac{۱}{c^۲}$$

درنتیجه:

$$xy = \frac{۲a^۲b^۲}{a^۲ + b^۲}, \quad yz = \frac{۲b^۲c^۲}{b^۲ + c^۲}, \quad zx = \frac{۲a^۲c^۲}{a^۲ + c^۲} \quad (*)$$

با ضرب این برابری‌ها در یکدیگر، به‌دست می‌آید:

$$x^۲y^۲z^۲ = \frac{۸a^۴b^۴c^۴}{(a^۲ + b^۲)(b^۲ + c^۲)(a^۲ + c^۲)}$$

و یا $xyz = \pm\frac{۲\sqrt{۲}a^۲b^۲c^۲}{\sqrt{(a^۲ + b^۲)(b^۲ + c^۲)(a^۲ + c^۲)}}$ که با استفاده از برابری $xy = \frac{۲a^۲b^۲}{a^۲ + b^۲}$، دو مقدار برای z به‌دست می‌آید که علامت‌های مختلفی دارند. روشن است با در دست داشتن مقدار z و باتوجه به برابری‌های $(*)$، می‌توان مقدارهای x و y را هم پیدا کرد. دو مجموعهٔ جواب، برای (x, y, z) به‌دست می‌آید.

۲۰. با جمع هر سه معادله، حاصل می‌شود:

$$(x + y + z)(a + b + c) = ۰$$

از آن‌جا $x + y + z = ۰$، که در آن

$$x = \frac{a - b}{a + b + c}, \quad y = \frac{a - c}{a + b + c}, \quad z = \frac{b - a}{a + b + c}$$

۲۱. با جمع سه معادله، به‌دست می‌آید:

$$(b + c)x + (c + a)y + (a + b)z = ۲a^۳ + ۲b^۳ + ۲c^۳$$

با استفاده پشت‌سرهم از معادله‌های داده شده، نتیجه می‌شود:

$$۲(b + c)x = ۲b^۳ + ۲c^۳, \quad ۲(c + a)y = ۲a^۳ + ۲c^۳,$$
$$۲(a + b)z = ۲a^۳ + ۲b^۳$$

که از آن:

$$x = b^2 - bc + c^2, \quad y = a^2 - ac + c^2, \quad z = a^2 - ab + b^2$$

۲۲. این برابری را در نظر بگیرید:

$$\frac{x}{a+\theta} + \frac{y}{b+\theta} + \frac{z}{c+\theta} - 1 = -\frac{(\theta-\lambda)(\theta-\mu)(\theta-v)}{(\theta+a)(\theta+b)(\theta+c)}$$

اگر برابری را از مخرج آزاد کنیم، یک چندجمله‌ای درجه دوم برحسب θ با ضریب‌های وابسته به x، y، z، λ، μ و v، a، b و c به‌دست می‌آید که برابر صفر است. اکنون اگر به‌ترتیب به‌جای θ، مقدارهای λ، μ و v را در عبارت اصلی قرار دهیم، باتوجه به معادله‌های داده شده، این عبارت (و درنتیجه، چندجمله‌ای درجه دوم) صفر می‌شود. ولی، اگر یک چندجمله‌ای درجه دوم، به‌ازای سه مقدار مختلف از متغیر برابر صفر شود، این چندجمله‌ای متحد با صفر است (فصل ۲ را ببینید) و درنتیجه برابری

$$\frac{x}{a+\theta} + \frac{y}{b+\theta} + \frac{z}{c+\theta} - 1 = -\frac{(\theta-\lambda)(\theta-\mu)(\theta-v)}{(\theta+a)(\theta+b)(\theta+c)}$$

(باتوجه به وجود سه معادله داده شده) نسبت به θ یک اتحاد است، یعنی به‌ازای همهٔ مقدارهای θ برقرار است.

با ضرب دو طرف این برابری در $a+\theta$، قرار دادن $\theta = -a$، نتیجه می‌شود:

$$x = \frac{(a+\lambda)(a+\mu)(a+v)}{(a-b)(a-c)}$$

به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$y = \frac{(b+\lambda)(b+\mu)(b+v)}{(b-c)(b-a)}, \quad z = \frac{(c+\lambda)(c+\mu)(c+v)}{(c-b)(c-a)}$$

روشن است، در این‌جا فرض کردیم کمیت‌های داده شدهٔ λ، μ، v و همچنین a، b و c مخالف هم هستند.

۲۳. معادله‌های داده شده نشان می‌دهند که چندجمله‌ای

$$\alpha^3 + x\alpha^2 + y\alpha + z$$

به‌ازای سه مقدار مختلف a یعنی $\alpha = a$، $\alpha = b$ و $\alpha = c$ برابر صفر می‌شود (فرض می‌کنیم a، b و c مخالف هم هستند.)

این تفاضل را تشکیل می‌دهیم:

$$\alpha^۳ + x\alpha^۲ + y\alpha + z - (\alpha - a)(\alpha - b)(\alpha - c)$$

این تفاضل نیز به‌ازای a، b و c، برابر صفر می‌شود.

این عبارت را برحسب توان‌های α منظم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(x + a + b + c)\alpha^۲ + (y - ab - ac - bc)\alpha + z + abc$$

این سه‌جمله‌ای درجه دوم برحسب α، به‌ازای سه مقدار مختلف α صفر می‌شود و بنابراین متحد با صفر است و درنتیجه، تمام ضریب‌های آن برابر صفر است یعنی:

$$x + a + b + c = ۰, \quad y - ab - ac - bc = ۰, \quad z + abc = ۰$$

که از آن‌جا، مقدارهای x، y و z به‌دست می‌آید:

$$x = -(a + b + c), \quad y = ab + ac + bc,$$
$$z = -abc$$

۲۴. پاسخ.

$$t = -(a + b + c + d),$$
$$\lambda = ab + ac + ad + bc + bd + cd,$$
$$y = -(abc + abd + acd + bcd),$$
$$z = abcd$$

۲۵. معادلهٔ اول را در r، معادلهٔ دوم را در p، معادلهٔ سوم را در q و معادلهٔ چهارم را در یک ضرب، سپس، آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(a^۳ + a^۲q + ap + r)x + (b^۳ + b^۲q + bp + \gamma)y +$$
$$+(c^۳ + c^۲q + cp + \gamma)z + (d^۳ + d^۲q + dp + \gamma)u =$$
$$= mr + np + kq + l$$

کمیت‌های r، p و q را طوری اختیار می‌کنیم که این برابری‌ها برقرار باشد:

$$b^3 + b^2q + bq + r = 0$$
$$c^3 + c^2q + cp + r = 0$$
$$d^3 + d^2q + dp + r = 0$$

از این‌جا، به‌دست می‌آید (مساله ۲۳ را ببینید):

$$q = -(b + c + d), \quad p = bc + bd + cd, \quad r = -bcd,$$

و درنتیجه:

$$x = \frac{N}{a^3 + a^2q + ap + r} = \frac{N}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$

که در آن:

$$N = -mbcd + n(bc + bd + cd) - k(b + c + d) + l$$

باتوجه به تساوی

$$a^3 + a^2q + ap + r = (a-b)(a-c)(a-d)$$

که به سادگی از اتحاد زیر نتیجه می‌شود:

$$\alpha^3 + q\alpha^2 + p\alpha + r = (\alpha - b)(\alpha - c)(\alpha - d)$$

برای محاسبهٔ متغیر y، مقدارهای q، p و r را طوری انتخاب می‌کنیم که این برابری‌ها برقرار باشد:

$$a^3 + a^2q + ap + r = 0,$$
$$c^3 + c^2q + cp + r = 0,$$
$$d^3 + d^2q + dp + r = 0$$

متغیرهای باقی‌مانده به‌طور مشابه پیدا می‌شوند.

۲۶. قرار دهید: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s$.

با جمع جمله به جملهٔ معادله‌های دستگاه، به‌دست می‌آید:

$$s + ۲s + ۳s + \ldots + ns = a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n$$

می‌دانیم $\frac{n(n+۱)}{۲} = ۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n$؛ بنابراین

$$s = \frac{۲}{n(n+۱)}(a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n) = A$$

اکنون معادله دوم را از معادله اول کم می‌کنیم، به‌دست می‌آوریم:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + \ldots + x_n - nx_۱ = a_۱ - a_۲$$

از این‌رو: $nx_۱ = A + a_۲ - a_۱$ و $x_۱ = \frac{A + a_۲ - a_۱}{n}$

اگر معادله سوم را از معادلهٔ دوم کم کنیم، حاصل می‌شود:

$$x_۲ = \frac{A + a_۳ - a_۲}{n}$$

و به‌همین ترتیب، مجهول‌های دیگر هم به‌دست می‌آیند.

۲۷. فرض می‌کنیم: $x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = s$

آنگاه داریم:

$$-s + ۲x_۱ = ۲a, -s + ۴x_۲ = ۴a$$

$$-s + ۸x_۳ = ۸a, \ldots, -s + ۲^n x_n = ۲^n a$$

بنابراین:

$$x_۱ = a + \frac{s}{۲}, \quad x_۲ = a + \frac{s}{۴}, \quad x_۳ = a + \frac{s}{۸}, \ldots, \quad x_n = a + \frac{s}{۲^n}$$

با جمع این برابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$s = na + s\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \ldots + \frac{۱}{۲^n}\right)$$

اما:

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \ldots + \frac{۱}{۲^n} = ۱ - \frac{۱}{۲^n}$$

بنابراین: $s = 2^n na$.

درنتیجه:

$$x_1 = a + \frac{s}{2} = a + 2^{n-1}na = a(1 + n \cdot 2^{n-1})$$

$$x_2 = a + \frac{s}{4} = a + 2^{n-2}na = a(1 + n \cdot 2^{n-2})$$

۲۸. فرض کنید:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = s = 1$$

در این صورت

$$s - x_2 = 2, \quad s - x_3 = 3, \ldots, \quad s - x_{n-1} = n - 1, \quad s - x_n = n$$

درنتیجه (از آنجاکه $s = 1$)

$$x_2 = -1, \quad x_3 = -2, \quad \ldots, \quad x_n = -(n-1)$$

از اینرو:

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -[(1 + 2 + \ldots + (n-1)] = -\frac{n(n-1)}{2}$$

و سرانجام $x_1 = 1 - (x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$.

۲۹. فرض کنید معادلهها، سازگار هستند، یعنی مقداری مانند x وجود دارد که بهازای آن هر دو معادله برقرار است. با قرار دادن این مقدار x در معادلههای داده شده، به اتحادهای زیر دست مییابیم:

$$ax + b = 0, \quad a'x + b' = 0$$

معادلهٔ اول را در b' و معادلهٔ دوم را در b ضرب میکنیم، سپس دو معادله را از هم کم میکنیم، بهدست میآید:

$$(ab' - a'b)x = 0$$

اگر جواب مشترک برای x، مخالف صفر باشد، آنگاه باید داشته باشیم:

$$ab' - a'b = 0$$

اگر جواب مشترک برابر صفر باشد، آن‌گاه از معادلهٔ اصلی نتیجه می‌شود:

$$b = b' = ٠$$

و بنابراین، در این حالت نیز: $ab' - a'b = ٠$. به‌این ترتیب، شرط $ab' - a'b = ٠$، شرط وجود ریشهٔ مشترک بین دو معادله است. برعکس، اگر شرط $ab' - ab' = ٠$ برقرار باشد، دو معادله، یک ریشهٔ مشترک دارند (ضریب‌های معادله‌ها متناسب هستند) و درنتیجه، سازگارند.

۳۰. برای اثبات هم‌ارز بودن دستگاه‌های داده شده، لازم است ثابت کنیم که هر جواب یکی از دستگاه‌ها به‌طور هم‌زمان یک جواب دستگاه دیگر است. درواقع، روشن است که هر جواب دستگاه اول، درعین حال جواب دستگاه دوم است. تنها اثبات این مطلب باقی می‌ماند که هر جواب دستگاه دوم نیز، یک جواب برای دستگاه اول است. فرض کنید یک جفت عدد مانند x و y جواب دستگاه دوم باشد یعنی داشته باشیم:

$$l\xi + l\xi' = ٠$$
$$m\xi + m'\xi' = ٠$$

که در آن: $\xi = ax + by + c$ و $\xi' = a'x + b'y + c'$. با ضرب برابری اول در m' و برابری دوم در l' و تفریق جمله‌به‌جملهٔ آن‌ها، حاصل می‌شود:

$$(lm' - ml')\xi = ٠$$

به‌طور مشابه، با ضرب برابری اول در m و برابری دوم در l و تفریق آن‌ها، به‌دست می‌آید:

$$(lm' - ml')\xi' = ٠$$

اما از آنجا که بنابه‌فرض: $lm' - ml' \neq ٠$، از دو برابری اخیر نتیجه می‌شود:

$$\xi = ٠, \quad \xi' = ٠$$

یعنی $ax + by + c = ٠$ و $a'x + b'y + c' = ٠$ به‌این ترتیب، جفت عددهای x و y که جواب دستگاه دوم است، به‌طور هم‌زمان جواب دستگاه اول هم است.

۳۱. با ضرب معادلهٔ اول در b' و معادلهٔ دوم در b و تفریق جمله به جملهٔ آن‌ها، حاصل می‌شود:

$$(ab' - a'b)x + cb' - c'b = ٠$$

بههمین ترتیب، بهدست میآید:

$$(ab' - a'b)y + c'a - a'c = ۰$$

این دو معادله، همارز معادلههای اصلی هستند. روشن است که اگر $ab' - a'b \neq ۰$، آنگاه یک و تنها یک جفت از مقدارهای x و y وجود دارد که در دو برابری آخر و درنتیجه در دستگاه اصلی نیز صدق میکند.

۳۲. با ضرب برابری اول در b' و برابری دوم در b و تفریق آنها، بهدست میآید:

$$(ab' - a'b)x = ۰$$

از آنجاکه، بنابهفرض، $ab' - a'b \neq ۰$، نتیجه میشود که $x = ۰$. بهطور مشابه ثابت میشود که $y = ۰$.

۳۳. از دو معادلهٔ اول نتیجه میشود:

$$x = \frac{c'b - cb'}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{a'c - c'a}{ab' - a'b}$$

اگر سه معادله سازگار باشند، آنگاه جفت عددهای x و y جواب دستگاه دو معادلهٔ اول باید در معادلهٔ سوم نیز صدق کند. بنابراین، اگر معادلههای داده شده سازگار باشند، باید داشته باشیم:

$$a''\frac{c'b - cb'}{ab' - a'b} + b''\frac{a'c - c'a}{ab' - a'b} + c'' = ۰$$

یا

$$a''(c'b - cb') + b''(a'c - c'a) + c''(ab' - a'b) = ۰ \quad (*)$$

برعکس، وجود این رابطه، به این معنی است که یک جواب، که در دو معادلهٔ اول صدق میکند، در معادلهٔ سوم نیز صدق میکند. این رابطه را میتوان به صورتهای زیر نیز نوشت:

$$a'(cb'' - c''b) + b'(ac'' - ca'') + c'(ba'' - b''a) = ۰$$
$$a(c''b' - c'b'') + b(a''c' - c''a') + c(b''a' - a''b') = ۰$$

از اینجا نتیجه میشود، جواب حاصل از هر دو معادله، بهناچار جواب معادله سوم است، یعنی دستگاه سازگار است مشروط بر اینکه شرط $(*)$ برقرار باشد.

۳۴. با کم کردن برابری دوم از برابری اول سپس، با کم کردن برابری سوم از برابری اول، به‌دست می‌آید:

$$(a-b)y+(a^{2}-b^{2})z=0 \quad \text{و} \quad (a-c)y+(a^{2}-c^{2})z=0$$

از آن‌جا $a-b\neq 0$ و $a-c\neq 0$، به این برابری‌ها می‌رسیم:

$$y+(a+b)z=0, \quad y+(a+c)z=0$$

که از تفاضل آن‌ها، به‌دست می‌آید:

$$(b-c)z=0$$

اما بنابه فرض $b-c\neq 0$، بنابراین $z=0$. با جای‌گزینی این تعداد در یکی از دو معادلهٔ اخیر، $y=0$ به‌دست می‌آید. سرانجام، با استفاده از یکی از معادله‌های اصلی، حاصل می‌شود: $x=0$.

۳۵. با ضرب برابری اول در B_1 و ضرب برابری دوم در B، و تفریق جمله‌به‌جملهٔ آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$(AB_1-A_1B)x+(CB_1-C_1B)z=0 \qquad (1)$$

به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$(AC_1-A_1C)x+(BC_1-B_1C)y=0 \qquad (2)$$

فرض کنید هیچ‌یک از عبارت‌های زیر صفر نباشد:

$$AB_1-A_1B, \quad CB_1-C_1B, \quad AC_1-A_1C$$

آن‌گاه نتیجه می‌شود:

$$\frac{x}{C_1B-CB_1}=\frac{y}{AB_1-A_1B}$$

[با ضرب دو طرف برابری اول در حاصلضرب $(AB_1-A_1B)(C_1B-CB_1)$] و

$$\frac{x}{C_1B-CB_1}=\frac{y}{CA_1-AC_1}$$

بنابراین، در این حالت، تناسب موردنظر برقرار است.

اکنون، یک و تنها یکی از این عبارت‌ها برابر صفر است:

$$AB_۱ - A_۱B, \quad CB_۱ - C_۱B, \quad AC_۱ - A_۱C$$

برای مثال فرض می‌کنیم: $CB_۱ - C_۱B = ۰$. آن‌گاه از برابری‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید $x = ۰$. علاوه بر این، فرض کنید که دو عبارت از سه عبارت داده شده یعنی $C_۱B - CB_۱$ و $CA_۱ - AC_۱$ برابر صفر و عبارت سوم یعنی $AB_۱ - A_۱B$ مخالف صفر باشد.

آن‌گاه برابری نتیجه می‌شود که $x = y = ۰$. در این حالت‌ها، تناسب یا به بیان دقیق‌تر برابری:

$$x = \lambda(C_۱B - CB_۱)$$
$$y = \lambda(CA_۱ - AC_۱)$$
$$z = \lambda(AB_۱ - A_۱B)$$

نیز برقرار خواهند بود.

به‌این ترتیب، از این حالت‌ها، در دو معادله داده شده، متغیرهای x، y و z با تقریب ضریب مشترک تناسب به‌دست می‌دهد.

اگر هر سه کمیت

$$AB_۱ - A_۱B, \quad CB_۱ - C_۱B, \quad AC_۱ - A_۱C$$

برابر صفر باشد، آن‌گاه تناسب زیر وجود دارد.

$$\frac{A}{A_۱} = \frac{B}{B_۱} = \frac{C}{C_۱}$$

در این حالت، دو معادله (که یک دستگاه تشکیل می‌دهند) به یک معادله تبدیل می‌شود.

۳۶. از دو معادلهٔ اول (مساله قبل را ببینید) نتیجه می‌شود:

$$\frac{x}{ac - b^۲} = \frac{y}{bc - a^۲} = \frac{x}{ab - c^۲}$$

از این‌جا:

$$x = \lambda(ac - b^۲), \quad y = \lambda(bc - a^۲), \quad z = \lambda(ab - c^۲)$$

با جایگزینی این مقدارها در معادلهٔ سوم، به‌دست می‌آید:

$$b(ac - b^۲) + a(bc - a^۲) + c(ab - c^۲) = ۰$$

یا

$$a^۳ + b^۳ + c^۳ - ۳abc = ۰$$

۳۷. با ضرب دو معادلهٔ اول، به‌دست می‌آید:

$$\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{x^۲}{c^۲} = ۱ - \frac{y^۲}{b^۲}$$

با ضرب معادله سوم در معادله چهارم نیز همین نتیجه به‌دست می‌آید که نشان می‌دهد اگر هریک از سه معادلهٔ داده شده وجود داشته باشد، آن‌گاه معادلهٔ چهارم نیز وجود دارد، یعنی دستگاه سازگار است.

برای به‌دست آوردن مقدارهایی از x، y و z که در دستگاه صدق کند به روش زیر عمل می‌کنیم: سمت راست معادله‌های اول و سوم را برابر هم قرار می‌دهیم، حاصل می‌شود:

$$\lambda\left(۱ + \frac{y}{b}\right) = \mu\left(۱ - \frac{y}{b}\right)$$

این معادله را نسبت به y حل می‌کنیم

$$y = b\frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda}$$

این مقدار را در دو معادله اول قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{۲\lambda\mu}{\mu + \lambda}, \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{۲}{\mu + \lambda}$$

از آن‌جا

$$x = a\frac{\lambda\mu + ۱}{\mu + \lambda}, \quad z = c\frac{\lambda\mu - ۱}{\mu + \lambda}$$

۳۸. دستگاه را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$a(x + py) + b(x + qy) = ap^۲ + bq^۲$$
$$ap(x + py) + bq(x + qy) = ap^۳ + bq^۳$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$ap^{k-۱}(x + py) + bq^{k-۱}(x + qy) = ap^{k+۱} + bq^{k+۱}$$

اکنون روشن است، دستگاه هم از این دو معادله است:

$$x + py = p^2, \quad x + qy = q^2$$

و بنابراین، دستگاه سازگار است.

۳۹. داریم:

$$x_2 = a_1 - x_1$$

$$x_3 = a_2 - x_2 = a_2 - a_1 + x_1$$

$$x_4 = a_3 - x_3 = a_3 - a_2 + a_1 - x_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = a_{n-1} - a_{n-2} + \dots \pm a_2 \pm a_1 \pm x_1$$

لازم به ذکر است که برابری اخیر علامت بالا وقتی اتفاق می‌افتد که n فرد باشد و علامت پایین وقتی است که n زوج باشد.

دو حالت را به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

الف) فرض کنید n فرد باشد. آن‌گاه:

$$x_n = a_{n-1} - a_{n-2} + \dots + a_2 - a_1 + x_1$$

از طرف دیگر: $x_n + x_1 = a_n$. از این‌جا به‌دست می‌آید:

$$x_1 = \frac{a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \dots - a_2 + a_1}{2}$$

و

$$x_2 = \frac{a_1 - a_n + a_n - \dots - a_4 + a_2}{2}$$

$$x_3 = \frac{a_2 - a_1 + a_n - \dots - a_4 + a_3}{2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

ب) اکنون فرض می‌کنیم، n عددی زوج باشد، در این صورت

$$x_n = a_{n-1} - a_{n-2} + \dots - a_2 + a_1 - x_1$$

بنابراین $x_n = a_n - x_1$، درنتیجه، برابری این‌که دستگاه سازگار باشد، باید داشته باشیم:

$$a_{n-1} - a_{n-2} + \ldots - a_2 + a_1 = a_n$$

یعنی

$$a_n + a_{n-2} + \ldots + a_2 = a_{n-1} + a_{n-3} + \ldots + a_1$$

(مجموع ضریب‌های اندیس‌های زوج باید برابر مجموع ضریب‌های اندیس‌های فرد باشد.) روشن است، در این حالت، دستگاه نامعین است، یعنی به تعداد بی‌شمار، جواب دارد. به بیان دیگر:

$$x_1 = \lambda$$

$$x_2 = a_1 - \lambda$$

$$x_3 = a_2 - a_1 + \lambda$$

$$x_4 = a_3 - a_2 + a_1 - \lambda$$

$$x_n = a_{n-1} - a_{n-2} + \ldots + a_3 - a_2 + a_1 - \lambda$$

که در آن λ عددی دلخواه است.

۴۰. از دو معادلهٔ اول به‌دست می‌آید:

$$\frac{x}{\frac{b^2}{b-d} - \frac{c^2}{c-d}} = \frac{y}{\frac{c^2}{c-d} - \frac{a^2}{c-d} - \frac{a^2}{a-d}} = \frac{z}{\frac{a^2}{a-d} - \frac{b^2}{b-d}} = \lambda$$

با جای‌گذاری این مقدارها در معادلهٔ سوم، به‌دست می‌آید:

$$\lambda\left\{\frac{a}{a-d}\left(\frac{b^2}{b-d} - \frac{c^2}{c-d}\right) + \frac{b}{b-d}\left(\frac{c^2}{c-d} - \frac{a^2}{a-d}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{c}{c-d}\left(\frac{a^2}{a-d} - \frac{b^2}{b-d}\right)\right\} = d(a-b)(b-c)(c-a)$$

که پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$\frac{a}{a-d}\left(\frac{b^2}{b-d} - \frac{c^2}{c-d}\right) + \frac{b}{b-d}\left(\frac{c^2}{c-d} - \frac{a^2}{a-d}\right) +$$
$$+ \frac{c}{c-d}\left(\frac{a^2}{a-d} - \frac{b^2}{b-d}\right) = \frac{d(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-d)(b-d)(c-d)}$$

بنابراین: $\lambda = -(a-d)(b-d)(c-d)$. و درنتیجه:

$$x = (a-d)(b-c)(db+dc-bc)$$
$$y = (b-d)(c-a)(dc+da-ac)$$
$$z = (c-d)(a-b)(ad+db-ab)$$

۴۱. دو معادله آخر را نسبت به x و y حل می‌کنیم

$$x+n = \frac{(c-m)(n-a)}{z+c}$$
$$y+b = \frac{(b-l)(m-c)}{z+m}$$

بنابراین:

$$x+a = \frac{(c-m)(n-a)}{x+c} - (n-a) = (a-n)\frac{z+m}{z+c}$$

به‌همین ترتیب $y+l = (l-b)\frac{x+c}{z+m}$. با جای‌گزینی این مقدارها برای $x+a$ و $y+l$ در معادلهٔ اول، دیده می‌شود، این معادله، نتیجهٔ دو معادله آخر است. بنابراین دستگاه نامعین است و تمام جواب‌ها با دستورهای

$$x = \frac{(c-m)(n-a)}{x+c} - n, \quad y = \frac{(b-l)(m-c)}{z+m} - b$$

به‌ازای همهٔ مقدارهای z به‌دست می‌آیند.

۴۲. از معادلهٔ دوم و سوم، به‌دست می‌آید:

$$(۱-k)x + ky = -[(۱+x)x + (۱۲-k)y]$$

بنابراین، باتوجه به معادله اول $(۵-k)y = ۰$ که از آن یا $k = ۵$ یا $y = ۰$ (پس $x = ۰$)، و با جای‌گذاری در معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود: $k = -۱$.

۴۳. داریم:

$$\sin ۲a = ۲\sin a\cos a; \quad \sin ۳a = \sin a(۴\cos^۲ a - ۱)$$
$$\sin ۴a = ۴\sin a(۲\cos^۳ a - \cos a)$$

بنابراین معادله اول دستگاه، به این صورت درمی‌آید:

$$x + ۲y\cos a + ۲(۴\cos^۲ a - ۱) = ۴(۲\cos^۳ a - \cos a)$$

دو معادلهٔ باقی‌مانده را به‌صورت مشابه تبدیل می‌کنیم. این معادله را برحسب توان‌های $\cos a$ بسط می‌دهیم. داریم:

$$۸\cos^۳ a - ۴z\cos^۲ a - (۲y + ۴)\cos a + z - x = ۰$$

بافرض $\cos a = t$ و تقسیم دو طرف بر ۸، به‌دست می‌آید:

$$t^۳ - \frac{z}{۲}t^۲ - \frac{y+۲}{۴}t + \frac{z-x}{۸} = ۰ \qquad (*)$$

دستگاه، هم‌ارز این حکم است که معادلهٔ $(*)$ سه ریشه دارد: $t = \cos a$، $t = \cos b$ و $t = \cos c$، که از آن نتیجه می‌شود (مساله ۲۳ را ببینید)

$$\frac{z}{۲} = \cos a + \cos b + \cos c$$

$$\frac{y+۲}{۴} = -(\cos a\cos b + \cos a\cos c + \cos b\cos c)$$

$$\frac{x-z}{۸} = \cos a\cos b\cos c$$

بنابراین، جواب دستگاه عبارت است از:

$$x = ۲(\cos a + \cos b + \cos c) + ۸\cos a\cos b\cos c$$

$$y = -۲ - ۴(\cos a\cos b + \cos a\cos c + \cos b\cos c)$$

$$z = ۲(\cos a + \cos b + \cos c)$$

۴۴. فرض می‌کنیم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$$

از آنجاکه $A + B + C = \pi$، داریم:

$$\sin A = \sin(B + C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$$

اما از تناسب داده شده به‌دست می‌آید:

$$\sin A = \frac{a}{k}, \quad \sin B = \frac{b}{k}, \quad \sin C = \frac{c}{k}$$

با جای‌گذاری این مقدارها در برابری اخیر، به‌دست می‌آید:

$$a = b\cos C + c\cos B$$

بقیهٔ برابری‌ها هم، به‌همین ترتیب به‌دست می‌آیند.

۴۵. a و b را برحسب c و تابع‌های مثلثاتی (از دو برابری اول) می‌نویسیم:

$$b = \frac{c(\cos A + \cos B\cos C)}{\sin^{۲} C} \qquad (۱)$$

$$a = \frac{c(\cos B + \cos A\cos C)}{\sin^{۲} C} \qquad (۲)$$

با جایگذاری (۱) و (۲) در برابری سوم و انجام تبدیل‌های لازم، به‌دست می‌آید:

$$۱ - \cos^{۲} A - \cos^{۲} B - \cos^{۲} C - ۲\cos A\cos B\cos C = ۰$$

اکنون ثابت می‌کنیم که: $A + B + C = \pi$.

برابری به‌دست آمده را به این صورت می‌نویسیم:

$$\cos^{۲} A + ۲\cos A\cos B\cos C = ۱ - \cos^{۲} A - \cos^{۲} C -$$
$$- \cos^{۲} B\cos^{۲} C + \cos^{۲} B\cos^{۲} C$$
$$\cos^{۲} A + ۲\cos A\cos B\cos C + \cos^{۲} B\cos^{۲} C = ۱ - \cos^{۲} B -$$
$$- \cos^{۲} C(۱ - \cos^{۲} B)(\cos A + \cos B\cos C)^{۲} = \sin^{۲} B\sin^{۲} C$$

اما از آن‌جا که به‌دست آوردیم [(۱) را ببینید]:

$$\cos A + \cos B\cos C = \frac{b\sin^{۲} C}{c} > ۰$$

داریم:

$$\cos A + \cos B\cos C = \sin B\sin C,$$
$$\cos A = \sin B\sin C - \cos B\cos C = -\cos(B + C)$$
$$\cos A + \cos(B + C) = ۲\cos\frac{A + B + C}{۲}\cos\frac{A - B - C}{۲} = ۰$$

که از آن‌جا، به یکی از این دو برابری می‌رسیم:

$$\frac{A+B+C}{۲}=(۲l+۱)\frac{\pi}{۲};$$
$$\frac{A-B-C}{۲}=(۲l'+۱)\frac{\pi}{۲}$$

نتیجه می‌شود که در آن l و l' عددهایی درست هستند. نخست نشان می‌دهیم که حالت دوم ناممکن است، در این حالت باید داشته باشیم:

$$A-B-C=(۲l'+۱)\pi,\quad B=A-C-(۲l'+۱)\pi,$$
$$\cos B=\cos(A-C-\pi)=-\cos(A-C)=-\cos A\cos C-\sin A\sin C$$

درنتیجه:

$$\cos B+\cos A\cos C=-\sin A\sin C<۰$$

که ممکن نیست، زیرا در (۲) به‌دست آورده‌ایم.

$$\cos B+\cos A\cos C=\frac{a\sin^{۲}C}{c}>۰$$

بنابراین، باتوجه به نابرابری‌ها و وجود A، B و C داریم:

$$۰<۲l+۱<۳$$

یعنی: $۲l+۱=۱$ و $A+B+C=\pi$.

تنها اثبات این مطلب می‌ماند که:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

نشان داده‌ایم که:

$$\cos A+\cos B\cos C=\sin B\sin C$$

از سوی دیگر:

$$\cos B+\cos A\cos C=\cos(\pi-A-C)+\cos A\cos C=$$
$$-\cos(A+C)+\cos A\cos C=\sin A\sin B$$

با استفاده از این برابری و همچنین برابری‌های (۱) و (۲)، به‌سادگی به تناسب مورد نظر دست می‌یابیم.

۴۶. نخست نشان می‌دهیم که معادلهٔ (۲) از معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود. با ضرب معادلهٔ اول (۱) در a، معادلهٔ دوم در b و معادله سوم در c و جمع جمله به جملهٔ آن‌ها، حاصل می‌شود:

$$a^۲ + b^۲ - c^۲ = ۲a \cos A \cos B \cos C$$

یعنی معادلهٔ سوم از معادله‌های (۲) به‌دست آمد. به‌همین ترتیب، دو معادلهٔ دیگر (۲) به‌دست می‌آید.

برای به‌دست آوردن (۱) از معادله‌های (۲)، دو معادلهٔ اول (۲) را با هم جمع می‌کنیم.

$$۲c^۲ - ۲bc \cos A - ۲ac \cos B = ۰$$

بنابراین: $c = b \cos A + a \cos B$.

یعنی سومین معادلهٔ (۱) را به‌دست آورده‌ایم. بقیهٔ معادله‌ها هم به‌صورت مشابه به‌دست می‌آید.

۴۷. از برابری اول به‌دست می‌آید:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

بنابراین:

$$\sin^۲ A = ۱ - \cos^۲ A = \frac{\sin^۲ b \sin^۲ c - (\cos a - \cos b \cos c)^۲}{\sin^۲ b \sin^۲ c} =$$

$$= \frac{(۱ - \cos^۲ b)(۱ - \cos^۲ c) - (\cos a - \cos b \cos c)^۲}{\sin^۲ b \sin^۲ c} =$$

$$= \frac{۱ - \cos^۲ a - \cos^۲ b - \cos^۲ c + ۲ \cos a \cos b \cos c}{\sin^۲ b \sin^۲ c}$$

درنتیجه:

$$\frac{\sin^۲ A}{\sin^۲ a} = \frac{۱ - \cos^۲ a - \cos^۲ b - \cos^۲ c + ۲ \cos a \cos b \cos c}{\sin^۲ a \sin^۲ b \sin^۲ c}$$

از آن‌جاکه این دستورها را با تبدیل‌های دوری و حرف‌های a و b و c و A و B و C می‌توان به یکدیگر تبدیل کرد و به‌عنوان یک نتیجه این تبدیل، طرف راست برابری اخیر بدون تغییر باقی می‌ماند،

در واقع داریم:

$$\frac{\sin^۲ A}{\sin^۲ a}=\frac{\sin^۲ B}{\sin^۲ b}=\frac{\sin^۲ c}{\sin^۲ c}$$

a و b و c و A و B و C بین ۰ و π قرار دارند، بنابراین:

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$$

۴۸. الف) دو برابری اخیر (*) از مسالهٔ قبل را در نظر بگیرید، داریم:

$$\cos b-\cos c\cos a=\sin a\sin c\cos B$$
$$-\cos a\cos b+\cos c=\sin a\sin b\cos C$$

معادله اول را در $\cos a$ و معادله دوم را در ۱ ضرب و سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$-\cos c\cos^۲ a+\cos c=\sin a\sin c\cos B\cos a+\sin a\sin b\cos C$$

بنابراین:

$$\cos c\sin a=\sin c\cos a\cos B+\sin b\cos c$$

اما از آن‌جا که در مساله قبل نشان داده شده است که برابری‌های (*)، منجر به این نسبت‌های برابر می‌شوند

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

در برابری اخیر، می‌توان به‌جای $\sin a$ و $\sin b$ و $\sin c$ هم‌ارزهای آن‌ها را جایگزین کرد. به‌دست می‌آید:

$$\cos c\sin A=\sin C\cos a\cos B+\sin B\cos C$$

روشن است که شش برابری از این نوع وجود دارد. اکنون یک برابری دیگر از آن‌ها را در نظر می‌گیریم، یعنی آن برابری که هم $\cos c$ و هم $\cos a$ را شامل می‌شود. این برابری به‌صورت زیر است:

$$\cos a\sin C=\sin A\cos c\cos B+\sin B\cos A$$

این برابری را می‌توان به این صورت به‌دست آورد: از برابری‌های (*)، برابری دوم را و $\cos C$ و اولین برابری را در ۱ ضرب کنید، آن‌ها را با هم جمع کنید و در برابری به‌دست آمده، به‌جای $\sin c$ مقدار $\sin C$ و غیره را جای‌گزین کنید.) بنابراین داریم:

$$\cos c \sin A = \sin C \cos a \cos B + \sin B \cos C$$
$$\cos a \sin C = \sin A \cos c \cos B + \sin B \cos A$$

با حذف $\cos c$، حاصل می‌شود:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

بقیهٔ برابری‌ها را می‌توان از این برابری با استفاده از تبدیل دوری به‌دست آورد.

ب) دستورهای (*) از مساله ۴۷ به ما اجازه می‌دهد که بتوانیم $\cos A$ و $\cos B$ و $\cos C$ را برحسب $\sin a$ و $\sin b$ و $\sin c$ و $\cos a$ و $\cos b$ و $\cos c$ بنویسیم. حال عبارت‌هایی برای $\sin \frac{A}{۲}$ و $\cos \frac{A}{۲}$ به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$۲\sin^۲ \frac{A}{۲} = ۱ - \cos A = ۱ - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}$$
$$۲\cos^۲ \frac{A}{۲} = ۱ + \cos A = ۱ + \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c}$$

بنابراین:

$$\sin \frac{A}{۲} = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b-c}{۲} \sin \frac{a+c-b}{۲}}{\sin b \sin c}}$$
$$\cos \frac{A}{۲} = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{۲} \sin \frac{b+c-a}{۲}}{\sin b \sin c}}$$

برای $\sin \frac{B}{۲}$ و $\cos \frac{B}{۲}$ و $\sin \frac{C}{۲}$ و $\cos \frac{C}{۲}$ نیز عبارت‌های مشابه به‌دست می‌آید. حال $\sin \frac{A+B}{۲}$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\sin\frac{A+B}{۲}=\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}+\cos\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{۲}\sin\frac{a+b-c}{۲}}{\sin a\sin b}}\left(\frac{\sin\frac{a+c-b}{۲}}{\sin c}+\frac{\sin\frac{b+c-a}{۲}}{\sin c}\right)=$$

$$=\cos\frac{C}{۲}\cdot\frac{\cos\frac{a-b}{۲}}{\cos\frac{c}{۲}}$$

بنابراین، دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$\sin\frac{A+B}{۲}=\frac{\cos\frac{a-b}{۲}}{\cos\frac{c}{۲}}\cos\frac{C}{۲}$$

به‌همین ترتیب به‌دست می‌آید:

$$\cos\frac{A+B}{۲}=\frac{\cos\frac{a+b}{۲}}{\cos\frac{c}{۲}}\sin\frac{C}{۲}$$

از آنجاکه: $\varepsilon=A+B+C-\pi$، یعنی $\frac{A+B}{۲}=\frac{\pi}{۲}-\frac{C-\varepsilon}{۲}$، پس

$$\sin\frac{A+B}{۲}=\cos\frac{C-\varepsilon}{۲}$$

و درنتیجه:

$$\frac{\cos\frac{c-\varepsilon}{۲}}{\cos\frac{c}{۲}}=\frac{\cos\frac{a-b}{۲}}{\cos\frac{c}{۲}}$$

بنابراین:

$$\frac{\cos\frac{c-\varepsilon}{۲}-\cos\frac{c}{۲}}{\cos\frac{c-\varepsilon}{۲}+\cos\frac{c}{۲}}=\frac{\cos\frac{a-b}{۲}-\cos\frac{c}{۲}}{\cos\frac{a-b}{۲}+\cos\frac{c}{۲}}$$

و درنتیجه:

$$\tan\frac{\varepsilon}{۴}\tan\left(\frac{c}{۲}-\frac{\varepsilon}{۴}\right)=\tan\frac{p-b}{۲}\tan\frac{p-a}{۲} \qquad (۱)$$

با استفاده از دستور $\sin\frac{C}{۲}\dfrac{\cos\frac{a+b}{۲}}{\cos\frac{C}{۲}}=\cos\frac{A+B}{۲}$ و به‌طور مشابه به‌دست می‌آید:

$$\tan\frac{\varepsilon}{۴}\cot\left(\frac{c}{۲}-\frac{\varepsilon}{۴}\right)=\tan\frac{p}{۲}\tan\frac{p-c}{۲} \qquad (۲)$$

با ضرب جمله‌به‌جملهٔ برابری‌های (۱) و (۲) و جذر گرفتن، نتیجه می‌شود:

$$\tan\frac{۱}{۴}\varepsilon=\sqrt{\tan\frac{p}{۲}\tan\frac{p-a}{۲}\tan\frac{p-b}{۲}\tan\frac{p-c}{۲}}$$

۴۹. داریم:

$$a[\tan(x+\gamma)-\tan(x+\beta)]+b[\tan(x+\alpha)-\tan(x+\gamma)]$$
$$+c[\tan(x+\beta)-\tan(x+\alpha)]=۰$$

بنابراین:

$$\frac{a\sin(\gamma-\beta)}{\cos(x+\beta)\cos(x+\gamma)}+\frac{b\sin(\alpha-\gamma)}{\cos(x+\alpha)\cos(x+\gamma)}+$$
$$+\frac{c\sin(\beta-\alpha)}{\cos(x+\beta)\cos(x+\alpha)}=۰$$
$$a\sin(\gamma-\beta)\cos(x+\alpha)+b\sin(\alpha-\gamma)\cos(x+\beta)+$$
$$+c\sin(\beta-\alpha)\cos(x+\gamma)=۰$$

سرانجام:

$$\tan x=\frac{a\sin(\gamma-\beta)\cos\alpha+b\sin(\alpha-\gamma)\cos\beta+c\sin(\beta-\alpha)\cos\gamma}{a\sin(\gamma-\beta)\sin\alpha+b\sin(\alpha-\gamma)\sin\beta+c\sin(\beta-\alpha)\sin\gamma}$$

۵۰. داریم: $\cos^{۲}\frac{x}{۲}=\dfrac{۱}{۱+\tan^{۲}\frac{x}{۲}}$

بنابراین:

$$\cos x = ۲\cos^۲ \frac{x}{۲} - ۱ = \frac{۱ - \tan^۲ \frac{x}{۲}}{۱ + \tan^۲ \frac{x}{۲}}$$

$$\sin x = \tan x \cos x = \frac{۲\tan \frac{x}{۲}}{۱ - \tan^۲ \frac{x}{۲}} \cdot \frac{۱ - \tan^۲ \frac{x}{۲}}{۱ + \tan^۲ \frac{x}{۲}} = \frac{۲\tan \frac{x}{۲}}{۱ + \tan^۲ \frac{x}{۲}}$$

روشن است، اگر $\tan \frac{x}{۲}$ گویا باشد، آن‌گاه $\sin x$ و $\cos x$ نیز گویا هستند. نشان دهید که اگر $\sin x$ و $\cos x$ گویا باشند، آن‌گاه $\tan \frac{x}{۲}$ نیز گویا است.

از رابطهٔ اول داریم: $\left(۱ + \tan^۲ \frac{x}{۲}\right)\cos x - ۱ = ۱ - \tan^۲ \frac{x}{۲}$

بنابراین $\tan^۲ \frac{x}{۲} = \frac{۱ - \cos x}{۱ + \cos x}$

درنتیجه، اگر $\cos x$ گویا باشد، آن‌گاه $\tan^۲ \frac{x}{۲}$ نیز گویا است. اما از برابری دوم نتیجه می‌شود:

$$۲\tan \frac{x}{۲} = \sin x \left(۱ + \tan^۲ \frac{x}{۲}\right)$$

بنابراین، روشن است، اگر $\sin x$ و $\cos x$ گویا باشند، آن‌گاه $\tan \frac{x}{۲}$ نیز گویا است.

۵۱. ازآنجا که: $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$، داریم:

$$\sin^۴ x + \cos^۴ x + ۲\sin^۲ x \cos^۲ x = ۱;$$
$$\sin^۴ x + \cos^۴ x = ۱ - ۲\sin^۲ x \cos^۲ x$$

بنابراین معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$۱ - ۲\sin^۲ x \cos^۲ x = ۱ \Rightarrow ۲\sin^۲ x \cos^۲ x = ۱ - a;$$
$$\sin^۲ ۲x = ۲(۱ - a) \Rightarrow \sin ۲x = \pm\sqrt{۲(۱ - a)}$$

برای این‌که جواب‌ها حقیقی باشند، لازم و کافی است که داشته باشیم:

$$\frac{۱}{۲} \le a \le ۱$$

۵۲. الف) با تبدیل عبارت سمت چپ، به‌دست می‌آید:

$$\sin x + \sin ۳x + \sin ۲x = ۲ \sin ۲x \cos x + \sin ۲x =$$
$$= \sin ۲x(۱ + ۲\cos x) = ۰$$

بنابراین:

$$(۱) \quad \sin ۲x = ۰, \qquad (۲) \quad \cos x = -\frac{۱}{۲}$$

ب) در این حالت تبدیل‌های سمت چپ نتیجه می‌دهد:

$$\cos nx + \cos(n-۲)x - \cos x = ۲\cos(n-۱)x \cos x - \cos x =$$
$$= \cos x[۲\cos(n-۱)x - ۱] = ۰$$

یعنی یا $\cos x = ۰$ یا $\cos(n-۱)x = \frac{۱}{۲}$.

۵۳. الف) داریم:

$$m(\sin a \cos x - \cos a \sin x) - n(\sin b \cos x - \cos b \sin x) = ۰,$$
$$(n\cos b - m\cos a)\sin x - (n\sin b - m\sin a)\cos x = ۰,$$
$$(n\cos b - m\cos a)\cos x[\tan x - \frac{n\sin b - m\sin a}{n\cos b - m\cos a}] = ۰$$

بنابراین $\tan x = \dfrac{n\sin b - m\sin a}{n\cos b - m\cos a}$

ب) داریم: $sinx \cos ۳\alpha + \cos x \sin ۳\alpha = ۳(\sin\alpha \cos x - \cos\alpha \sin x)$

بنابراین: $\sin x(\cos ۳\alpha + ۳\cos\alpha) - \cos x(۳\sin\alpha - \sin\alpha) = ۰$

اما $\sin ۳\alpha = ۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha$ و $\cos ۳\alpha = ۴\cos^۳\alpha - ۳\cos\alpha$

بنابراین معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin x \cos^۳\alpha - \cos x \sin^۳\alpha = ۰$$

و بنابراین $\tan x = \tan^۳\alpha$.

۵۴. به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\sin ۵x = ۱۶\sin^۵ x - ۲۰\sin^۳ x + ۵\sin x$$

بنابراین، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$-۲۰\sin^۳ x + ۵\sin x = ۰ \Rightarrow \sin x(۱ - ۴\sin^۲ x) = ۰;$$
$$\sin x = ۰, \quad \sin x = \pm\frac{۱}{۲}$$

۵۵. داریم: $۲\sin x\cos(a - x) = \sin x + \sin(۲x - a)$
معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin x + \sin(۲x - a) = ۰ \Rightarrow ۲\sin\frac{۳x - a}{۲}\cos\frac{x - a}{۲} = ۰$$

بنابراین، حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:

$$\sin\frac{۳x - a}{۲} = ۰ \Rightarrow \frac{۳x - a}{۲} = k\pi$$

یعنی:

$$۳x = a + ۲k\pi, \quad x = \frac{a + ۲k\alpha}{۳}$$

که در آن k یک عدد درست است.

$$\cos\frac{x - a}{۲} = ۰ \Rightarrow \frac{x - a}{۲} = (۲l + ۱)\frac{\pi}{۲}, \quad x = a + (۲l + ۱)\pi$$

که در آن l یک عدد درست است.

۵۶. داریم: $\sin x\sin(\gamma - x) = \frac{۱}{۲}[\cos(۲x - \gamma) - \cos\gamma]$
بنابراین، معادله به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\cos(۲x - \gamma) = ۲a + \cos\gamma$$

۵۷. داریم:

$$\sin(\alpha + x) + \sin\alpha\sin x\frac{\sin(\alpha + x)}{\cos(\alpha + x)} - m\cos\alpha\cos x = ۰$$

علاوه بر این:

$$\frac{\sin(\alpha + x)}{\cos(\alpha + x)}\{\cos(\alpha + x) + \sin\alpha\sin x\} - m\cos\alpha\cos x = ۰$$

بنابراین:

$$\frac{\sin(\alpha+x)}{\cos(\alpha+x)}\cos\alpha\cos x - m\cos\alpha\cos x = \cos\alpha\cos x\{\tan(\alpha+x)-m\} = ۰$$

بافرض $\cos\alpha \neq ۰$، برای تعیین x، برابری‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\cos x = ۰ \text{ و } \tan(\alpha+x) = m$$

۵۸. معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos^۲\alpha + \cos^۲(\alpha+x) - ۲\cos\alpha\cos(\alpha+x) = ۱ - \cos^۲ x$$

بنابراین: $[\cos\alpha - \cos(\alpha+x)]^۲ - \sin^۲ x = ۰$

یعنی $[\cos\alpha - \cos(\alpha+x) - \sin x][\cos\alpha - \cos(\alpha+x) + \sin x] = ۰$

علاوه بر این:

$$[\cos\alpha(۱-\cos x) + \sin x(\sin\alpha - ۱)][\cos\alpha(۱-\cos x) + \sin x(\sin\alpha + ۱] = ۰$$

$$\sin^۲ x[\cos\alpha\tan\frac{x}{۲} + \sin\alpha - ۱][\cos\alpha\tan\frac{x}{۲} + \sin\alpha + ۱] = ۰$$

(با شرط $\sin x \neq ۰$). اگر $\sin x = ۰$، آن‌گاه $\cos^۲\alpha(۱-\cos x)^۲ = ۰$. اکنون به‌سادگی این جواب‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\cos x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi;$$
$$\tan x = \cot\alpha \Rightarrow x = -\alpha + \frac{۲k+۱}{۲}\pi$$

۵۹. به‌سادگی می‌توان به‌دست آورد:

$$\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}$$

بنابراین: $(۱-\tan x)\left(۱+\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}\right) = ۱ + \tan x$

درنتیجه:

$$\frac{(۱-\tan x)(۱+\tan x)^۲}{۱+\tan^۲ x}-(۱+\tan x)=۰,$$

$$\frac{۱+\tan x}{۱+\tan^۲ x}\{۱-\tan^۲ x-۱-\tan^۲ x\}=۰,$$

$$\frac{\tan^۲ x(۱+\tan x)}{۱+\tan^۲ x}=۰,$$

$$\tan x=۰,\quad \tan x=-۱$$

۶۰. داریم:

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}$$

بنابراین:

$$\tan x+\tan ۴x+\tan ۲x+\tan ۳x=\frac{\sin ۵x}{\cos x\cos ۴x}+\frac{\sin ۵x}{\cos ۲x\cos ۳x}$$

$$=\frac{\sin ۵x}{\cos x\cos ۲x\cos ۳x\cos ۴x}\{\cos ۲x\cos ۳x+\cos x\cos ۴x\}$$

اما

$$\cos ۳x=۴\cos^۳ x-۳\cos x$$

بنابراین، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\sin ۵x}{\cos ۲x\cos ۳x\cos ۴x}[\cos ۲x(۴\cos^۲ x-۳)+\cos ۴x]=۰$$

بنابراین $\frac{\sin ۵x[۴\cos^۲ ۲x-\cos ۲x-۱]}{\cos ۲x\cos ۳x\cos ۴x}=۰$

درنتیجه، یا $\sin ۵x=۰$ یعنی $۵x=k\pi$؛

یا

$$۴\cos^۲ x-\cos ۲x-۱=۰$$

$$۸\cos ۲x=۱\pm\sqrt{۱۷}$$

۶۱. عبارت‌های شامل X و Y را به‌جای x و y در سه‌جمله‌ای

$$ax^۲+۲bxy+cy^۲$$

قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$ax^۲ + bxy + cy^۲ = a(X\cos\theta - Y\sin\theta)^۲ +$$
$$+۲b(\times\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta) + c(X\sin\theta + Y\cos\theta)^۲ =$$
$$= (a\cos^۲\theta + ۲b\cos\theta\sin\theta + c\sin^۲\theta)X^۲ + (a\sin^۲\theta - ۲b\sin\theta\cos\theta +$$
$$+c\cos^۲\theta)Y^۲ + (-۲a\cos\theta\sin\theta + ۲c\cos\theta\sin\theta +$$
$$+۲b\cos^۲\theta - ۲b\sin^۲\theta)XY$$

از آن‌جا که بنابه‌فرض ضریب XY باید برابر صفر باشد، برای تعیین، معادلهٔ زیر را داریم:

$$۲b(\cos^۲\theta - \sin^۲\theta) - ۲(a-c)\sin\theta\cos\theta = ۰;$$
$$۲b\cos ۲\theta - (a-c)\sin ۲\theta = ۰ \Rightarrow \tan ۲\theta = \frac{۲b}{a-c}$$

۶۲. آشکار است که

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{\sin(۲\theta + \alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$$

بنابراین:

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^۲(\alpha-\beta) + \frac{y+z}{y-z}\sin^۲(\beta-\gamma) + \frac{z+x}{z-x}\sin^۲(\gamma-a) =$$
$$= \sin(۲\theta+\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) + \sin(۲\theta+\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma) +$$
$$+\sin(۲\theta+\gamma+\alpha)\sin(\gamma-\alpha)$$

اما

$$\sin(۲\theta+\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \frac{۱}{۲}\{\cos(۲\theta+۲\beta) - \cos(۲\theta+۲\alpha)\}$$

با استفاده از یک تبدیل دوری، به‌سادگی درستی اتحاد ثابت می‌شود.

۶۳. الف) فرض می‌کنیم: $\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin by}{b} = \frac{\sin z}{c} = k$

آن‌گاه داریم:

$$\sin x = ak, \quad \sin y = bk, \quad \sin z = ck$$

از سوی دیگر:

$$\sin z = \sin(\pi - x - y) = \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

از این‌رو:

$$a\cos y+b\cos x=c,\quad b\cos z+c\cos y=a,\quad c\cos x+a\cos z=b$$

با حل این دستگاه به‌دست می‌آید:

$$\cos x=\frac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}{۲bc},\quad \cos y=\frac{c^{۲}+a^{۲}-b^{۲}}{۲ca},\quad \cos z=\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲ab}$$

به‌ازای $k=۰$، جواب زیر را نیز داریم: $\sin x=\sin y=\sin z=۰$

ب) قرار دهید: $\frac{\tan x}{a}=\frac{\tan y}{b}=\frac{\tan z}{c}=k$

از آن‌جا $\tan x=ak,\quad \tan y=bk,\quad \tan z=ck$

با جمع جمله‌به‌جملهٔ این برابری‌ها، (مساله ۴۰ از فصل ۲ را ببینید) به‌دست می‌آید:

$$(a+b+c)k=\tan x+\tan y+\tan z=\tan x\tan y\tan z$$

درنتیجه: $(a+b+c)k-k^{۳}abc=۰$ بنابراین

$$k=۰,\quad k=\pm\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}}$$

از این‌رو یا $\tan x=\tan y=\tan z=۰$ و یا

$$\tan x=\pm\sqrt{\frac{(a+b+c)a}{bc}},\quad \tan y=\pm\sqrt{\frac{(a+b+c)b}{ac}},$$

$$\tan z=\pm\sqrt{\frac{(a+b+c)c}{ab}}$$

۶۴. داریم: $\tan ۲b=\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{۱-\tan x\tan y}$

اما بنابه‌فرض: $\tan x\tan y=a$، بنابراین

$$\tan x+\tan y=(۱-a)\tan ۲b$$

با معلوم بودن حاصل‌ضرب و مجموع تانژانت دو زاویه، به‌سادگی خود تانژانت‌ها به‌دست می‌آید.

۶۵. معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۴^{x}+۲^{۲x-۱}=۳^{x-\frac{۱}{۲}}+۳^{x+\frac{۱}{۲}};\quad ۴^{x}+\frac{۱}{۲}\times ۴^{x}=۳^{x-\frac{۱}{۲}}(۱+۳),$$

$$۴^{x}\times\frac{۳}{۲}=۳^{x-\frac{۱}{۲}}\times ۴$$

از آن‌جا $\frac{۴^{x-۱}}{۲} = ۲^{۲x-۳}$ و $۳^{x-\frac{۳}{۲}} = (\sqrt{۳})^{۲x-۳}$

و بنابراین: $\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}\right)^{۲x-۳} = ۱$، درنتیجه

$$۲x - ۳ = ۰, \quad x = \frac{۳}{۲}$$

۶۶. از دو طرف معادله لگاریتم می‌گیریم: به‌دست می‌آید:

$$(x + ۱)\log_{۱۰} x = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

۶۷. از معادله اول لگاریتم می‌گیریم، به‌دست می‌آید:

$$x \log_{۱۰} a + y \log_{۱۰} b = \log_{۱۰} m$$

باید این دستگاه را حل کنیم:

$$x \log_{۱۰} a + y \log_{۱۰} b = \log_{۱۰} m; \quad x + y = n$$

۶۸. قرار دهید: $x = b^{\xi}$ و $y = a^{\eta}$

(از این مساله و با توجه به این‌که فرض می‌کنیم $a > ۰$، $b > ۰$، $a \neq ۱$ و $b \neq ۱$ و یافتن جواب‌های مثبت)، آن‌گاه (بنابه معادله اول):

$$b^{\xi y} = a^{\eta x}$$

اما $b^y = a^x$، درنتیجه

$$b^{\xi y} = (b^y)^{\xi} = a^{x\xi}$$

بنابراین:

$$a^{x\xi} = a^{\eta x}, \quad x(\xi - \eta) = ۰$$

به‌این ترتیب یا $x = ۰$ یا $\xi = \eta$. اما به‌ازای $x = ۰$، به‌دست می‌آید $y = ۰$، با حذف این جواب، حالت $\xi = \eta$ را در نظر بگیرید، درنتیجه:

$$x = b^{\xi}, \quad y = a^{\xi}$$

اما $x\log a = y\log b$،

$$b^{\xi}\log a = a^{\xi}\log b, \quad \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi} = \frac{\log b}{\log a}$$

بنابراین:

$$\xi(\log b - \log a) = \log\frac{\log b}{\log a}, \quad \xi = \frac{\log\dfrac{\log b}{\log a}}{\log b - \log a}$$

از آن‌جا

$$x = b^{\xi} = \left(b^{\dfrac{\log\frac{\log b}{\log a}}{\log b}} \times \frac{\log b}{\log b - \log a}\right)$$

از آن‌جا که نسبت لگاریتم‌های دو عدد مستقل از پایه انتخاب شده است، در عبارت

$$\frac{\log\dfrac{\log b}{\log a}}{\log b}$$

می‌توانیم لگاریتم‌های اول را در پایهٔ b در نظر بگیریم. در این صورت

$$b^{\dfrac{\log\frac{\log b}{\log a}}{\log b}} = \frac{\log b}{\log a};$$

$$x = \left(\frac{\log b}{\log a}\right)\frac{\log b}{\log b - \log a}$$

به‌طور مشابه، حاصل می‌شود:

$$y = \left(\frac{\log b}{\log a}\right)\frac{\log a}{\log b - \log a}$$

۶۹. از معادله دوم لگاریتم می‌گیریم:

$$\frac{\log x}{\log a} = \frac{\log y}{\log b}$$

این نسبت را برابر ξ قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$x = a^{\xi}, \quad y = b^{\xi}$$

با جای‌گزینی این مقدارها در معادلهٔ اول و این فرض که $a \neq b \pm ۱$، به‌دست می‌آید $\xi = -۱$.
بنابراین $x = \frac{۱}{a}$ و $y = \frac{۱}{b}$.

۷۰. داریم $x = y^{\frac{x}{y}}$، درنتیجه: $x^m = y^{\frac{mx}{y}}$. با استفاده از معادله دوم، به‌دست می‌آید:

$$y^{\frac{mx}{y}} = y^n$$

از این‌رو یا $y = ۱$ و $x = ۱$، یا $\frac{mx}{y} = n$ یعنی $x = \frac{ny}{m}$. با جای‌گزینی در معادله دوم، داریم: $\left(\frac{ny}{m}\right)^m = y^n$ و $y^{m-n} = \left(\frac{m}{n}\right)^m$ و بنابراین: $y = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}}$ و

$$x = y^{\frac{x}{y}} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m-n}}$$

فصل ۵

۱. داریم:

$$x^۲\frac{(b+x)(x+c)}{(x-b)(x-c)} = \frac{x^۳(b+c-x)+xbcx}{(x-b)(x-c)}$$

بنابراین، سمت چپ معادله برابر است با:

$$(b+c+x)\left[\frac{x^۳}{(x-b)(x-c)}+\frac{b^۳}{(b-x)(b-c)}+\frac{c^۳}{(c-x)(c-b)}\right]+$$
$$+bcx\left[\frac{x}{(x-b)(x-c)}+\frac{b}{(b-x)(b-c)}+\frac{c}{(c-x)(c-b)}\right]$$

اما (مساله ۸ از فصل ۲ را ببینید):

$$\frac{x^۳}{(x-b)(x-c)}+\frac{b^۳}{(b-x)(b-c)}+\frac{c^۳}{(c-x)(c-b)} = b+c+x,$$
$$\frac{x}{(x-b)(x-c)}+\frac{b}{(b-x)(b-c)}+\frac{c}{(c-x)(c-b)} = ۰$$

بنابراین، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(b+c+x)^۲ = (b+c)^۲$$

بنابراین:

$$(b+c+x-b-c)(b+c+x+b+c)=۰$$

و درنتیجه:

$$x_۱=۰, \quad x_۲=-۲(b+c)$$

۲. معادله را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$(x-a)(x-b)(x-c)(b-c)(c-a)(a-b)\left\{\frac{a^۳}{(x-a)(c-a)(a-b)}+\right.$$
$$\left.+\frac{b^۳}{(x-b)(b-c)(a-b)}+\frac{c^۴}{(x-c)(c-a)(b-c)}\right\}=۰$$

می‌بینیم (مساله ۶ از فصل ۲ را ببینید):

$$\frac{a^۳}{(a-x)(a-b)(a-c)}+\frac{b^۳}{(b-x)(b-a)(b-c)}+\frac{c^۳}{(c-x)(c-a)(c-b)}$$
$$+\frac{x^۳}{(x-a)(x-b)(x-c)}=۱$$

بنابراین، معادله به‌این صورت نوشته می‌شود:

$$(x-a)(x-b)(x-c)(b-c)(c-a)(a-b)\times$$
$$\times\left\{۱-\frac{x^۳}{(x-a)(x-b)(x-c)}\right\}=۰;$$
$$(b-c)(c-a)(a-b)[(x-a)(x-b)(x-c)-x^۳]=۰$$

با این فرض که a و b و c مخالف هم هستند، نتیجه می‌شود:

$$(a+b+c)x^۲-(ab+ac+bc)x+abc=۰;$$
$$x=\frac{ab+ac+bc\pm\sqrt{(ab+ac+bc)^۲-۴abc(a+b+c)}}{۲(a+b+c)}$$

برای برابر رودن ریشه‌ها، لازم و کافی است که به‌ترتیب داشته باشیم:

$$(ab+ac+bc)^۲-۴abc(a+b+c)=۰;$$
$$a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲-۲a^۲bc-۲b^۲ac-۲c^۲ab=۰;$$

$$(ab+ac-bc)^2-4a^2bc=0;$$
$$\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)^2-\frac{4}{bc}=0;$$
$$\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}+\frac{2}{\sqrt{bc}}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}-\frac{2}{\sqrt{bc}}\right)=0;$$
$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2-\frac{1}{a}\right]\left[\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2-\frac{1}{a}\right]=0;$$

که سرانجام، به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=0$$

۳. معادله را به‌ترتیب به این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{(a-x)^{\frac{3}{2}}+(x-b)^{\frac{3}{2}}}{(a-x)^{\frac{1}{2}}+(x-b)^{\frac{1}{2}}}=a-b;$$
$$a-x-(a-x)^{\frac{1}{2}}(x-b)^{\frac{1}{2}}+x-b=a-b;$$

یا: $\sqrt{(a-x)(x-b)}=0$ یعنی $x_1=a$, $x_2=b$.

۴. داریم: $\sqrt{4a+b-5x}+\sqrt{4b+a-5x}=3\sqrt{a+b-2x}$ دو طرف برابری را، به‌توان دو می‌رسانیم، با انجام تبدیل‌های لازم، حاصل می‌شود،

$$\sqrt{4a+b-5x}\cdot\sqrt{4b+a-5x}=2(a+b-2x)$$

دوباره، برابری را به توان دو می‌رسانیم، نتیجه می‌شود:

$$(4a+b)(4b+a)-5x(4a+b+4b+a)+25x^2=$$
$$=4(a^2+b^2+4x^2+2ab-4ax-4bx);$$
$$x^2-ax-bx+ab=0$$

و درنتیجه: $x_1=a$، $x_2=b$.

که اگر ریشه‌ها را در معادلهٔ اصلی قرار دهیم، به‌دست می‌آید

$$\sqrt{b-a}+۲\sqrt{b-a}-۳\sqrt{b-a}=۰;$$
$$۲\sqrt{a-b}+\sqrt{a-b}-۳\sqrt{a-b}=۰$$

بنابراین، اگر $a \neq b$، آن‌گاه معادله دو ریشه دارد: a و b.

۵. معادله را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$(۱+\lambda)x^۲-(a+c+\lambda b+\lambda d)x+ac+\lambda bd=۰$$

مبین این معادله $D(\lambda)$ را تشکیل می‌دهیم، داریم:

$$D(\lambda)=(a+c+\lambda b+\lambda d)^۲-۴(۱+\lambda)(ac+\lambda bd)$$

با انجام تبدیل‌های لازم، به‌دست می‌آید:

$$D(\lambda)=\lambda^۲(b-d)^۲+۲\lambda(ab+ad+bc+dc-۲bd-۲ac)+(a-c)^۲$$

باید ثابت کنیم به‌ازای هر λ، داریم $D(\lambda) \geq ۰$. از آن‌جا که $D(\lambda)$ یک سه‌جمله‌ای درجه دوم برحسب λ است و $D(۰)=(a-c)^۲>۰$، کافی است ثابت کنیم ریشه‌های این سه‌جمله‌ای موهومی هستند. برای موهومی بودن ریشه‌های سه‌جمله‌ای لازم و کافی است که عبارت

$$۴(ab+ad+bc+dc-۲bd-۲ac)^۲-۴(a-c)^۲(b-d)^۲$$

کوچکتر از صفر باشد. داریم:

$$۴(ab+ad+bc+dc-۲bd-۲ac)^۲-۴(a-c)^۲(b-d)^۲=$$
$$=۴(ab+ad+bc+dc-۲bd-۲ac-ab+cb+ad-cd)\times$$
$$\times(ab+ad+bc+dc-۲bd-۲ac+ab-cb-ad+cd)=$$
$$=-۱۶(b-a)(d-c)(c-b)(d-a)$$

باتوجه به شرط $a<b<c<d$، عبارت اخیر منفی و، درنتیجه، $D(\lambda)>۰$.

۶. معادله اصلی را می‌توان به این صورت نوشت:

$$۳x^۲-۲(a+b+c)x+ab+ac+bc=۰$$

ثابت می‌کنیم که:

$$۴(a+b+c)^{۲} - ۱۲(ab+ac+bc) \geq ۰$$

داریم:

$$۴(a+b+c)^{۲} - ۱۲(ab+ac+bc) = ۴(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}-ab-ac-bc) =$$
$$= ۲(۲a^{۲}+۲b^{۲}+۲c^{۲}-۲ab-۲ac-۲bc) =$$
$$= ۲\{(a^{۲}-۲ab+b^{۲})+(a^{۲}-۲ac+c^{۲})$$
$$+(b^{۲}-۲bc+c^{۲})\} = ۲\{(a-b)^{۲}+(a-c)^{۲}+(b-c)^{۲}\} \geq ۰$$

۷. فرض کنید ریشه‌های هردو معادله موهومی باشند. در آن صورت:

$$p^{۲}-۴q < ۰, \quad p_{۱}^{۲}-۴q_{۱} < ۰$$

درنتیجه:

$$p^{۲}+p_{۱}^{۲}-۴q-۴q_{۱} < ۰, \quad p^{۲}+p_{۱}^{۲}-۲pp_{۱} < ۰, \quad (p-p_{۱})^{۲} < ۰$$

که غیرممکن است.

۸. معادله داده شده را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$(a+b+c)x^{۲} - ۲(ab+ac+bc)x + ۳abc = ۰$$

ثابت می‌کنیم، مبین آن بزرگتر یا مساوی صفر است. داریم:

$$۴(ab+ac+bc)^{۲} - ۱۲abc(a+b+c) = ۲\{(ab-ac)^{۲}+(ab-bc)^{۲}+$$
$$+(ac-bc)^{۲}\} \geq ۰$$

۹. باتوجه به‌ویژگی‌های معادله درجه دوم، این دستگاه را داریم:

$$p+q=-p, \quad pq=q$$

از معادله دوم به‌دست می‌آید:

$$q(p-۱)=۰$$

بنابراین، $q = ۰$ یا $p = ۱$. از معادلهٔ اول دستگاه، به‌شرط $q = ۰$، به‌دست می‌آید: $p = ۰$ و به‌شرط $p = ۱$، به‌دست می‌آید $q = -۲$. بنابراین، دو معادله درجه دوم داریم که به‌صورت زیر هستند و خواسته‌های مساله را برآورده می‌کنند:

$$x^۲ = ۰, \quad x^۲ + x - ۲ = ۰$$

۱۰. داریم:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ - xy - xz - yz = \frac{۱}{۲}(۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲z^۲ - ۲xy - ۲xz - ۲yz) =$$
$$= \frac{۱}{۲}\{(x-y)^۲ + (x-z)^۲ + (y-z)^۲\} \geq ۰$$

(مساله ۶ و ۸ را ببینید).

اما به روش دیگری نیز می‌توانیم استدلال کنیم. عبارت داده شده را برحسب توان‌های x مرتب می‌کنیم، به‌دست می‌آید: $x^۲ - (y+z)x + y^۲ + z^۲ - yz$. برای این‌که ثابت کنیم به‌ازای تمام مقدارهای x، این عبارت بزرگتر یا مساوی صفر است، کافی است ثابت کنیم که اولاً:

$$y^۲ + z^۲ - yz \geq ۰$$

و ثانیاً:

$$(y+z)^۲ - ۴(y^۲ + z^۲ - yz) \leq ۰$$

روشن است که این اتحادها وجود دارد:

$$y^۲ + z^۲ - yz = \left(y - \frac{۱}{۲}z\right)^۲ + \frac{۳}{۴}z^۲;$$
$$(y+z)^۲ - ۴(y^۲ + z^۲ - yz) = -۳(y-z)^۲$$

و درنتیجه، حکم ثابت می‌شود.

۱۱. داریم:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ - \frac{a^۳}{۳} = x^۲ + y^۲ + (a - x - y)^۲ - \frac{a^۲}{۳}$$

باید نشان دهیم که عبارت اخیر بهازای تمام مقدارهای x و y بزرگتر یا مساوی صفر است. چندجملهای را برحسب توانهای y مرتب میکنیم:

$$y^۲ + (x-a)y + x^۲ - ax + \frac{a^۲}{۳}$$

تنها باقی میماند اثبات اینکه بهازای همهٔ مقدارهای x:

$$x^۲ - ax + \frac{a^۲}{۳} \geq ۰, \quad (x-a)^۲ - ۴\left(x^۲ - ax + \frac{a^۲}{۳}\right) \leq ۰$$

داریم:

$$x^۲ - ax + \frac{a^۲}{۳} = \left(x - \frac{a}{۲}\right)^۲ + \frac{۱}{۱۲}a^۲ \geq ۰,$$
$$(x-a)^۲ - ۴\left(x^۲ - ax + \frac{a^۲}{۳}\right) = -۳\left(x - \frac{۱}{۳}a\right)^۲ \leq ۰$$

که نتیجهٔ مطلوب است. باوجود این، اثبات را میتوان به روش اندک متفاوت دیگری انجام داد. در واقع، باید ثابت کنیم:

$$۳x^۲ + ۳y^۲ + ۳z^۲ \geq a^۲$$

اگر

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۲xy + ۲xz + ۲yz = a^۲$$

درنتیجه؛ کافی است ثابت کنیم:

$$۳x^۲ + ۳y^۲ + ۳z^۲ \geq x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۲xy + ۲xz + ۲yz;$$
$$۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲z^۲ - ۲xy - ۲xz - ۲yz \geq ۰$$

و این نابرابری از قبل برای ما آشنا است (برای مثال، مساله ۶ را ببینید).

۱۲. مساله قبل را ببینید.

۱۳. بنابه ویژگیهای معادلهٔ درجه دوم، میتوان نوشت:

$$\alpha + \beta = -p, \quad \alpha\beta = q$$

بنابراین $s_۱ = -p$.

از آن‌جا که α و β ریشه‌های این معادله، هستند:

$$x^2 + px + q = 0$$

باید داشته باشیم:

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0, \quad \beta^2 + p\beta + q = 0$$

با جمع جمله‌به‌جمله این برابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$s_2 + ps_1 + 2q = 0$$

بنابراین $s_2 = -ps_1 - 2q = p^2 - 2q$.

دو طرف معادله را در x^k ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x^{k+2} + px^{k+1} + qx^k = 0$$

با جایگذاری α و β و جمع آن، به‌دست می‌آید:

$$s_{k+2} + ps_{k+1} + qs_k = 0$$

در این‌جا قرار می‌دهیم: $k = 1$، داریم: $s_3 = -ps_2 - qs_1$

بنابراین: $s_3 = -p(p^2 - 2q) + qp = 3pq - p^3$

به‌همین ترتیب به‌دست می‌آید:

$$s_4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2, \quad s_5 = -p^5 + 5p^3q - 5pq^2$$

برای به‌دست آوردن s_{-1}، در دستور، $k = -1$ قرار می‌دهیم. داریم:

$$s_1 + ps_0 + qs_{-1} = 0$$

اما $s_0 = 2$ و $s_1 = -p$، بنابراین

$$qs_{-1} = +p - 2p = -p, \quad s_{-1} = -\frac{p}{q}$$

به‌همین ترتیب، s_{-2} و s_{-3} و s_{-4} و s_{-5} به‌دست می‌آید. بنابراین، به این دستور دست می‌یابیم:

$$s_{-k} = \frac{1}{\alpha^k} + \frac{1}{\beta^k} = \frac{\alpha^k + \beta^k}{(\alpha\beta)^k} = \frac{s_k}{q^k}$$

که از آن به‌آسانی مقدارهای مطلوب s_{-k} به‌دست می‌آید.

۱۴. فرض کنید $\omega = \sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}$، در این صورت

$$\omega^4 = \alpha + 4\sqrt[4]{\alpha^3\beta} + 6\sqrt[4]{\alpha^2\beta^2} + 4\sqrt[4]{\alpha\beta^3} + \beta$$

از طرف دیگر، داریم: $\alpha + \beta = -p$ و $\alpha\beta = q$، پس

$$\omega^4 = -p + 6\sqrt{q} + 4\sqrt[4]{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})$$

ولی باتوجه به اتحاد

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = -p + 2\sqrt{q}$$

به‌دست می‌آید

$$\omega = \sqrt[4]{-p + 6\sqrt{q} + 4\sqrt[4]{q}\cdot\sqrt{-p + 2\sqrt{q}}}$$

۱۵. فرض کنید x ریشهٔ مشترک معادله‌های داده شده باشد. با ضرب معادلهٔ اول در A' و معادله دوم در A و تفریق جمله به جمله آن‌ها، حاصل می‌شود:

$$(AB' - A'B)x + AC' - A'C = 0$$

به‌همین ترتیب، با ضرب معادله اول در B' و معادله دوم در B و تفریق آن‌ها، به‌دست می‌آید:

$$(AB' - A'B)x^2 + BC' - B'C = 0$$

مقدار x را از برابری اول به‌دست می‌آوریم و آن را در معادله دوم قرار می‌دهیم. به این ترتیب، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید:

۱۶. از مجموع سه معادله، به‌دست می‌آید:

$$(x + y + z)^2 = a^2 + b^2 + c^2;$$

و سپس

$$x + y + z = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$x = \frac{a^2}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad y = \frac{b^2}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad x = \frac{c^2}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

۱۷. روشن است که دستگاه را می‌توان به این‌صورت نوشت:

$$(x+z)(x+y)=a,$$
$$(y+z)(y+x)=b,$$
$$(z+x)(z+y)=c$$

با ضرب این معادله‌ها در یکدیگر و سپس گرفتن جذر از دو طرف برابریِ به‌دست آمده، داریم:

$$(y+z)(x+y)(y+z)=\pm\sqrt{abc}$$

بنابراین:

$$y+z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{a},\quad x+z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{b},\quad x+y=\pm\frac{\sqrt{abc}}{c}$$

با جمع جمله‌به‌جملهٔ این برابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$x+y+z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{۲}\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right);$$
$$y+z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{a}$$
$$x=\pm\frac{\sqrt{abc}}{۲}\left(\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}-\frac{۱}{a}\right)$$

به همین ترتیب:

$$y=\pm\frac{\sqrt{abc}}{۲}\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{c}-\frac{۱}{b}\right),\quad z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{۲}\left(\frac{۱}{b}+\frac{۱}{a}-\frac{۱}{c}\right)$$

به‌طور هم‌زمان از علامت‌های + یا − استفاده می‌کنیم.

۱۸. بافرض $y+z=\alpha$، $x+z=\beta$، $y+x=\gamma$،
معادله‌ها به این صورت درمی‌آیند:

$$\gamma+\beta=a\gamma\beta;\quad \alpha+\gamma=b\alpha\gamma;\quad \beta+\alpha=c\alpha\beta$$

با حل این دستگاه (بخش ۴، مساله ۱۷ را ببینید)، جواب‌های دستگاه اصلی به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}
&x = y = z = ۰;\\
&x = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{p-b} + \frac{۱}{b-c} - \frac{۱}{p-a}\right),\\
&y = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{p-c} + \frac{۱}{p-a} - \frac{۱}{p-b}\right),\\
&z = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{p-a} + \frac{۱}{p-d} - \frac{۱}{p-c}\right)
\end{aligned}$$

که در آن‌ها $۲p = a + b + c$.

۱۹. به دو طرف هریک از معادله‌ها، یک واحد اضافه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&۱ + y + z + yz = a + ۱\\
&۱ + x + z + xz = b + ۱\\
&۱ + x + y + xy = c + ۱
\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}
&(۱ + y)(۱ + z) = a + ۱\\
&(۱ + x)(۱ + z) = b + ۱\\
&(۱ + y)(۱ + x) = c + ۱
\end{aligned}$$

با ضرب این معادله‌ها، حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&(۱ + x)^۲(۱ + y)^۲(۱ + z)^۲ = (۱ + a)(۱ + b)(۱ + c);\\
&(۱ + x)(۱ + y)(۱ + z) = \pm\sqrt{(۱ + a)(۱ + b)(۱ + c)}
\end{aligned}$$

درنتیجه:

$$۱ + x = \pm\sqrt{\frac{(۱ + b)(۱ + c)}{۱ + a}}, \quad ۱ + y = \pm\sqrt{\frac{(۱ + a)(۱ + c)}{۱ + b}},$$

$$۱ + z = \pm\sqrt{\frac{(۱ + a)(۱ + b)}{۱ + c}}$$

۲۰. معادله‌های داده شده را در هم ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(xyz)^2 = abcxyz$$

در آغاز، جواب روشن $x = y = x = 0$ را داریم. به دنبال آن:

$$xyz = abc$$

از معادله‌های اصلی، به‌دست می‌آید:

$$xyz = ax^2, \quad xyz = by^2, \quad xyz = cz^2$$

بنابراین: $cz^2 = abc$، $by^2 = abc$ و $ax^2 = abc$؛ و سپس

$$x^2 = bc, \quad y^2 = ac, \quad z^2 = ab$$

بنابراین، مجموعهٔ جواب چنین است:

$$\begin{aligned}
&x = \sqrt{bc}, \quad y = \sqrt{ac}, \quad z = \sqrt{ab};\\
&x = -\sqrt{bc}, \quad y = -\sqrt{ac}, \quad z = \sqrt{ab};\\
&x = \sqrt{bc}, \quad y = -\sqrt{ac}, \quad z = -\sqrt{ab};\\
&x = -\sqrt{bc}, \quad y = \sqrt{ac}, \quad z = -\sqrt{ab}
\end{aligned}$$

۲۱. دو معادلهٔ اول را با هم جمع و از معادله سوم کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$2x^2 = (c + b - a)xyz$$

به‌همین ترتیب به‌دست می‌آید:

$$2y^2 = (c + a - b)xyz, \quad 2z^2 = (a + b - c)xyz$$

یک جواب به‌این صورت حاصل می‌شود:

$$x = y = z = 0$$

بقیه را مانند مساله قبل حل می‌کنیم.

۲۲. دستگاه به این صورت تبدیل می‌شود:

$$xy + xz = a^۲; \quad yz + yx = b^۲; \quad zx + xy = c^۲$$

با جمع جمله این معادله‌ها، به‌دست می‌آید:

$$xy + xz + yz = \frac{۱}{۲}(a^۲ + b^۲ + c^۲)$$

و اگر این معادله را با هریک از سه معادله بالا در نظر بگیریم:

$$yz = \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲}, \quad zx = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲}, \quad xy = \frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{۲}$$

با ضرب این معادله‌ها، داریم:

$$(xyz)^۲ = \frac{(b^۲ + c^۲ - a^۲)(a^۲ + c^۲ - b^۲)(a^۲ + b^۲ - c^۲)}{۸};$$

$$xyz = \pm\sqrt{\frac{(b^۲ + c^۲ - a^۲)(a^۲ + c^۲ - b^۲)(a^۲ + b^۲ - c^۲)}{۸}}$$

اکنون به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$x = \pm\sqrt{\frac{(a^۲ + c^۲ - b^۲)(a^۲ + b^۲ - c^۲)}{۸(b^۲ + c^۲ - a^۲)}}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{(a^۲ + b^۲ - c^۲)(b^۲ + c^۲ - a^۲)}{۸(a^۲ + c^۲ - b^۲)}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{(a^۲ + c^۲ - b^۲)(b^۲ + c^۲ - a^۲)}{(a^۲ + b^۲ - c^۲)}}$$

۲۳. با جمع و تفریق جمله به جملهٔ معادله‌های داده شده، به‌دست می‌آید:

$$x^۳ + y^۳ = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y)$$

$$x^۳ - y^۳ = a(x - y) - b(x - y) = (a - b)(x - y)$$

بنابراین:

$$(x + y)(x^۲ - xy + y^۲ - a - b) = ۰$$

$$(x - y)(x^۲ + xy + y^۲ - a + b) = ۰$$

درنتیجه، باید دستگاه‌های زیر را در نظر بگیریم:

الف) $x + y = 0, \quad x - y = 0$

ب) $x + y = 0, \quad x^2 + xy + y^2 - a + b = 0$

ج) $x - y = 0, \quad x^2 - xy + y^2 - a - b = 0$

د) $x^2 - xy + y^2 - a - b = 0, \quad x^2 + xy + y^2 - a + b = 0$

سه دستگاه اول، این جواب‌ها را به‌دست می‌دهند:

الف) $x = y = 0$؛

ب) $x = \pm\sqrt{a-b}, \quad y = \mp\sqrt{a-b}$؛

ج) $x = y = \pm\sqrt{a+b}$

دستگاه آخر به‌این صور تبدیل می‌شود:

$$x^2 + y^2 = a, \quad xy = -b$$

که با حل آن، به‌دست می‌آید:

$$x = \frac{1}{2}(\varepsilon\sqrt{a - 2b} + \eta\sqrt{a + 2b})$$

$$y = \frac{1}{2}(\varepsilon\sqrt{a - 2b} - \eta\sqrt{a + 2b})$$

که در آن، ε و η به‌طور مستقل از هم، مقدارهای ± 1 را اختیار می‌کنند. چهار جواب دیگر به‌دست می‌آید.

۲۴. دستگاه را به این صورت تبدیل می‌کنیم:

$$(x + y - z)(x + z - y) = a,$$

$$(y + z - x)(y + x - z) = b,$$

$$(x + z - y)(z + y - z) = c$$

با ضرب آن‌ها در هم و جذر گرفتن از نتیجه، حاصل می‌شود:

$$(x + y - z)(x + z - y)(y + z - x) = \pm\sqrt{abc}$$

علاوه بر این:

$$y + z - x = \pm\sqrt{\frac{bc}{a}}; \quad x + zy = \pm\sqrt{\frac{ac}{b}};$$

$$x + y - z = \pm\sqrt{\frac{ab}{c}}$$

درنتیجه:

$$x = \pm\left(\sqrt{\frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}}\right); \quad y = \pm\left(\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ab}{c}}\right);$$
$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ac}{b}}\right)$$

۲۵. قرار دهید:

$$\frac{x+y}{x+y+cxy} = \gamma, \quad \frac{y+z}{y+z+ayz} = \alpha, \quad \frac{x+z}{x+z+bxz} = \beta$$

آن‌گاه دستگاه به این صورت درمی‌آید:

$$b\gamma + c\beta = a, \quad c\alpha + a\gamma = b, \quad \alpha\beta + b\alpha = c;$$
$$\frac{\gamma}{c} + \frac{\beta}{b} = \frac{a}{bc}, \quad \frac{\alpha}{a} + \frac{\gamma}{c} = \frac{b}{ac}, \quad \frac{\beta}{b} + \frac{\alpha}{a} = \frac{c}{ab}$$

بنابراین

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = \frac{۱}{۲}\frac{a^۲ + b^۲ + c^۲}{abc}$$

و درنتیجه:

$$\alpha = \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc}, \quad \beta = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲ac}, \quad \gamma = \frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{۲ab}$$

به‌جز این

$$\frac{x+y+cxy}{x+y} = \frac{۱}{\gamma}, \quad \frac{cxy}{x+y} = \frac{۱}{\gamma} - ۱, \quad \frac{x+y}{cxy} = \frac{\gamma}{۱-\gamma}$$

سرانجام $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} = \frac{c\gamma}{۱-\gamma}$

به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x} = \frac{b\beta}{۱-\beta}, \quad \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z} = \frac{a\alpha}{۱-\alpha}$$

که از آن، x، y و z محاسبه می‌شود.

۲۶. معادله‌های اول، دوم و سوم را به‌ترتیب در y و z و x ضرب کنید، حاصل می‌شود:

$$cx + ay + bz = ۰$$

به‌همین ترتیب، با ضرب این معادله‌ها در z و x و y، به‌دست می‌آید:

$$bx + cy + az = ۰$$

از این دو معادله، (مساله ۳۵ فصل ۴ را ببینید) به‌دست می‌آید:

$$\frac{x}{a^۲ - bc} = \frac{y}{b^۲ - ac} = \frac{x}{c^۲ - ab} = \lambda$$

یعنی:

$$x = (a^۲ - bc)\lambda, \quad y = (b^۲ - ac)\lambda, \quad z = (c^۲ - ab)\lambda$$

با قرار دادن این عبارت‌ها در معادله سوم، نتیجه می‌شود:

$$\lambda^۲ = \frac{c}{(c^۲ - ab)^۲ - (a^۲ - bc)(b^۲ - ac)} = \frac{۱}{a^۳ + b^۳ + c^۳ - ۳abc}$$

اکنون به‌سادگی x، y و z به‌دست می‌آید.

۲۷. دستگاه را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$(y^۲ - xz) + (z^۲ - xy) = a$$
$$(x^۲ - yz) + (z^۲ - xy) = b$$
$$(x^۲ - zy) + (y^۲ - zx) = c$$

بنابراین:

$$x^۲ - yz = \frac{b + c - a}{۲}, \quad y^۲ - xz = \frac{a + c - b}{۲}, \quad z^۲ - xy = \frac{a + b - c}{۲}$$

یعنی به یک دستگاه مشابه مساله قبل دست یافته‌ایم.

۲۸. با تفریق جمله‌به‌جملهٔ این معادله‌ها، داریم:

$$(x - y)(x + y + z) = b^۲ - a^۲$$
$$(x - z)(x + y + z) = c^۲ - a^۲$$

اگر $x+y+z=t$، آن‌گاه

$$(x-y)t=b^۲-a^۲,\quad (x-z)t=c^۲-a^۲$$

با جمع جمله‌به‌جملهٔ این دو معادله، داریم:

$$[۳x-(x+y+z)]t=b^۲+c^۲-۲a^۲$$

بنابراین: $x=\frac{t^۲+b^۲+c^۲-۲a^۲}{۳t}$

به‌همین ترتیب: $z=\frac{t^۲+a^۲+b^۲-۲c^۲}{۳t}$ و $y=\frac{t^۲+a^۲+c^۲+۲b^۲}{۳t}$؛ این مقدار x و y و z را در یکی از معادله‌ها قرار می‌دهیم، حاصل می‌شود:

$$t^۴-(a^۲+b^۲+c^۲)t^۲+a^۴+b^۴+c^۴-a^۲b^۲-a^۲c^۲-b^۲c^۲=۰;$$
$$t^۲=\frac{a^۲+b^۲+c^۲\pm\sqrt{۳(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{۲}$$

با معلوم بودن t، مقادیر x و y و z به‌دست می‌آید.

۲۹. این اتحادها را داریم:

$$(x+y+z)^۲-(x^۲+y^۲+z^۲)=۲(xy+xz+yz),$$
$$(\lambda+y+z)^۳-(x^۳+y^۲+z^۳)=۳(x+y+z)(xy+xz+yz)-۳xyz$$

باتوجه به معادله دوم و سوم دستگاه، از اتحاد اول به‌دست می‌آید:

$$xy+xz+yz=۰$$

و از اتحاد دوم $xyz=۰$. بنابراین، این جواب‌ها برای دستگاه به‌دست می‌آید:

$$x=۰,\quad y=۰,\quad z=a$$
$$x=۰,\quad y=a,\quad z=۰$$
$$x=a,\quad y=۰,\quad z=۰$$

۳۰. فرض کنید x و y و z ریشه‌های معادلهٔ درجه چهارم

$$\alpha^۴-p\alpha^۳+q\alpha^۲-r\alpha+t=۰\qquad (*)$$

باشد. فرض می‌کنیم $x^k + y^k + z^k + u^k = s_k$ در این‌صورت، باتوجه به معادلهٔ $(*)$

$$s_۴ - ps_۳ + qs_۲ - rs_۱ + t = ۰$$

اما بنابه فرض می‌دانیم $s_۱ = a$، $s_۲ = a^۲$، $s_۳ = a^۳$ و $s_۴ = a^۴$. بنابراین، باید اتحاد زیر برقرار باشد:

$$a^۴ - pa^۳ + qa^۲ - ra + t = ۰$$

یعنی معادله $(*)$ ریشهٔ $\alpha = a$ دارد و بنابراین یکی از مجهول‌ها مثل x، برابر a است. آن‌گاه باید این برابری‌ها وجود داشتند باشند:

$$u + y + z = ۰, \quad u^۲ + y^۲ + z^۲ = ۰, \quad u^۳ + y^۳ + z^۳ = ۰$$

و درنتیجه، (باتوجه به نتیجه‌های مساله آخر)

$$u = y = z = ۰$$

بنابراین، دستگاه داده شده، جواب‌های زیر دارد:

$$x = a, \quad u = y = z = ۰;$$
$$y = a, \quad x = u = z = ۰$$
$$z = a, \quad x = y = u = ۰$$
$$u = a, \quad x = y = z = ۰$$

۳۱. هم‌ارز بودن این دستگاه‌ها، نتیجه‌ای از این اتحاد است:

$$\begin{aligned}&(a^۲ + b^۲ + c^۲ - ۱)^۲ + (a'^۲ + b'^۲ + c'^۲ - ۱)^۲ +\\ &+(a''^۲ + b''^۲ + c''^۲ - ۱)^۲ + ۲(aa' + bb' + cc')^۲ +\\ &+۲(aa'' + bb'' + cc'')^۲ + ۲(a'a'' + b'b'' + c'c'')^۲ = (a^۲ + a'^۲ + a''^۲ - ۱)^۲ +\\ &+(b^۲ + b'^۲ + b''^۲ - ۱)^۲ + (c^۲ + c'^۲ + c''^۲ - ۱)^۲ + ۲(ab + a'b' + a''b'')^۲ +\\ &+۲(ac + a'c' + a''c'')^۲ + ۲(bc + b'c' + b''c'')^۲\end{aligned}$$

نُه ضریب، a، a'، a'' و b، b' و b'' و c' و c'' را می‌توان برحسب سه مقدار مستقل از هم p و q و r به‌این صورت نوشت (که توسط اویلر ثابت شد):

$$a = \frac{۱ + p^۲ - q^۲ - r^۲}{N}, \quad b = \frac{۲(r + pq)}{N}, \quad c = \frac{۲(-q + pr)}{N}$$
$$a' = \frac{۲(-r + pq)}{N}, \quad b' = \frac{۱ - p^۲ + q^۲ - r^۲}{N}, \quad c' = \frac{۲(p + qr)}{N}$$
$$a'' = \frac{۲(q + pr)}{N}, \quad b'' = \frac{۲(-p + rq)}{N}, \quad c'' = \frac{۱ - p^۲ - q^۲ + n^۲}{N}$$
$$(N = ۱ + p^۲ + q^۲ + r^۲)$$

۳۲. سه معادلهٔ اول را در هم ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x^۲y^۲z^۲(y + z)(x + z)(x + y) = a^۳b^۳c^۳$$

با استفاده از برابری چهارم، به‌ترتیب داریم:

$$(y + z)(x + z)(x + y) = abc;$$
$$x^۲(y + z) + y^۲(x + z) + z^۲(x + y) + ۲xyz = abc$$

اما با جمع سه برابری اول، نتیجه می‌شود:

$$x^۲(y + z) + y^۲(x + z) + x^۲(x + y) = a^۳ + b^۳ + c^۳$$

بنابراین، سرانجام:

$$a^۳ + b^۳ + c^۳ + abc = ۰$$

۳۳. با جمع سه برابری داده شده، نتیجه می‌شود:

$$a + b + c = \frac{(y - z)(z - x)(x - y)}{xyz}$$

به‌همین ترتیب

$$a - b - c = \frac{(y - z)(z + x)(x + y)}{xyz}$$
$$b - c - a = \frac{(z - x)(x + y)(y + z)}{xyz}$$
$$c - a - b = \frac{(x - y)(y + z)(z + x)}{xyz}$$

بنابراین:

$$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) =$$
$$= -\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right)^{۲}\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right)^{۲}\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^{۲} = -a^{۲}b^{۲}c^{۲}$$

از این‌رو، برابری زیر نتیجه می‌شود که در آن، x و y و z حذف شده است:

$$۲b^{۲}c^{۲}+۲b^{۲}a^{۲}+۲a^{۲}c^{۲}-a^{۴}-b^{۴}-c^{۴}+a^{۲}b^{۲}c^{۲} = ۰$$

۳۴. داریم:

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y} = ۲a, \quad \frac{z}{x}+\frac{x}{z} = ۲b, \quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x} = ۲c$$

این برابری‌ها را به توان دو می‌رسانیم و با هم جمع می‌کنیم:

$$\frac{y^{۲}}{z^{۲}}+\frac{z^{۲}}{y^{۲}}+\frac{z^{۲}}{x^{۲}}+\frac{x^{۲}}{z^{۲}}+\frac{x^{۲}}{y^{۲}}+\frac{y^{۲}}{x^{۲}}+۶ = ۴a^{۲}+۴b^{۲}+۴c^{۲}$$

از سوی دیگر، با ضرب این برابری‌ها، نتیجه می‌شود:

$$\frac{y^{۲}}{z^{۲}}+\frac{z^{۲}}{y^{۲}}+\frac{z^{۲}}{x^{۲}}+\frac{x^{۲}}{z^{۲}}+\frac{x^{۲}}{y^{۲}}+\frac{y^{۲}}{x^{۲}}+۲ = ۸abc$$

به‌این ترتیب، نتیجهٔ حذف x و y و z از دستگاه داده شده چنین است:

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}-۲abc = ۱$$

۳۵. این اتحاد را داریم:

$$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$$
$$= ۴b^{۲}c^{۲}-(b^{۲}+c^{۲}-a^{۲})^{۲}$$

در طرف راست به‌جای $a^{۲}$، $b^{۲}$ و $c^{۲}$ عبارت هم‌ارز آن‌ها را برحسب x و y و z قرار می‌دهیم، با استفاده از برابری $xy+xz+yz = ۰$، نتیجه می‌گیریم:

$$۴b^{۲}c^{۲}-(b^{۲}+c^{۲}-a^{۲})^{۲} = ۰$$

بنابراین، نتیجهٔ واقعی حذف x و y و z از دستگاه داده شده چنین است:

$$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=0$$

۳۶. داریم:

$$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=x^3+y^3+\frac{3}{2}(x+y)[(x+y)^2-(x^2+y^2)]$$

و بنابراین:

$$(x+y)^3=3(x+y)(x^2+y^2)-2(x^3+y^3)$$

اما:

$$x+y=a,\quad x^2+y^2=b,\quad x^3+y^3=c$$

درنتیجه به‌دست می‌آید:

$$a^3=3ab-2c$$

۳۷. فرض می‌کنیم: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}$، در این صورت

$$a=x\lambda,\quad b=y\lambda,\quad c=z\lambda \qquad (*)$$

از سوی دیگر، داریم:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

از آن‌جاکه: $a+b+c=1$ و $a^2+b^2+c^2=1$، از برابری آخر به‌دست می‌آید:

$$ab+ac+bc=0$$

باتوجه به برابری‌های (*)، حاصل می‌شود:

$$xy+xz+yz=0$$

۳۸. به‌ترتیب به‌دست می‌آید:

$$\left(\alpha-\frac{z}{x}\right)\left(\alpha-\frac{x}{y}\right)\left(\alpha-\frac{y}{z}\right)=\gamma;$$
$$\alpha^3-\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{x}\right)\alpha^2+\left(\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}\right)\alpha-1=\gamma;$$
$$\alpha\beta-1=\gamma$$

۳۹. از دو برابری اول به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} z(d-c)+x(d-a)+y(d-b)=0 \\ w(d-c)+x(a-c)+y(b-c)=0 \end{cases} \qquad (*)$$

با ضرب برابری اول در y، برابری دوم در x و جمع آن‌ها، به‌دست می‌آید:

$$(zy+wz)(d-c)=x^2(c-a)+y^3(b-d)+xy(a+c-b-d)$$

$$zw(d-c)^2=x^2(a-b)(c-a)+y^2(b-d)(c-b)+$$

$$xy[(a-d)(c-b)+(b-d)(c-a)]$$

به‌جای $zy+wx$، $zx+wy$ و zw، عبارت‌های پیدا شده را در برابری سوم قرار می‌دهیم، حاصل می‌شود:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=0$$

که در آن:

$$A=(c-a)(a-d)^2(b-c)^2+(c-d)(b-d)^2(c-a)^2+$$

$$+(a-d)(c-a)(d-c)(a-b)^2$$

$$C=(b-d)(a-d)^2(b-c)^2+(c-b)(b-d)^2(c-a)^2+$$

$$+(b-d)(c-b)(d-c)(a-b)^2$$

$$2B=(a+c-b-d)(a-d)^2(b-c)^2+(b+c-a-d)(b-d)^2(c-a)^2$$

$$+(d-c)^2(a-b)^2+[(a-d)(c-b)+(b-d)(c-a)](d-c)(a-b)^2$$

با انجام تبدیل‌های لازم (کار را می‌توان با استفاده از نتیجهٔ مساله ۸ ساده کرد، فصل ۲) به‌دست می‌آید:

$$A=(a-d)^2(c-a)^2(c-d),$$

$$B=(d-c)(a-d)(b-c)(a-c)(d-b$$

$$c=(c-b)^2(b-d)2(c-d)$$

بنابراین

$$Ax^2+2Bxy+cy^2=(c-d)[(a-d)(a-c)x-(b-c)(d-b)y]^2=0$$

از آنجا

$$\frac{x}{(b-c)(d-b)}=\frac{y}{(a-d)(a-c)}$$

با قرار دادن این مقدارها در برابری $(*)$ به تناسب مورد نظر است می‌یابیم.

۴۰. الف) به‌ترتیب، داریم:

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\left(2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)=\frac{3}{2};$$
$$4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+1=0;$$
$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\pm\sqrt{16\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-16}}{8}$$

از آنجا که عبارت زیر رادیکال برابر $-16\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$ است و $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ حقیقی است عبارت $-16\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$ باید بزرگتر یا برابر صفر باشد. اما این عبارت نمی‌تواند بزرگتر از صفر باشد. بنابراین $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$.

اما چون $\pi>\alpha>0$ و $\pi>\beta>0$، نتیجه می‌شود $\alpha=\beta$ از آنجا

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$$

ب) مشابه الف حل می‌شود.

۴۱. بنا به‌فرض

$$2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=a,\quad 2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=b$$

بنابراین: $\tan\frac{\theta+\varphi}{2}=\frac{b}{a}$، ولی

$$\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \text{ و } \sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

بنابراین:

$$\cos(\theta+\varphi)=\frac{۱-\dfrac{b^۲}{a^۲}}{۱+\dfrac{b^۲}{a^۲}}=\frac{a^۲-b^۲}{a^۲+b^۲},$$

$$\sin\varphi=\frac{۲\dfrac{b}{a}}{۱+\dfrac{b^۲}{a^۲}}=\frac{۲ab}{a^۲+b^۲}$$

۴۲. بنابه فرض $a\cos\alpha+b\sin\alpha=c$ و $a\cos\beta+b\sin\beta=c$. با جمع جمله‌به‌جملهٔ این برابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$۲a\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}+۲b\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}=۲c$$

بنابراین:

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}=\frac{e}{a\cos\dfrac{\alpha+\beta}{۲}+b\sin\dfrac{\alpha+\beta}{۲}}=\frac{c}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{۲}\left(a+b\tan\dfrac{\alpha+\beta}{۲}\right)}$$

اکنون برابری‌های داده شده را جمله به جمله تفریق می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$-۲a\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}+۲b\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}=۰$$

از آن‌جا که α و β جواب‌های متمایز معادله هستند، $\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}\neq۰$. درنتیجه، از برابری آخر به‌دست می‌دهد: $\tan\frac{\alpha+\beta}{۲}=\frac{b}{a}$ اکنون به محاسبهٔ $\cos^۲\frac{\alpha-\beta}{۲}$ برمی‌گردیم. داریم:

$$\cos^۲\frac{\alpha-\beta}{۲}=\frac{c^۲}{\cos^۲\dfrac{\alpha+\beta}{۲}(a+b\tan\dfrac{\alpha+\beta}{۲})^۲}=$$

$$=c^۲\left(۱+\frac{b^۲}{a^۲}\right)\frac{۱}{(a+b\frac{b}{a})^۲}=\frac{c^۲}{a^۲+b^۲}$$

۴۳. برابری‌های داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin\theta(b\cos\alpha - a\cos\beta) = \cos\theta(b\sin\alpha - \alpha\sin\beta)$$
$$\sin\theta(d\sin\alpha - c\sin\beta) = \cos\theta(c\cos\beta - d\cos\alpha)$$

با حذف θ، به‌دست می‌آید:

$$(b\cos\alpha - a\cos\beta)(c\cos\beta - d\cos\alpha) =$$
$$= (b\sin\alpha - a\sin\beta)(d\sin\alpha - c\sin\beta)$$

بنابراین:

$$bc\cos\alpha\cos\beta - ac\cos^۲\beta - bd\cos^۲\alpha + ad\cos\alpha\cos\beta =$$
$$= bd\sin^۲\alpha - ad\sin\alpha\sin\beta - bc\sin\alpha\sin\beta + ac\sin^۲\beta$$

یا

$$(bc+ad)\cos\alpha\cos\beta + (bc+ad)\sin\alpha\sin\beta = bd + ac$$

سرانجام $\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{bd+ac}{bc+ad}$

۴۴. الف) داریم:

$$\frac{e^۲ - ۱}{۱ + ۲e\cos\alpha + e^۲} = \frac{۱ + ۲e\cos\beta + e^۲}{e^۲ - ۱} = \frac{۲e^۲ + ۲e\cos\beta}{۲e^۲ + ۲e\cos\alpha} = \frac{e + \cos\beta}{e + \cos\alpha}$$

(باتوجه به ویژگی تناسب‌ها) به‌همین ترتیب، داریم:

$$\frac{e^۲ - ۱}{۱ + ۲e\cos\alpha + e^۲} = \frac{۱ + ۲e\cos\beta + e^۲}{e^۲ - ۱} = \frac{-۲ - ۲e\cos\beta}{۲ + ۲e\cos\alpha} = -\frac{۱ + e\cos\beta}{۱ + e\cos\alpha}$$

آنگاه:

$$\left(\frac{e + \cos\beta}{e + \cos\alpha}\right)^۲ = \frac{(۱ + e\cos\beta)^۲}{(۱ + e\cos\alpha)^۲} = \frac{e^۲ + \cos^۲\beta - ۱ - e^۲\cos^۲\beta}{e^۲ + \cos^۲\alpha - ۱ - e^۲\cos^۲\alpha} = \frac{\sin^۲\beta}{\sin^۲\alpha}$$

درنتیجه:

$$\frac{e^۲ - ۱}{۱ + ۲e\cos\alpha + e^۲} = -\frac{۱ + e\cos\beta}{۱ + e\cos\alpha} = \pm\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

ب) از برابری داده شده، نتیجه می‌شود

$$\frac{-e+\cos\beta}{e+\cos\alpha}=-\frac{1+e\cos\beta}{1+e\cos\alpha}$$

درنتیجه:

$$\frac{e+\cos\beta-1-e\cos\beta}{e+\cos\alpha+1+e\cos\alpha}=\frac{e+\cos\beta+1+e\cos\beta}{e+\cos\alpha-1-e\cos\alpha}$$

(از برابری $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ نتیجه می‌شود $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a+c}{b+d}$). علاوه بر این:

$$\frac{(1-e)(1-\cos\beta)}{(1+e)(1+\cos\alpha)}=\frac{(1+e)(1+\cos\beta)}{(1-e)(1-\cos\alpha)}$$

یا:

$$(1-\cos\beta)(1-\cos\alpha)=\frac{(1+e)^2}{(1-e)^2}(1+\cos\beta)(1+\cos\alpha)$$

سرانجام

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=\pm\frac{1+e}{1-e}$$

۴۵. معادله داده شده را نسبت به $\cos x$ حل می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\cos x(\sin^2\beta\cos\alpha-\sin^2\beta\cos\beta)=\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\beta=$$
$$=\cos^2\alpha-\cos^2\beta$$

اما

$$\sin^2\beta\cos\alpha-\sin^2\alpha\cos\beta=\cos\alpha(1-\cos^2\beta)-\cos\beta(1-\cos^2\alpha)=$$
$$=\cos\alpha-\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha-\cos\beta)=$$
$$=(\cos\alpha-\cos\beta)(1+\cos\alpha\cos\beta)$$

بنابراین:

$$\cos x=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta};$$
$$\tan^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{1+\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha-\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha+\cos\beta}=$$
$$=\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}=\tan^2\frac{\alpha}{2}\cdot\tan^2\frac{\beta}{2}$$

و درنتیجه: $\tan\frac{x}{۲} = \pm\tan\frac{\alpha}{۲}\cdot\tan\frac{\beta}{۲}$.

۴۶. داریم:

$$\sin\alpha = ۴\sin^۲\frac{\varphi}{۲}\sin^۲\frac{\theta}{۲} = (۱-\cos\varphi)(۱-\cos\theta) =$$
$$= \left(۱-\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)\left(۱-\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right)$$

بنابراین:

$$۱-\cos^۲\alpha = ۱-\cos\alpha\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}+\frac{\cos^۲\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}$$

یعنی:

$$\cos^۲\alpha\left(۱+\frac{۱}{\cos\beta\cos\gamma}\right) = \cos\alpha\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}$$

با این فرض که $\cos\alpha$ مخالف صفر باشد، به‌دست می‌آید:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\gamma+\cos\beta}{۱+\cos\gamma\cos\beta}$$

اکنون به‌سادگی بررسی می‌شود که:

$$\tan^۲\frac{\alpha}{۲} = \tan^۲\frac{\beta}{۲}\tan^۲\frac{\gamma}{۲}$$

۴۷. فرض می‌کنیم: $\tan\frac{\theta}{۲} = \alpha$ ، $\tan\frac{\theta_۱}{۲} = \beta$. آنگاه دو معادله اول به‌این صورت درمی‌آید:

$$x\beta^۲ - ۲y\beta + ۲a - x = ۰$$

و

$$x\alpha^۲ - ۲y\alpha + ۲a - x = ۰$$

درنتیجه α و β ریشه‌های این معادله درجه دوم هستند:

$$xz^۲ - ۲yz + ۲a - x = ۰$$

بنابراین:

$$\alpha+\beta = \frac{۲y}{x},\quad \alpha\beta = \frac{۲a-x}{x};$$
$$\alpha-\beta = ۲l$$

اکنون، α و β را از سه برابری اخیر حذف می‌کنیم. این اتحاد را داریم:

$$(\alpha+\beta)^{۲} = (\alpha-\beta)^{۲} + ۴\alpha\beta$$

درنتیجه: $\left(\frac{۲y}{x}\right)^{۲} = ۴l^{۲} + ۴\frac{۲a-x}{x}$.
پس از ساده کردن، به‌دست می‌آید:

$$y^{۲} = ۲ax - (۱-l^{۲})x^{۲}$$

۴۸. از دو برابری اول روشن است که θ و φ ریشه‌های این معادله‌اند:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - ۲a = ۰ \quad (\text{مجهول است } \alpha)$$

روشن است که θ و φ نیز ریشه‌های معادلهٔ

$$(۲a - x\cos\alpha)^{۲} = y^{۲}\sin^{۲}\alpha$$

هستند، معادله اخیر را به این صورت می‌نویسیم:

$$x^{۲}\cos^{۲}\alpha - ۴ax\cos\alpha + ۴a^{۲} = y^{۲}(۱-\cos^{۲}\alpha);$$
$$(x^{۲}+y^{۲})\cos^{۲}\alpha - ۴ax\cos\alpha + ۴a^{۲} - y^{۲} = ۰$$

بنابراین $\cos\theta$ و $\cos\varphi$ ریشه‌های این معادله‌اند:

$$(x^{۲}+y^{۲})z^{۲} - ۴axz + ۴a^{۲} - y^{۲} = ۰$$

و بنابراین:

$$\cos\theta\cos\varphi = \frac{۴a^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}, \quad \cos\theta+\cos\varphi = \frac{۴ax}{x^{۲}+y^{۲}}$$

در آن‌صورت

$$۴\sin^{۲}\frac{\theta}{۲}\sin^{۲}\frac{\varphi}{۲} = ۴\frac{۱-\cos\theta}{۲}\cdot\frac{۱-\cos\varphi}{۲} = ۱$$

یا $۱ = \cos\theta\cos\varphi + (\cos\theta+\cos\varphi) - ۱$. بنابراین $y^{۲} = ۴a(a-x)$.

۴۹. داریم:

$$\tan\frac{\theta+\alpha}{۲}\tan\frac{\theta-\alpha}{۲}=\frac{\tan^{۲}\frac{\theta}{۲}-\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱-\tan^{۲}\frac{\theta}{۲}\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}}$$

اما:

$$\tan^{۲}\frac{\theta}{۲}=\frac{۱-\cos\theta}{۱+\cos\theta}=\frac{۱-\cos\alpha\cos\beta}{۱+\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱-\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}$$

درنتیجه

$$\tan\frac{\theta+\alpha}{۲}\cdot\tan\frac{\theta-\alpha}{۲}=\frac{\frac{۱-\cos\alpha\cos\beta}{۱+\cos\alpha\cos\beta}-\frac{۱-\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}}{۱-\frac{۱-\cos\alpha\cos\beta}{۱+\cos\alpha\cos\beta}\cdot\frac{۱-\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}}=$$

$$=\frac{۱-\cos\beta}{۱+\cos\beta}=\tan^{۲}\frac{\beta}{۲}$$

۵۰. داریم:

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{\cos x+\cos(x+۲\theta)}{\cos(x+\theta)+\cos(x+۳\theta)}=\frac{\cos(x+\theta)\cos\theta}{\cos(x+۲\theta)\cos\theta}=\frac{b}{a};$$

$$\frac{a+c}{b}=\frac{b+d}{c}$$

۵۱. داریم:

$$۱+\tan^{۲}\theta=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},\quad ۱+\tan^{۲}\varphi=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

بنابراین:

$$\frac{\tan^{۲}\theta}{\tan^{۲}\varphi}=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\gamma}{\cos\beta-\cos\gamma}$$

از سوی دیگر: می‌دانیم: $\frac{\tan^{۲}\theta}{\tan^{۲}\varphi}=\frac{\tan^{۲}\alpha}{\tan^{۲}\gamma}$، بنابراین

$$\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\beta-\cos\gamma}\cdot\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{\tan^{۲}\alpha}{\tan^{۲}\gamma}$$

از این برابری نتیجه می‌شود:

$$\cos\beta = \frac{\cos^۲\alpha\sin^۲\gamma - \cos^۲\gamma\sin^۲\alpha}{\cos\alpha\sin^۲\gamma - \sin^۲\alpha\cos r} = \frac{\sin^۲\gamma - \sin^۲\alpha}{\cos\alpha\sin^۲\gamma - \sin^۲\alpha\cos\gamma};$$

$$\tan^۲\frac{\beta}{۲} = \frac{۱-\cos\beta}{۱+\cos\beta} = \frac{\cos\alpha\sin^۲\gamma - \sin^۲\alpha\cos\gamma - \sin^۲\gamma + \sin^۲\alpha}{\cos\alpha\sin^۲\gamma - \sin^۲\alpha\cos\gamma + \sin^۲\gamma - \sin^۲\alpha}$$

$$= \frac{\sin^۲\alpha(۱-\cos\gamma) - \sin^۲\gamma(۱-\cos\alpha)}{\sin^۲\gamma(۱+\cos\alpha) - \sin^۲\alpha(۱+\cos\gamma)} =$$

$$= \frac{۸\sin^۲\frac{\alpha}{۲}\cos^۲\frac{\alpha}{۲}\sin^۲\frac{\gamma}{۲} - ۸\sin^۲\frac{\gamma}{۲}\cos^۲\frac{\gamma}{۲}\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}{۸\sin^۲\frac{\gamma}{۲}\cos^۲\frac{\gamma}{۲}\cos^۲\frac{\alpha}{۲} - ۸\sin^۲\frac{\alpha}{۲}\cos^۲\frac{\alpha}{۲}\cos^۲\frac{\gamma}{۲}} =$$

$$= \frac{\sin^۲\frac{\alpha}{۲}\sin^۲\frac{\gamma}{۲}(\cos^۲\frac{\alpha}{۲} - \cos^۲\frac{\gamma}{۲})}{\cos^۲\frac{\alpha}{۲}\cos^۲\frac{\gamma}{۲}(\sin^۲\frac{\gamma}{۲} - \sin^۲\frac{\alpha}{۲})} = \tan^۲\frac{\alpha}{۲}\cdot\tan^۲\frac{\gamma}{۲}$$

چون $\cos^۲\frac{\alpha}{۲} - \cos^۲\frac{\gamma}{۲} = \sin^۲\frac{\gamma}{۲} - \sin^۲\frac{\alpha}{۲}$.

۵۲. قرار دهید: $\tan\frac{\varphi}{۲} = y$ و $\tan\frac{\theta}{۲} = x$، در این صورت

$$\cos\theta = \frac{۱-x^۲}{۱+x^۲} = \cos\alpha\cos\beta,\ \cos\varphi = \frac{۱-y^۲}{۱+y^۲} = \cos\alpha_۱\cdot\cos\beta$$

علاوه بر این:

$$x^۲ = \frac{۱-\cos\alpha\cos\beta}{۱+\cos\alpha\cos\beta},\quad y^۲ = \frac{۱-\cos\alpha_۱\cos\beta}{۱+\cos\alpha_۱\cos\beta}$$

$$\tan^۲\frac{\beta}{۲} = x^۲y^۲ = \frac{(۱-\cos\alpha\cos\beta)(۱-\cos\alpha_۱\cos\beta)}{(۱+\cos\alpha\cos\beta)(۱+\cos\alpha_۱\cos\beta)}$$

به دو طرف برابری یک و احد اضافه می‌کنیم. حاصل می‌شود:

$$\frac{۲}{۱+\cos\beta} = \frac{۲(۱+\cos\alpha\cos\alpha_۱\cos^۲\beta)}{(۱+\cos\alpha\cos\beta)(۱+\cos\alpha_۱\cos\beta)}$$

با فرض $\cos\beta \neq ۰$، حاصل می‌شود:

$$\cos\alpha + \cos\alpha_۱ = ۱ + \cos\alpha\cos\alpha_۱\cos^۲\beta;$$

$$\cos\alpha + \cos\alpha_۱ = ۱ + \cos\alpha\cos\alpha_۱(۱ - \sin^۲\beta);$$

$$\cos\alpha\cos\alpha_۱\sin^۲\beta = ۱ + \cos\alpha\cos\alpha_۱ - \cos\alpha - \cos\alpha_۱ =$$

$$= (۱ - \cos\alpha)(۱ - \cos\alpha_۱);$$

$$\sin^۲\beta = \left(\frac{۱}{\cos\alpha} - ۱\right)\left(\frac{۱}{\cos\alpha_۱} - ۱\right)$$

۵۳. داریم:

$$\frac{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\beta+\gamma)} = \frac{\cos(\gamma-\alpha)-\cos(\beta-\gamma)}{\cos(\beta+\gamma)-\cos(\gamma+\alpha)} =$$

$$= \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\gamma-\alpha)}{\cos(\gamma+\alpha)-\cos(\alpha+\beta)} = x$$

بنابراین:

$$\frac{\sin(\frac{\alpha+\gamma}{۲}-\beta)}{\sin(\frac{\alpha+\gamma}{۲}+\beta)} = \frac{\sin(\frac{\beta+\alpha}{۲}-\gamma)}{\sin(\frac{\beta+\alpha}{۲}+\gamma)} = \frac{\sin(\frac{\gamma+\beta}{۲}-\alpha)}{\sin(\frac{\gamma+\beta}{۲}+\alpha)};$$

$$\frac{\tan\beta - \tan\frac{\alpha+\gamma}{۲}}{\tan\beta + \tan\frac{\alpha+\gamma}{۲}} = \frac{\tan\gamma - \tan\frac{\beta+\alpha}{۲}}{\tan\gamma + \tan\frac{\beta+\alpha}{۲}} = \frac{\tan\alpha - \tan\frac{\beta+\gamma}{۲}}{\tan\alpha + \tan\frac{\beta+\gamma}{۲}}$$

اما باتوجه به برابری‌های:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{a'-b'}{a'+b'} = \frac{a''-b''}{a''+b''}$$

نتیجه می‌دهد:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$$

بنابراین
$$\frac{\tan\alpha}{\tan\frac{۱}{۲}(\beta+\gamma)} = \frac{\tan\beta}{\tan\frac{۱}{۲}(\alpha+\gamma)} = \frac{\tan\gamma}{\tan\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)}$$

۵۴. از برابری اول داریم:

$$\frac{(\tan\theta\cos\beta - \sin\beta)\cos\alpha}{(\tan\varphi\cos\alpha - \sin\alpha)\cos\beta} + \frac{(\cos\alpha - \tan\theta\sin\alpha)\sin\beta}{(\cos\beta + \tan\varphi\sin\beta)\sin\alpha} = ۰$$

بنابراین:

$$\sin\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)\tan\theta+\sin\beta\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)\tan y=$$
$$=۲\sin\beta\cos\beta\sin\alpha\cos\alpha \qquad (*)$$

از برابری دوم به‌دست می‌آید:

$$\frac{\tan\theta}{\tan\varphi}=-\frac{\cos(\alpha-\beta)\tan\beta}{\cos(\alpha+\beta)\tan\alpha}$$

بنابراین می‌توان قرار داد:

$$\tan\theta=\lambda\cos(\alpha-\beta)\tan\beta$$
$$\tan\varphi=-\lambda\cos(\alpha+\beta)\tan\alpha$$

برای $\tan\theta$ و $\tan\varphi$ در برابری $(*)$ این عبارت‌ها را قرار می‌دهیم، حاصل می‌شود:

$$\lambda=\frac{۱}{۲\sin\alpha\sin\beta};$$

بنابراین:

$$\tan\theta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{۲\sin\alpha\cos\beta}=\frac{۱}{۲}(\cot\alpha+\tan\beta);$$
$$\tan\varphi=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{۲\cos\alpha\sin\beta}=\frac{۱}{۲}(\tan\alpha-\cot\beta)$$

۵۵. داریم:

$$\sin^۲\alpha+\sin^۲\beta-۲\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)=$$
$$=\sin^۲\alpha+\sin^۲\beta-۲\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta-۲\sin^۲\alpha\sin^۲\beta=$$
$$=\sin^۲\alpha-\sin^۲\alpha\sin^۲\beta+\sin^۲\beta-$$
$$-\sin^۲\alpha\sin^۲\beta-۲\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta=$$
$$=\sin^۲\alpha\cos^۲\beta+\sin^۲\beta\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta=$$
$$=(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)^۲=\sin^۲(\alpha-\beta)$$

بنابراین:

$$\sin(\alpha - \beta) = \pm n \sin(\alpha + \beta)$$
$$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \pm n(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta),$$
$$\tan\alpha - \tan\beta = \pm n(\tan\alpha + \tan\beta)$$

و سرانجام

$$\tan\alpha = \frac{۱ \pm n}{۱ \mp n}\tan\beta$$

۵۶. برابری‌های داده شده را بسط می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\cos\alpha\cos ۳\theta + \sin\alpha\sin ۳\theta = m\cos^{۳}\theta,$$
$$\sin\alpha\cos ۳\theta - \cos\alpha\sin ۳\theta = m\sin^{۳}\theta$$

برابری اول را در $\cos ۳\theta$، برابری دوم را در $\sin ۳\theta$ − ضرب می‌کنیم و آن‌ها را جمله به جمله با هم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\cos\alpha = m\{\cos^{۳}\theta\cos ۳\theta - \sin^{۳}\theta\sin ۳\theta\}$$

اما می‌دانیم:

$$\cos ۳\theta = ۴\cos^{۳}\theta - ۳\cos\theta, \quad \sin ۳\theta = ۳\sin\theta - ۴\sin^{۳}\theta$$

در نتیجه

$$\cos^{۳}\theta\cos ۳\theta - \sin^{۳}\theta\sin ۳\theta = ۴(\cos^{۶}\theta + \sin^{۶}\theta) - ۳(\sin^{۴}\theta + \cos ۴\theta)$$

برابری اصلی را به توان دو رسانده و با آن جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\cos^{۶}\theta + \sin^{۶}\theta = \frac{۱}{m^{۲}}$$

$\cos^{۴}\theta + \sin^{۴}\theta$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\cos^{۶}\theta + \sin^{۶}\theta = (\cos^{۲}\theta + \sin^{۲}\theta)(\cos^{۳}\theta + \sin^{۴}\theta - \cos^{۲}\theta\sin^{۲}\theta) =$$
$$= \cos^{۴}\theta + \sin^{۴}\theta - \cos^{۲}\theta\sin^{۲}\theta$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{m^۲} = (\cos^۲\theta + \sin^۲\theta)^۲ - ۳\sin^۲\theta\cos^۲\theta,$$

$$۳\sin^۲\theta\cos^۲\theta = ۱ - \frac{۱}{m^۲},$$

$$\sin^۴\theta + \cos ۳\theta = ۱ - ۲\sin^۲\theta\cos^۲\theta = ۱ - \frac{۲}{۳}\left(۱ - \frac{۱}{m^۲}\right) = \frac{۱}{۳}\left(۱ + \frac{۲}{m^۲}\right)$$

درنتیجه:

$$\cos\alpha = m\{۴(\cos^۶\theta + \sin^۶\theta) - ۳(\sin^۴\theta + \cos^۴\theta)\} =$$
$$= m\left\{\frac{۴}{m^۲} - ۱ - \frac{۲}{m^۲}\right\} = \frac{۲ - m^۲}{m}$$

یعنی: $m^۲ + m\cos\alpha = ۲$.

۵۷. از برابری اول به‌دست می‌آید:

$$a[\sin(\theta + \varphi) - \sin(\theta - \varphi)] = b[\sin(\theta - \varphi) + \sin(\theta + \varphi)]$$

بنابراین:

$$a\tan\varphi = b\tan\theta$$

در نتیجه:

$$\frac{a}{b}\tan\varphi = \frac{۲\tan\frac{\theta}{۲}}{۱ - \tan^۲\frac{\theta}{۲}}$$

اما از برابری دوم داریم:

$$\tan\frac{\theta}{۲} = \frac{b\tan\frac{\varphi}{۲} + c}{a}$$

بنابراین:

$$\frac{a}{b}\frac{۲\tan\frac{\varphi}{۲}}{۱ - \tan^۲\frac{\varphi}{۲}} = \frac{۲(b\tan\frac{\varphi}{۲} + c)}{a[۱ - \frac{(b\tan\frac{\varphi}{۲} + c)^۲}{a^۲}]}$$

برای سادگی قرار می‌دهیم: $\tan\frac{\varphi}{۲} = x$ و با انجام تبدیل‌های لازم در برابری آخر، به‌دست می‌آید:

$$bc(۱ + x^۲) = -(b^۲ + c^۲ - a^۲)x$$

اما:

$$\frac{۲x}{۱ + x^۲} = \sin\varphi$$

سرانجام:

$$\sin\varphi = \frac{۲bc}{a^۲ - b^۲ - c^۲}$$

۵۸. از برابری سوم به‌دست می‌آید:

$$\sin^۲\theta\sin^۲\varphi = (\cos\theta\cos\varphi - \sin\beta\sin\gamma)^۲$$

با استفاده از دو برابری اول، داریم:

$$\left(۱ - \frac{\sin^۲\beta}{\sin^۲\alpha}\right)\left(۱ - \frac{\sin^۲\gamma}{\sin^۲\alpha}\right) = \left(\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin^۲\alpha} - \sin\beta\sin\gamma\right)^۲$$

پس از انجام چند تبدیل، این برابری نتیجه می‌شود:

$$\tan^۲\alpha = \tan^۲\gamma + \tan^۲\beta$$

۵۹. داریم:

$$a\sin^۲\theta + b\cos^۲\theta = ۱,\quad a\cos^۲\varphi + b\sin^۲\varphi = ۱$$

بنابراین:

$$a\tan^۲\theta + b = ۱ + \tan^۲\theta,\quad b\tan^۲\varphi + a = ۱ + \tan^۲\varphi$$

درنتیجه:

$$(a - ۱)\tan^۲\theta = ۱ - b,\quad (b - ۱)\tan^۲\varphi = ۱ - a,$$
$$\frac{\tan^۲\theta}{\tan^۲\varphi} = \left(\frac{۱ - b}{۱ - a}\right)^۲$$

از سوی دیگر:

$$\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta}=\frac{b^2}{a^2}$$

از دو برابری اخیر حاصل می‌شود (با فرض این‌که a مخالف b است):

$$a+b-2ab=0$$

۶۰. دو برابری اول را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=a,$$
$$\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta=b$$

نخست معادله اول را در $\sin\beta$ و معادله دوم را در $\cos\alpha$ و سپس معادله اول را در $\cos\beta$ و معادله دوم را در $-\sin\alpha$ ضرب می‌کنیم، آن‌گاه آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sin\theta\cos(\alpha-\beta)=a\sin\beta+b\cos\alpha,$$
$$\cos\theta\cos(\alpha-\beta)=a\cos\beta-b\sin\alpha$$

دو برابری اخیر را به توان دو می‌رسانیم و با هم جمع می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\cos^2(\alpha-\beta)=a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2$$

۶۱. از آن‌جاکه:

$$\cos 3x=\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x,$$
$$\sin 3x=-\sin^3 x+3\sin x\cos^2 x$$

معادله به این صورت درمی‌آید:

$$(\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x)\cos^3 x+(-\sin^3 x+3\sin x\cos^2 x)\sin^3 x=0$$
$$\cos^6 x-3\cos^4 x\sin^2 x+3\sin^4 x\cos^2 x-\sin^6 x=0$$

یا:

$$(\cos^2 x-\sin^2 x)^3=0,\quad \cos 2x=0$$

۶۲. از آن‌جاکه: $\sin 2x + 1 = (\sin x + \cos x)^2$، داریم:

$$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + \cos x) + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

بنابراین $(\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 0$

یا $\cos x(1 + \tan x)(1 + 2\cos x) = 0$

و بنابراین: $\cos x = -\frac{1}{2}$ و $\tan x = -1$

۶۳. داریم: $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1 - \cos x}{1 - \sin x} = 0$

بنابراین: $\frac{(\cos^3 x - \sin^3 x) - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos^2 x(1 - \sin x)}$

یا: $(1 - \tan x)(1 - \cos x) = 0$

درنتیجه: $\cos x = 1$ و $\tan x = 1$

۶۴. داریم: $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos\alpha$

بنابراین: $\cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x$

از سوی دیگر: $\cos^6 x = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3$

معادله به‌این صورت درمی‌آید:

$$4(1 + \cos 2x)^3 - (4\cos^3 2x - 3\cos 2x) = 1$$

یا

$$4\cos^2 2x + 5\cos 2x + 1 = 0$$

بنابراین $\cos 2x = -\frac{1}{4}$ و $\cos 2x = -1$.

۶۵. داریم: $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x + \sin 2x - m \sin x = 0$

بنابراین:

$$\sin x[2\cos^2 x + \cos 2x + 2\cos x - m] = 0$$

$$\sin x[4\cos^2 x + 2\cos x - (m + 1)] = 0$$

و از این‌رو، یک جواب چنین است:

$$\sin x = 0$$

جواب دیگر از این برابری به‌دست می‌آید:

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{4m+5}}{4}$$

بنابراین، قبل از هر چیز، باید

$$4m + 5 \geq 0$$

باشد، علاوه بر این، برای وجود یکی از ریشه‌ها، لازم است که:

$$|1 + \sqrt{4m+5}| \leq 4;$$
$$-4 \leq -1 + \sqrt{4m+5} \leq +4 \Rightarrow -3 \leq \sqrt{4m+5} \leq 5$$

یعنی $m \leq 5$.

برای وجود ریشهٔ دیگر لازم است

$$|-1 - \sqrt{4m-5}| \leq 4, \quad -4 \leq -1 - \sqrt{4m+5} \leq 4, \quad m \leq 1$$

به‌این ترتیب اگر $m < -\frac{5}{4}$، آن‌گاه $\cos x$ دارای هیچ مقدار حقیقی نیست، به‌ازای $m = -\frac{5}{4}$، یک مقدار حقیقی دارد $\left(\cos x = -\frac{1}{4}\right)$، به‌ازای $-\frac{5}{4} < m \leq 1$، $\cos x$ دو مقدار حقیقی دارد $\left(\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{4m+5}}{4}\right)$ و به‌ازای $1 < m \leq 5$، $\cos x$ این بار نیز یک مقدار حقیقی دارد $\left(\cos x = \frac{-1 + \sqrt{4m+5}}{4}\right)$ و به‌ازای $m > 5$، هیچ مقدار حقیقی ندارد.

۶۶. معادله را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\cos(x-\alpha)}\{(1+k)\cos x\cos(2x-\alpha) - (1+k\cos 2x)\cos(x-\alpha)\} = 0$$

اما:

$$\cos x \cos(2x - \alpha) = \frac{1}{2}\cos(3x-\alpha) + \frac{1}{2}\cos(x-\alpha)$$

$$\cos 2x \cos(x - \alpha) = \frac{1}{2}\cos(3x-\alpha) + \frac{1}{2}\cos(x+\alpha)$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{\cos(x-\alpha)}\{(۱+k)[\cos(۳x-\alpha)+\cos(x-\alpha)]-$$
$$-۲\cos(x-\alpha)-k[\cos(۳x-\alpha)+\cos(x+\alpha)\}=۰;$$
$$\frac{۱}{\cos(x-\alpha)}\{\cos(۳x-\alpha)-\cos(x-\alpha)+$$
$$+k[\cos(x-\alpha)-\cos(x+\alpha)]\}=۰;$$
$$\frac{\sin x}{\cos(x-\alpha)}\{k\sin\alpha-\sin(۲x-\alpha)\}=۰$$

بنابراین $\sin(۲x-\alpha)=k\sin\alpha$ و $\sin x=۰$

۶۷. از آنجاکه: $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$، داریم:

$$\sin^۴ x+\cos^۴ x+۲\sin^۲ x\cos^۲ x=۱;$$
$$\sin^۴ x+\cos^۴ x=۱-\frac{۱}{۲}(\sin ۲x)^۲$$

معادله به این صورت درمی‌آید:

$$\sin^۲ ۲x-۸\sin ۲x+۴=۰;$$
$$\sin ۲x=۴\pm\sqrt{۱۶-۴},\quad \sin ۲x=۴\pm ۲\sqrt{۳}$$

با حذف یکی از جواب‌ها، سرانجام حاصل می‌شود:

$$\sin ۲x=۴-۲\sqrt{۳}$$

۶۸. داریم:

$$\log_x a=\frac{۱}{\log_a x},\quad \log_{ax} a=\frac{۱}{\log_x ax},\quad \log_{a^۲x} a=\frac{۱}{\log_a a^۲x}$$

معادله به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{۲}{\log_a x}+\frac{۱}{\log_a x+۱}+\frac{۳}{\log_a x+۲}=۰$$

قرار دهید: $\log_a x = z$

سرانجام، باید معادله زیر را حل کنیم:

$$\frac{۲}{z} + \frac{۱}{z+۱} + \frac{۳}{z+۲} = ۰$$

بنابراین

$$\frac{۶z^۲ + ۱۱z + ۴}{z(z+۱)(z+۲)} = ۰$$

ریشه‌های مطلوب چنین‌اند:

$$z_۱ = -\frac{۴}{۳}, \quad z_۲ = -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$x_۱ = a^{-\frac{۴}{۳}}, \quad x_۲ = a^{-\frac{۱}{۲}}$$

۶۹. داریم:

$$x = y\frac{a}{x+y}$$

بنابراین:

$$y^{x+y} = y^{\frac{۴a^۲}{x+y}}$$

درنتیجه، یا $y = ۱$ یا $x + y = \frac{۴a^۲}{x+y}$. اما به‌ازای $y = ۱$، $x^{۴a} = ۱$ و درنتیجه، $x = ۱$، بنابراین به یک جواب زیر می‌رسیم:

$$x = ۱, \quad y = ۱$$

حال جواب دیگر را به‌دست می‌آوریم داریم:

$$(x+y)^۲ = ۴a^۲ \Rightarrow x + y = ۲a$$

بنابراین: $\left(\frac{x^۲}{y}\right)^a = ۱$,$\quad x^{۲a} = y^a$

و $x^۲ = y$

یعنی $x^۲ = ۲a - x$

از این معادله درجه دوم نتیجه می‌شود: $x = -\frac{۱}{۲} \pm \sqrt{\frac{۱}{۴} + ۲a}$
جواب مثبت عبارت است از:

$$x = -\frac{۱}{۲} + \sqrt{\frac{۱}{۴} + ۲a}$$

مقدار متناظر y از این برابری به‌دست می‌آید:

$$y = x^{۲}$$

۷۰. معادله اول را به توان q و معادله دوم را به توان p می‌رسانیم، به‌دست می‌آید:

$$u^{pq}v^{q^{۲}} = a^{xq}, \quad u^{pq}v^{p^{۲}} = a^{yp}$$

یکی از این برابری‌ها را بر برابری دیگر تقسیم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$v^{q^{۲}-p^{۲}} = a^{xq-yp}$$

و درنتیجه: $v = a^{\frac{py-qx}{p^{۲}-q^{۲}}}$
به‌طور مشابه، به‌دست می‌آید:

$$u = a^{\frac{xp-yq}{p^{۲}-q^{۲}}} \qquad (*)$$

به‌جای u و v در معادله سوم و چهارم، این عبارت‌ها را قرار می‌دهیم:

$$a^{p(x^{۲}+y^{۲})-۲xyq} = b^{p^{۲}-q^{۲}}, \quad a^{۲xyp-q(x^{۲}+y^{۲})} = c^{p^{۲}-q^{۲}};$$
$$p(x^{۲}+y^{۲}) - ۲xyq = (p^{۲}-q^{۲})\log_a b,$$
$$۲xyp - q(x^{۲}+y^{۲}) = (p^{۲}-q^{۲})\log_a c$$

درنتیجه:

$$x^{۲}+y^{۲} = p\log_a b + q\log_a c,$$
$$۲xy = q\log_a b + p\log_a c$$

که از آن با استفاده از برابری‌های $(*)$، x و y و بدنبال آن u و v به‌دست می‌آید.

فصل ۶.

۱. فرض کنید $x = \alpha + \beta i$ و $y = \gamma + \delta i$، آن‌گاه

$$x + y = \alpha + \gamma + (\beta + \delta)i, \quad x - y = \alpha - \gamma + (\beta - \delta)i;$$
$$|x+y|^۲ + |x+y|^۲ = (\alpha+\gamma)^۲ + (\beta+\gamma)^۲ + (\alpha-\gamma)^۲ + (\beta-\gamma)^۲ =$$
$$= ۲(\alpha^۲ + \beta^۲) + ۲(\gamma^۲ + \delta^۲) = ۲\{|x|^۲ + |y|^۲\}$$

۲. قرار دهید $x = \alpha + \beta i$، بنابراین $\overline{x} = \alpha - \beta i$.

الف) بنابه فرض $\alpha - \beta i = \alpha^۲ - \beta^۲ + ۲\alpha\beta i$، بنابراین

$$\alpha = \alpha^۲ - \beta^۲, \quad -\beta = ۲\alpha\beta;$$
$$\beta(۲\alpha + ۱) = ۰, \quad \alpha = \alpha^۲ - \beta^۲$$

ابتدا فرض کنید $\beta = ۰$، $\alpha = \alpha^۲$ یا $\alpha(\alpha - ۱) = ۰$ و از این‌رو، قبل از همه این جواب‌ها را داریم:

$$\alpha = ۰, \quad \beta = ۰, \quad x = ۰;$$
$$\alpha = ۱, \quad \beta = ۰, \quad x = ۱$$

اکنون گام در مرحله‌ای می‌گذاریم که $۲\alpha + ۱ = ۰$ یعنی

$$\alpha = -\frac{۱}{۲}, \quad -\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} - \beta^۲, \quad \beta^۲ = \frac{۳}{۴}, \quad \beta = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲};$$
$$x = -\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \quad x = -\frac{۱}{۲} - i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

درنتیجه، چهار مقدار مختلط x وجود دارد که $\overline{x} = x^۲$ صدق می‌کند:

$$x = ۰, \quad x = ۱, \quad x = -\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \quad x = -\frac{۱}{۲} - i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

ب) دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\alpha(\alpha^{۲} - ۳\beta^{۲} - ۱) = ۰, \quad \beta(۳\alpha^{۲} - \beta^{۲} + ۱) = ۰$$

جواب‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\alpha = ۰, \quad \beta = ۰;$$
$$\alpha = ۰, \quad \beta = \pm ۱;$$
$$\alpha = \pm ۱ \quad \beta = ۰$$

و درنتیجه $x = ۰$، $x = \pm ۱$ و $x = \pm i$.

۳. فرض کنید:

$$a_{۱} + b_{۱}i = x, \quad a_{۲} + b_{۲}i = y, \ldots, a_{n-۱} + b_{n-۱}i = u,$$
$$a_n + b_n i = w$$

آن‌گاه نابرابری را که باید ثابت کنیم می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$|x + y + \ldots + u + w| \leq |x| + |y| + \ldots |u| + |w|$$

یعنی، باید ثابت کنیم، قدرمطلق مجموع چند عدد مختلط کوچکتر یا برابر مجموع قدرمطلق‌های هریک از جمله‌های جمع است، نخست این مطلب را برای مجموع دو عدد ثابت می‌کنیم، یعنی ثابت می‌کنیم که:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$
$$|x + y| = \sqrt{(a_{۱} + a_{۲})^{۲} + (b_{۱} + b_{۲})^{۲}}$$

اما:

$$|x| = \sqrt{a_{۱}^{۲} + b_{۱}^{۲}}, \quad |y| = \sqrt{a_{۲}^{۲} + b_{۲}^{۲}}$$

درنتیجه، لازم است ثابت کنیم:

$$\sqrt{(a_{۱} + a_{۲})^{۲} + (b_{۱} + b_{۲})^{۲}} \leq \sqrt{a_{۱}^{۲} + b_{۱}^{۲}} + \sqrt{a_{۲}^{۲} + b_{۲}^{۲}}$$

دو طرف این نابرابری را به‌توان دو می‌رسانیم و پس از چند عمل به نابرابریِ هم‌ارز آن می‌رسیم:

$$a_1a_2 + b_1b_2 \leq \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}$$

بی‌شک این نابرابری درست است اگر:

$$(a_1a_2 + b_1b_2)^2 \leq (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)$$

یعنی اگر:

$$(a_1a_2 + b_1b_2)^2 - (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \leq 0,$$
$$-(a_1b_2 - a_2b_1)^2 \leq 0$$

که روشن است. بنابراین، ثابت می‌شود که به‌ازای هر عدد دو عدد مختلط x و y:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

برای اثبات حالت کلی مساله، به این صورت عمل می‌کنیم. داریم:

$$|x+y+z+\ldots+u+w| = |(x+y+\ldots+u)+w| \leq |x+y+\ldots+u|+|w|$$

اکنون، عمل مشابهی روی جملهٔ اول انجام می‌دهیم:

$$|x + y + \ldots + u|$$

با ادامهٔ این عمل، برای حالت n جمله، مساله ثابت می‌شود. برهان بالا با روشی استقرای ریاضی انجام شد. اجازه دهید به آن برهان دیگری اضافه کنیم. فرض کنید عددهای مختلط را به‌صورت مثلثاتی نوشته باشیم، یعنی:

$$x = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$y = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\omega = \rho_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$$

آنگاه داریم:

$$x+y+\ldots+w=\sum_{k=۱}^{n}\rho_k\cos\varphi_k+i\sum_{k=۱}^{n}\rho_k\sin\varphi_k,$$
$$|x|+|y|+\ldots+|w|=\sum_{k=۱}^{n}\rho_k,$$
$$|x+y+\ldots+w|^{۲}=(\sum_{k=۱}^{n}\rho_k\cos\varphi_k)^{۲}+(\sum_{k=۱}^{n}\rho_k\sin\varphi_k)^{۲}$$

لازم است ثابت کنیم:

$$\Delta(\sum_{k=۱}^{n}\rho_k)^{۲}-(\sum_{k=۱}^{n}\rho_k\cos\varphi_k)^{۲}-(\sum_{k=۱}^{n}\rho_k\sin\varphi_k)^{۲}\geq ۰$$

داریم:

$$(\sum_{k=۱}^{n}\rho_k)^{۲}=\sum_{k=۱}^{n}\rho_k^{۲}+۲\sum_{s\neq t}\rho_s\rho_t$$
$$(\sum_{k=۱}^{n}\rho_k\cos\varphi_k)^{۲}=\sum_{k=۱}^{n}\rho_k^{۲}\cos^{۲}\varphi_k+۲\sum_{s\neq t}\rho_s\rho_t\cos\varphi_s\cos\varphi_t,$$
$$(\sum_{k=۱}^{n}\rho_k\sin\varphi_k)^{۲}=\sum_{k=۱}^{n}\rho_k^{۲}\sin^{۲}\varphi_k+۲\sum_{s\neq t}\rho_s\rho_t\sin\varphi_s\sin\varphi_t$$

در نتیجه:

$$\Delta=۲\sum_{s\neq t}\rho_s\rho_t-۲\sum_{s\neq t}\rho_s\rho_t\cos(\varphi_s-\varphi_t),$$
$$\Delta=۲\sum_{s\neq t}\rho_s\rho_t\{۱-\cos(\varphi_s-\varphi_t)\}=۴\sum_{s\neq t}\rho_s\rho_t\sin^{۲}\frac{\varphi_s-\varphi_t}{۲}\geq ۰$$

۴. با بررسی مستقیم ثابت کنید، باتوجه اینکه:

$$\varepsilon^{۲}=-\varepsilon-۱,\quad \varepsilon^{۳}=۱$$

۵. روشن است که:

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}-ab-ac-bc=(a+\varepsilon b+\varepsilon^{۲}c)(a+\varepsilon^{۲}b+\varepsilon c)$$
$$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-xy-xz-yz=(x+\varepsilon y+\varepsilon^{۲}x)(x+\varepsilon^{۲}y+\varepsilon z)$$

بنابراین:

$$(a^۲+b^۲+c^۲-ab-ac-bc)(x^۲+y^۲+z^۲-xy-xz-yz)$$
$$[(ax+cy+bz)+(cz+by+az)\varepsilon^۲+(bx+ay+cz)\varepsilon=$$
$$x^۲+y^۲+z^۲-xy-xz-yz,$$

که در آن:

$$X=ax+cy+bz,\quad Y=cx+by+az,\quad Z=bx+ay+cz$$

۶. الف) دستگاه داده شده را نسبت به x و y و z حل می‌کنیم:

$$x=\frac{A+B+C}{۳},\quad y=\frac{A+B\varepsilon^۲+C\varepsilon}{۳},\quad z=\frac{A+B\varepsilon+C\varepsilon^۲}{۳}$$

ب) داریم:

$$|A|^۲+|B|^۲+|C|=A\overline{A}+B\overline{B}+C\overline{C}$$

اما:

$$A\overline{A}=(x+y+z)(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})=|x|^۲+|y|^۲+|z|^۲+\overline{x}(y+z)$$
$$+\overline{y}(x+z)+\overline{z}(x+y)$$
$$B\overline{B}=(x+y\varepsilon+z\varepsilon^۲)(\overline{x}+\overline{y}\varepsilon^۲+\overline{z}\varepsilon)=|x|^۲+|y|^۲+|x|^۲$$
$$+\overline{x}(y\varepsilon+z\varepsilon^۲)+\overline{y}(x\varepsilon^۲+z\varepsilon)+\overline{z}(x\varepsilon+y\varepsilon^۲),$$
$$C\overline{C}=(x+y\varepsilon^۲+z\varepsilon)(\overline{x}+\overline{y}\varepsilon+\overline{z}\varepsilon^۲)$$
$$=|x|^۲+|y|^۲+|z|^۲\overline{x}(y\varepsilon^۲+z\varepsilon)+\overline{y}(x\varepsilon+z\varepsilon^۲)$$
$$+\overline{z}(x\varepsilon^۲+y\varepsilon)$$

با جمع جمله‌به‌جملهٔ سه برابری، به‌دست می‌آید:

$$|A|^۲+|B|^۲+|C|^۲=A\overline{A}+B\overline{B}+C\overline{C}=۳[|x|^۲+|y|^۲+|x|^۲]+$$
$$+x[\overline{y}(۱+\varepsilon+\varepsilon^۲)+z(۱+\varepsilon^۲+\varepsilon)]+\overline{y}[x(۱+\varepsilon^۲+\varepsilon)+z(۱+\varepsilon+\varepsilon^۲)]$$
$$+\overline{z}[x(۱+\varepsilon+\varepsilon^۲)+y(۱+\varepsilon^۲+\varepsilon)]$$

اما از آن‌جاکه: $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$، سه عبارت اخیر در داخل کروشه برابر صفر است و

$$|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 = 3[|x|^2 + |y|^2 + |z|^2]$$

۷. باتوجه به نتیجهٔ به‌دست آمده در بخش الف) در مسالهٔ ۶، داریم:

$$x'' = \frac{AA' + BB' + CC'}{3}, \quad Y'' = \frac{AA' + BB'\varepsilon^2 + CC'\varepsilon}{3},$$
$$z'' = \frac{AA' + BB'\varepsilon + CC'\varepsilon^2}{3}$$

علاوه بر این:

$$AA' + BB' + CC' = (x + y + z)(x' + y' + z') +$$
$$+(x + y\varepsilon + z\varepsilon^2)(x' + y'\varepsilon + z'\varepsilon^2) + (x + y\varepsilon^2 + z\varepsilon)(x' + y'\varepsilon^2 + z'\varepsilon) =$$
$$= 3(xx' + xy' + yz')$$

و همین‌طور:

$$x'' = xx' + zy' + yz'$$

به‌طور مشابه:

$$y'' = yy' + xz' + zx'$$
$$z'' = zz' + yx' + xy'$$

دو عبارت اخیر را می‌توان در نتیجهٔ یک تبدیل دوری از عبارت اول به‌دست آورد.

۸. اگرچه این دستور را پیش از این ثابت کرده‌ایم (مسالهٔ ۲، فصل ۱ را ببینید)، در این‌جا می‌خواهیم برهان دیگری برای آن بیاوریم و آن را با استفاده از عددهای مختلط ثابت می‌کنیم، این اتحاد را می‌شناسیم:

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\gamma' - \beta'\gamma') = (\alpha\alpha' + \beta\gamma')(\gamma\beta' + \delta\delta') -$$
$$-(\alpha\beta' + \beta\delta')(\gamma\alpha' + \delta\delta')$$

فرض می‌کنیم:

$$\alpha = x + yi, \quad \beta = x + ti, \quad \gamma = -(z - ti), \quad \delta = x - yi$$
$$\alpha' = a + bi, \quad \beta' = c + di, \quad \gamma' = -(c - di), \quad \delta' = a - bi$$

آنگاه:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = x^۲ + y^۲ + z^۲ + t^۲$$
$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲$$
$$\alpha\alpha' + \beta\gamma' = (ax - by - cx - dt) + i(bx + ay + dz - ct)$$
$$\gamma\beta' + \delta\delta' = \overline{\beta\gamma'} + \overline{\alpha\alpha'} = (\overline{\alpha\alpha' + \beta\gamma'})$$

بنابراین:

$$(\alpha\alpha' + \beta\gamma')(\gamma\beta' + \delta\delta') = (ax - by - cz - dt)^۲ +$$
$$+i(dx + cy - bz + at)$$
$$\gamma\alpha' + \delta\gamma' = -(cx - dy + az + bt) + i(dx + cy - bz + at)$$

یعنی:

$$-(\alpha\beta' + \beta\delta')(\gamma\alpha' + \delta\gamma') = (cx - dy + az + bt)^۲ + (da + cy - bz + at)^۲$$

عبارت‌های به‌دست آمده را در اتحاد اصلی قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$(a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲)(x^۲ + y^۲ + z^۲ + t^۲) = (ax - by - cz - dt)^۲ +$$
$$(bx + ay + dz - ct)^۲ + (cx - dy + az + bt)^۲ + (dx + cy - bz + at)^۲$$

در آن به‌جای d، $-d$ و به‌جای t، $-t$ قرار دهید، به اتحاد موردنظر دست می‌یابید.

۹. باتوجه به دستور دوجمله‌ای، $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$ را بسط دهید:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + n\cos^{n-۱}\varphi i(\sin\varphi) + \frac{n(n-۱)}{۱\times ۲}\cos^{n-۲}\varphi(i\sin\varphi)^۲$$
$$+\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱\times ۲\times ۳}\cos^{n-۳}\varphi(i\sin\varphi)^۳ + \ldots + n\cos\varphi(i\sin\varphi)^{n-۱} + (i\sin\varphi)^n$$

در این عبارت، بخش حقیقی را از بخش موهومی جدا می‌کنیم و از دستور موآور استفاده می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = (\cos^n\varphi - \frac{n(n-۱)}{۱\times ۲}\cos^{n-۲}\varphi\sin^۲\varphi + \ldots) +$$
$$+i(n\cos^{n-۱}\varphi\sin\varphi - \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱\times ۲\times ۳}\cos^{n-۳}\varphi\sin^۳\varphi + \ldots)$$

بنابراین:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{n(n-۱)}{۱\times ۲}\cos^{n-۲}\varphi\sin^۲\varphi + \ldots$$
$$\sin n\varphi = n\cos^{n-۱}\varphi\sin\varphi - \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱\times ۲\times ۳}\cos^{n-۳}\varphi\sin^۳\varphi + \ldots$$

باتوجه به توان n و تقسیم دو طرف این برابری‌ها بر $\cos\varphi$، به دستور مورد نظر دست می‌یابیم.

۱۰. در آغاز بخش الف را ثابت می‌کنیم. داریم:

$$\cos\varphi = \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos\varphi - i\sin\varphi)}{۲}$$

فرض می‌کنیم $\cos\varphi + i\sin\varphi = \varepsilon$، آن‌گاه

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = \varepsilon^{-۱}$$

و

$$\cos^{۲m}\varphi = \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon^{-۱}}{۲}\right)^{۲m} = \frac{۱}{۲^{۲m}}\sum_{k=۰}^{۲m} C_{۲m}^k \varepsilon^{-k}\cdot\varepsilon^{۲m-k}$$

علاوه بر این:

$$۲^{۲m}\cos^{۲m}\varphi = \sum_{k=۰}^{m-۱} C_{۲m}^k\varepsilon^{۲(m-k)} + C_{۲m}^m + \sum_{k=m+۱}^{۲m} C_{۲m}^k\varepsilon^{۲(m-k)}$$

در جمع دوم قرار دهید $m-k = -(m-k')$، آن‌گاه این مجموع را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\sum_{k'=m-۱}^{o} C_{۲m}^{۲m-k'}\varepsilon^{-۲(m-k')} = \sum_{k=۰}^{m-۱} C_{۲m}^k\varepsilon^{-۲(m-k)}$$

به‌همین ترتیب:

$$۲^{۲m}\cos^{۲m}\varphi=\sum_{k=۰}^{m-۱}C_{۲m}^{k}(\varepsilon^{۲(m-k)}+\varepsilon^{-۲(m-k)})+C_{۲m}^{m}$$

با وجود این

$$\varepsilon^{۲(m-k)}+\varepsilon^{-۲(m-k)}=۲\cos ۲(m-k)$$

بنابراین

$$۲^{۲m}\cos^{۲m}\varphi=\sum_{k=۰}^{m-۱}۲C_{۲m}^{k}\cos ۲(m-k)\varphi+C_{۲m}^{m}$$

اگر در این برابری، به‌جای φ، $\frac{\pi}{۲}-\varphi$ قرار دهید، برابری ب به‌دست می‌آید. برابری‌های ج و د از برابری‌های الف و ب نتیجه می‌شود.

۱۱. عبارت:

$$u_n+iu_n=(\cos\alpha+i\sin\alpha)+r[\cos(\alpha+\theta)+i\sin(\alpha+\theta)+\ldots+$$
$$+r^n[\cos(\alpha+n\theta)+i\sin(\alpha+n\theta)]=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\{۱+$$
$$+r(\cos\theta+i\sin\theta)+\ldots+r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\}$$

قرار می‌دهیم: $\varepsilon=\cos\theta+i\sin\theta$، در این صورت

$$u_n+iv_n=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\{۱+r\varepsilon+\ldots+(r\varepsilon)^n\}=$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\frac{(r\varepsilon)^{n+۱}-۱}{r\varepsilon-۱}$$

کسر $\frac{(r\varepsilon)^{n+۱}-۱}{r\varepsilon-۱}$ را با جدا کردن بخش‌های حقیقی و موهومی آن، به‌این صورت می‌نویسیم. داریم:

$$\frac{(r\varepsilon)^{n+۱}-۱}{r\varepsilon-۱}=\frac{[(r\varepsilon)^{n+۱}-۱][r\overline{\varepsilon}-۱]}{(r\varepsilon-۱)(r\overline{\varepsilon}-۱)}=$$
$$=\frac{r^{n+۲}[\cos n\theta+i\sin n\theta]-r[\cos\theta-i\sin\theta]}{۱-۲r\cos\theta+r^۲}+$$
$$+\frac{-r^{n+۱}[\cos(n+۱)\theta+i\sin(n+۱)\theta]+۱}{۱-۲r\cos\theta+r^۲}$$

کسر اخیر را در $\cos\alpha + i\sin\alpha$ ضرب می‌کنیم و بخش‌های حقیقی و موهومی را جداگانه می‌نویسیم،

$$u_n + iv_n = \frac{r^{n+۲}[\cos(n\theta+\alpha) + i\sin(n\theta+\alpha)]}{۱ - ۲r\cos\theta + r^۲} +$$
$$+\frac{-r^{n+۱}\{\cos[(n+۱)\theta+\alpha] + i\sin[(n+۱)\theta+\alpha]\} + \cos\alpha + i\sin\alpha}{۱ - ۲r\cos\theta + r^۲}$$

بنابراین:

$$u_n = \frac{\cos\alpha - r\cos(\alpha-\theta) - r^{n+۱}\cos[(n+۱)\theta+\alpha] + r^{n+۲}\cos(n\theta+\alpha)}{۱ - ۲n\cos\theta + r^۲}$$
$$v_n = \frac{\sin\alpha - r\sin(\alpha-\theta) - r^{n+۱}\sin[(n+۱)\theta+\alpha] + r^{n+۱}\sin(n\theta+\alpha)}{۱ - ۲r\cos\theta + r^۲}$$

در این برابری‌ها $\alpha = ۰$ و $r = ۱$ قرار می‌دهیم، حاصل می‌شود:

$$۱ + \cos\theta + \cos ۲\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{\sin\frac{n+۱}{۲}\theta\cos\frac{n}{۲}\theta}{\sin\frac{\theta}{۲}}$$

$$\sin\theta + \sin ۲\theta + \ldots + \sin n\theta = \frac{\sin\frac{(n+۱)\theta}{۲}\sin\frac{n\theta}{۲}}{\sin\frac{\theta}{۲}}$$

۱۲. داریم:

$$s + s'_i = \sum_{k=۰}^{n} C_n^k(\cos k\theta + i\sin k\theta) = \sum_{k=۰}^{n} C_n^k(\cos\theta + i\sin\theta)^k =$$
$$= (۱ + \cos\theta + i\sin\theta)^n = [۲\cos^۲\frac{\theta}{۲} + ۲i\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}]^n =$$
$$= ۲^n\cos^n\frac{\theta}{۲}(\cos\frac{\theta}{۲} + i\sin\frac{\theta}{۲})^n = ۲^n\cos^n\frac{\theta}{۲}(\cos\frac{n\theta}{۲} + i\sin\frac{n\theta}{۲})$$

بنابراین:

$$s = ۲^n \cos\frac{n\theta}{۲}\cos\frac{n\theta}{۲}, \quad s' = ۲^n \cos\frac{n\theta}{۲}\sin\frac{n\theta}{۲}$$

۱۳. قرار دهید:

$$s = \sin^{۲p}\alpha + \sin^{۲p} ۲\alpha + \ldots + \sin^{۲p} n\alpha = \sum_{l=۱}^{n} \sin^{۲p} l\alpha$$

اما (مساله ۱۰ را ببینید):

$$\sin^{۲p} l\alpha = \frac{۱}{۲^{۲p-۱}}(-۱)^p \sum_{k=۰}^{p-۱}(-۱)^k C_{۲p}^k \cos ۲(p-k)l\alpha + \frac{۱}{۲^{۲p}} C_{۲p}^p$$

بنابراین:

$$s = \frac{(-۱)^p}{۲^{۲p-۱}} \sum_{k=۰}^{p-۱}(-۱)^k C_{۲p}^k \sum_{l=۱}^{n} \cos ۲(p-k)l\alpha + \frac{n}{۲^{۲p}} C_{۲p}^p$$

قرار دهید: $۲(p-k)\alpha = \xi$، آنگاه:

$$\sum_{l=۱}^{n} \cos ۲(p-k)l\alpha = \cos\xi + \ldots + \cos n\xi = \frac{\sin\frac{n\xi}{r}\cos\frac{n+۱}{۲}\xi}{\sin\frac{\xi}{۲}}$$

(جواب مساله ۱۱ را ببینید). قرار دهید

$$\frac{\sin\frac{n\xi}{۲}\cos\frac{n+۱}{۲}\xi}{\sin\frac{\xi}{۲}} = \sigma_k$$

آن‌گاه می‌توان ثابت کرد $\sigma_k = ۰$ اگر k همنهشت با p باشد $\{k \equiv p (\mathrm{mod}\ ۲)\}$ و $\sigma_k = -۱$ اگر k و p همنهشت نباشند $\{k \equiv p + ۱ (\mathrm{mod} ۲)\}$، حاصل می‌شود:

$$s = \frac{(-۱)^{p+۱}}{۲^{۲p-۱}} \sum_{k=۰,\ k\equiv p+۱ (\mathrm{mod} ۲)}^{p-۱} (-۱)^k C_{۲p}^k + n\frac{۱}{۲^{۲p}} C_{۲p}^p$$

بنابراین:

$$s = \frac{۱}{۲^{۲p-۱}} \sum_{k=۰_{k\equiv p+۱ (\mathrm{mod}۲)}}^{p-۱} C_{۲p}^{k} + n\frac{۱}{۲^{۲p}} C_{۲p}^{p}$$

اما می‌توان ثابت کرد که: $\sum_{k=۰_{k\equiv p+۱ (\mathrm{mod}۲)}}^{p-۱} C_{۲p}^{k} = ۲^{۲p-۲}$

(مساله ۵۸ این فصل را ببینید) و برابری نتیجهٔ می‌شود.

۱۴. الف) چندجمله‌ای را به این صورت می‌نویسیم:

$$x^n - a^n - nxa^{n-۱} + na^n = (x^n - a^n) - na^{n-۱}(x-a)$$
$$= (x-a)(x^{n-۱} + ax^{n-۲} + \ldots + a^{n-۱} - na^{n-۱})$$

به‌ازای $x = a$، عامل دوم ضرب اخیر برابر صفر می‌شود و درنتیجه بر $x - a$ بخش‌پذیر است، بنابراین چندجمله‌ای داده شده بر $(x-a)^۲$ بخش‌پذیر است.

ب) چندجمله‌ای را به‌صورت p_n نمایش می‌دهیم و تفاضل $p_n - p_{n-۱}$ را تشکیل می‌دهیم. با انجام تبدیل‌های لازم روی این تفاضل، به‌سادگی ثابت می‌شود که بر $(x-۱)^۳$ بخش‌پذیر است. از آن‌جا که این مطلب به‌ازای هر عدد مثبت n درست است، به این برابری‌ها می‌رسیم

$$p_n - p_{n-۱} = (۱-x)^۳ \varphi_n(x)$$
$$p_{n-۱} - p_{n-۲} = (۱-x)^۳ \varphi_{n-۱}(x)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_۳ - p_۲ = (۱-x)^۳ \varphi_۲(x)$$
$$p_۲ - \equiv (۱-x)^۳ \varphi_۱(x)$$

که در آن‌ها $\varphi_i(x)$، چندجمله‌ای‌هایی برحسب x هستند. بنابراین

$$p_n - p_۱ = (۱-x)^۳ \psi(x)$$

از از آنجاکه: $p_1 = (x - 1)^3$ نتیجه می‌گیریم که p_n بر $(x - 1)^3$ بخش‌پذیر است و حکم ثابت می‌شود.

۱۵. الف) عبارت داده شده را به‌صورت یک چندجمله‌ای برحسب y در نظر بگیرید. دیده می‌شود که به‌ازای $y = 0$ چندجمله‌ای (به‌ازای هر x) صفر می‌شود. بنابراین، چندجمله‌ای بر y بخش‌پذیر است. از آن‌جاکه چندجمله‌ای نسبت به x و y متقارن است (با تبدیل x به y و y به x، به چندجمله‌ای تغییر نمی‌کند)، پس بر x نیز بخش‌پذیر است. به‌این ترتیب، چندجمله‌ای بر xy بخش‌پذیر است. برای اثبات بخش‌پذیر بودن بر $x + y$، در آن $y = -x$ قرار می‌دهیم. روشن است که به‌ازای n فرد داریم:

$$(x - x)^n - x^n - (-x)^n = 0$$

درنتیجه، چندجمله‌ای بر $x + y$ بخش‌پذیر است. تنها باقی می‌ماند اثبات بخش‌پذیری این چندجمله‌ای بر

$$x^2 + xy + y^2 = (y - x\varepsilon)(y - x\varepsilon^2)$$

که در آن: $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

برای این منظور، تنها باقی می‌ماند به جای‌گزینی نخست y با $x\varepsilon$ و آن‌گاه با $x\varepsilon^2$ تا مطمئن شویم، با این جای‌گزینی‌ها، چندجمله‌ای صفر می‌شود. بنابه فرض، از آن‌جا که n بر ۳ بخش‌پذیر نیست، درنتیجه، $n = 3l + 1$ یا $n = 3l + 2$. به‌ازای $y = x\varepsilon$ چندجمله‌ای مقدار زیر را به خود می‌گیرد:

$$(x + x\varepsilon)^n - x^n - (x\varepsilon)^n = x^n\{\varepsilon^{2n} + 1 + \varepsilon^n\} = x^n(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = 0$$

به‌همین ترتیب، ثابت می‌کنیم به‌ازای $y = x\varepsilon^2$ نیز چندجمله‌ای صفر می‌شود. درنتیجه، بخش‌پذیری آن بر $xy(x + y)\,(x^2 + xy + y^2)$ ثابت می‌شود.

ب) برای اثبات این حکم، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید $-x$ و $-y$ و $x + y$ ریشه‌های معادله درجه سوم $\alpha^3 - r\alpha^2 - p\alpha - q = 0$ باشد، آن‌گاه، با توجه به رابطه‌های معلوم بین ریشه‌های یک معادله و ضریب‌های آن (آغاز این فصل را ببینید)، داریم:

$$r = -x - y + (x + y) = 0,$$

$$-p = xy - x(x+y) - y(x+y),$$
$$q = xy(x+y)$$

بنابراین، $x-$ و $y-$ و $x+y$ ریشه‌های این معادله‌اند:

$$\alpha^{۳} - p\alpha - q = ۰$$

که در آن: $q = xy(x+y)$ و $p = x^{۲} + xy + y^{۲}$.

قرار دهید: $s_n = (-x)^n + (-y)^n + (x+y)^n$. بین مقدارهای متوالی s_n، رابطه‌های زیر وجود دارد:

$$s_{n+۳} = ps_{n+۱} + qs_n$$

$s_۱$ برابر صفر است. ثابت می‌کنیم s_n بر $p^{۲}$ بخش‌پذیر است، اگر $n \equiv ۱ (\mathrm{mod}\ ۶)$. برای این منظور از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. فرض کنید s_n بر $p^{۲}$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه ثابت می‌کنیم $s_{n+۶}$ نیز بر $p^{۲}$ بخش‌پذیر است. داریم:

$$s_{n+۶} = ps_{n+۴} + qs_{n+۳}, \quad s_{n+۴} = ps_{n+۲} + qs_{n+۱}$$

بنابراین:

$$s_{n+۶} = p(ps_{n+۲} + qs_{n+۱}) + q(ps_{n+۱} + qs_n) =$$
$$= p^{۲}s_{n+۲} + ۲pqs_{n+۱} + q^{۲}s_n$$

از آن‌جا که بنابه‌فرض، s_n بر $p^{۲}$ بخش‌پذیر است، کافی است ثابت کنیم $s_{n+۱}$ بر p بخش‌پذیر است، بنابراین، تنها باید ثابت کنیم که:

$$(x+y)^n + (-x)^n + (-y)^n$$

بر $x^{۲} + xy + y^{۲}$ بخش‌پذیر است اگر $n \equiv ۲ (\mathrm{mod}\ ۶)$. مانند بخش الف عمل می‌کنیم و به‌آسانی حکم را ثابت می‌کنیم. از این رو، با فرض بخش‌پذیر بودن s_n بر $p^{۲}$، ثابت کرده‌ایم که $s_{n+۶}$ نیز بر $p^{۲}$ بخش‌پذیر است. اما $s_۱ = ۰$ بر $p^{۲}$ بخش‌پذیر است. درنتیجه:

$$s_n = (x+y)^n - x^n - y^n$$

به‌ازای هر $n \equiv ۱ (\bmod ۶)$ بر $(x^۲ + xy + y^۲)$ بخش‌پذیر است. تنها باقی می‌ماند اثبات بخش‌پذیری آن بر $x + y$ و بر xy.

۱۶. اثبات درستی برابریِ الف روشن است. از مساله ۱۵ نتیجه می‌شود $(x + y)^۵ - x^۵ - y^۵$ بر $xy(x + y)(x^۲ + xy + y^۲)$ بخش‌پذیر است. از آن‌جا که هر دو چندجمله‌ای $(x + y)^۵ - x^۵ - y^۵$ و $xy(x + y)(x^۲ + xy + y^۲)$ نسبت به x و y هم توان و همگن هستند، خارج قسمت‌تقسیم $(x + y)^۵ - x^۵ - y^۵$ بر $xy(x + y)(x^۲ + xy + y^۲)$، کمیتی مستقل از x و y است. آن را با A نمایش می‌دهیم. آن‌گاه داریم:

$$(x + y)^۵ - x^۵ - y^۵ = Ay(x + y)(x^۲ + xy + y^۲)$$

از آن‌جا که این برابری، نمایش یک اتحاد است، درنتیجه به‌ازای هر مقداری از x و y برقرار است، برای مثال، در این‌جا قرار دهید: $x = ۱, \quad y = ۱$. نتیجه می‌شود:

$$۲^۵ - ۱ - ۱ = A \times ۲ \times ۳$$

درضمن نتیجه می‌شود:

$$(x + y)^۵ - x^۵ - y^۵ = ۵xy(x + y)(x^۲ + xy + y^۲)$$

با استفاده از نتیجهٔ مساله ۱۵ (ب)، به‌طور مشابه، می‌توان نوشت:

$$(x + y)^۷ - x^۷ - y^۷ = Axy(x + y)(x^۲ + xy + y^۲)^۲$$

در این‌جا قرار دهید $x = y = ۱$. حاصل می‌شود $A = ۷$

۱۷. می‌دانیم: $(x + y + z)^۳ - x^۳ - y^۳ - z^۳ = ۳(x + y)(x + z)(y + z)$

ثابت می‌کنیم $(x + y + z)^m - x^m - y^m - z^m$ بر $x + y$ بخش‌پذیر است. چندجمله‌ای را دوباره برحسب توان‌های x مرتب می‌کنیم و در آن قرار می‌دهیم $x = -y$. داریم:

$$(-y + y + z)^m - (-y)^m - y^m - z^m = ۰$$

زیرا m، عددی فرد است، درنتیجه، چندجمله‌ای بر $(x + y)$ بخش‌پذیر است. به‌همین ترتیب، چندجمله‌ای بر $(x + z)$ و $(y + z)$ بخش‌پذیر است.

۱۸. شرط لازم و کافی برای این‌که چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر باشد، آن است که $f(a)=0$، قرار دهید:

$$f(x)=x^3+kyzx+y^3+z^3$$

برای آن‌که این چندجمله‌ای بر $x+y+z$ بخش‌پذیر باشد، شرط لازم و کافی آن است که داشته باشیم:

$$f(-y-z)=0$$

باوجود این

$$f(-y-z)=-(y+z)^3-kyz(y+z)+y^3+z^3=$$
$$=-(k+3)yz(y+z)$$

که از آن نتیجه می‌شود $k=-3$. بنابراین، برای این‌که $x^3+y^3+z^3+kxyz$ بر $x+y+z$ بخش‌پذیر باشد، لازم و کافی است که $k=-3$.

۱۹. n را بر p تقسیم می‌کنیم. به‌دست می‌آید $n=lp+r$ که در آن، l یک عدد درست مثبت است و $0\le r<p$. درنتیجه:

$$x^n-a^n=x^{lp}x^r-x^{lp}a^r=x^{lpa^r}-a^{lp}x^r+a^{lp}x^n-a^{lp}a^n=$$
$$x^n(x^{lp}-a^{lp})+a^{lp}(x^r-a^r)$$

اما $x^{lp}-a^{lp}=(x^p)^l-(a^p)^l$ بر x^p-a^p بخش‌پذیر است، برای بخش‌پذیری x^n-a^n بر x^p-a^p لازم و کافی است که x^r-a^r بر x^p-a^p بخش‌پذیر باشد، اما این تنها وقتی ممکن است که $r=0$ و درنتیجه $n=lp$. سرانجام، برای بخش‌پذیری x^n-a^n بر x^p-a^p لازم و کافی است که n بر p بخش‌پذیر باشد.

۲۰. قرار دهید $f(x)=x^{4a}+x^{4b+1}+x^{4c+2}+x^{4d+3}$. از سوی دیگر،

$$x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)=(x+i)(x+i)(x-i)$$

تنها باقی می‌ماند اثبات این مطلب که:

$$f(-1)=f(i)=f(-i)=0$$

۲۱. داریم:

$$۱ + x^۲ + x^۴ + \ldots x^{۲x-۲} = \frac{x^{۲n} - ۱}{x^۲ - ۱};$$
$$۱ + x + x^۲ + \ldots + x^{n-۱} = \frac{x^n - ۱}{x - ۱}$$

باید تعیین کنیم به‌ازای چه مقدار از n، $\frac{x^{۲n} - ۱}{x^۲ - ۱} : \frac{x^n - ۱}{x - ۱}$ یک چندجمله‌ای برحسب x است،

$$\frac{x^{۲n} - ۱}{x^۲ - ۱} : \frac{x^n - ۱}{x - ۱} = \frac{x^n + ۱}{x + ۱}$$

برای این‌که $x^n + ۱$ بر $x + ۱$ بخش‌پذیر باشد لازم و کافی است که $(-)^n + ۱ = ۰$ یعنی n فرد باشد.

بنابراین اگر n فرد باشد $x^{۲n-۲} + \ldots + x^۲ + ۱$ بر $x^{n-۱} + \ldots + x^۲ + x + ۱$ بخش‌پذیر است.

۲۲. الف) قرار دهید:

$$f(x) = (\cos\varphi + x\sin\varphi)^n - \cos n\varphi - x\sin\varphi$$
$$f(i) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n - (\cos\varphi + i\sin\varphi) = ۰,$$
$$x^۲ + ۱ = (x + i)(x - i)$$

(بنا به‌دستور موآور). به همین ترتیب، ثابت می‌کنیم $f(-i) = ۰$ و حکم ثابت می‌شود.

ب) چندجمله‌ای $x^۲ - ۲\rho x\cos\varphi + \rho^۲$ را به عامل‌های خطی برحسب x تجزیه می‌کنیم، برای این منظور، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

$$x^۲ - ۲\rho x\cos\varphi + \rho^۲ = ۰$$

را پیدا می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x = \rho\cos\varphi \pm \sqrt{\rho^۲\cos^۲\varphi - \rho^۲} = \rho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$$

فرض می‌کنیم:

$$x^n \sin\varphi - \rho^{n-۱} x \sin n\varphi + \rho^n \sin(n-۱)\varphi = f(x)$$

باید ثابت کنیم $f[\rho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)] = ۰$.

۲۳. فرض کنید:

$$x^۴ + ۱ = (x^۲ + px + q)(x^۲ + p'x + q') = x^۴ + (p+p')x^۳ +$$
$$+ (q + q' + pp')x^۲ + (pq' + qp')x + qq'$$

برای تعیین p، q و p' و q'، چهار معادله به‌دست می‌آید:

$$p + q' = ۰ \qquad (۱)$$

$$pp' + q + q' = ۰ \qquad (۲)$$

$$pq' + qp' = ۰ \qquad (۳)$$

$$qq' = ۱ \qquad (۴)$$

از معادلهٔ (۱) و (۳) به‌دست می‌آید: $p' = -p$. $p(p'-q) = ۰$.

الف) فرض کنید $p = ۰$، $p' = ۰$ و $q + q' = ۰$ و $qq' = ۱$، $q^۲ = -۱$ و $q = \pm i$ و $q' = \mp i$.

بنابراین تجزیهٔ آن به‌این صورت است:

$$x^۴ + ۱ = (x^۲ + i)(x^۲ - i)$$

ب) $q' = q$ و $q^۲ = ۱$ و $q = \pm ۱$.

نخست فرض کنید $q = q' = ۱$، آن‌گاه $pp' = -۲$، $p + p' = ۰$، $p^۲ = ۰$، $p = \pm\sqrt{۲}$، $p' = \mp\sqrt{۲}$. تجزیهٔ چندجمله‌ای به‌این صورت است:

$$x^۴ + ۱ = (x^۲ - \sqrt{۲}x + ۱)(x^۲ + \sqrt{۲}x + ۱)$$

با فرض $q = q' = -۱$ به‌دست می‌آید

$$p + p' = ۰, \quad pp' = ۲, \quad p = \pm\sqrt{۲}i, \quad p' = \mp\sqrt{۲}i$$

تجزیه چندجمله‌ای به‌این صورت است:

$$x^۴ + ۱ = (x^۲ + \sqrt{۲}ix - ۱)(x^۲ - \sqrt{۲}ix - ۱)$$

۲۴. قرار دهید: $\sqrt{a+bi} = x + iy$، درنتیجه

$$a + bi = x^۲ - y^۲ + ۲xyi$$

یعنی: $۲xy = b$ و $x^۲ - y^۲ = a$.

برای محاسبهٔ x و y تنها دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیر باقی می‌ماند:

$$(x^۲ + y^۲)^۲ = (x^۲ - y^۲)^۲ + ۴x^۲y^۲ = a^۲ + b^۲, \quad x^۲ + y^۲ = s\sqrt{a^۲ + b^۲}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$x = \pm\sqrt{a + \sqrt{a^۲ + b^۲}}, \quad y = \pm\sqrt{-a + \sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

علامت ریشه‌ها به‌صورت $۲xy = b$ با هم مرتبط هستند، و درنتیجه، به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{a + \sqrt{a^۲ + b^۲}} + i\sqrt{-a + \sqrt{a^۲ + b^۲}}\right)$$

با شرط $b > ۰$ (از آن‌جا که در آن‌صورت، علامت x و y باید یکی باشد) و:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{a + \sqrt{a^۲ + b^۲}} - i\sqrt{-a + \sqrt{a^۲ + b^۲}}\right)$$

با شرط $b < ۰$.

۲۵. پاسخ. ریشه‌های معادله داده شده، چنین است:

$$x_k = \cos\frac{۲k\pi}{n} + i\sin\frac{۲k\pi}{n} =$$

$$= \left(\cos\frac{۲\pi}{n} + i\sin\frac{۲\pi}{n}\right)^k, \quad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱)$$

۲۶. داریم:

$$s = \sum_{k=۰}^{n-۱} x_k^p = \sum_{k=۰}^{n-۱} e^{kp}$$

که در آن: $\varepsilon=\cos\frac{۲\pi}{n}+i\sin\frac{۲\pi}{n}$، بنابراین

$$\sum_{k=۰}^{n-۱}x_k^p=۱+\varepsilon^p+\varepsilon^{۲p}+\ldots+\varepsilon^{(n-۱)p}$$

اما: $\varepsilon^p=\cos\frac{۲p\pi}{n}+i\sin\frac{۲\pi n}{n}$

واضح است که $\varepsilon^p=۱$ اگر و تنها اگر p بر n بخش‌پذیر باشد، در این حالت: $s=n$ و اگر $\varepsilon^p\neq ۱$، آن‌گاه

$$s=۱+\varepsilon^p+e^{۲p}+\ldots+\varepsilon^{(n-۱)}=\frac{\varepsilon^{np}-۱}{\varepsilon^p-۱}=۰$$

زیرا $\varepsilon^{np}=۱$. به‌این ترتیب، اگر n بر p بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت $\sum_{k=۰}^{n-۱}x_k^p=n$ و اگر p بر n بخش‌پذیر نباشد آن‌وقت $\sum_{k=۰}^{n-۱}x_k^p=۰$.

۲۷. داریم: $\sum_{k=۰}^{n-۱}|A_k|^۲=\sum_{k=۰}^{n-۱}A_k\cdot\overline{A}_k$

$$A_k\overline{A}_k=(x+y\varepsilon^k+z\varepsilon^{۲k}+\ldots+$$
$$+w\varepsilon^{(n-۱)k})(\overline{x}+\overline{y}\varepsilon^{-k}+\overline{z}\varepsilon^{-۲k}+\ldots+\overline{w}\varepsilon^{-(n-۱)}k=$$
$$=x\overline{x}+y\overline{y}+\ldots+w\overline{w}+$$
$$+x(\overline{y}\varepsilon^{-k}+\overline{z}\varepsilon^{-۲k}+\ldots+\overline{w}\varepsilon^{(n-۱)k}+y\varepsilon^k(\overline{x}+$$
$$+\overline{z}\varepsilon^{-۲k}+\ldots+\overline{w}\varepsilon^{(n-۱)k})+z\varepsilon^{۲k}(\overline{x}+\overline{y}\varepsilon^{-k}+\ldots+\overline{w}\varepsilon^{(n-۱)k})+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+w\varepsilon^{(n-۱)k}(\overline{x}+\overline{y}\varepsilon^{-k}+\ldots+\overline{u}\varepsilon^{-(n-۲)k})$$

بنابراین:

$$\sum_{k=۰}^{n-۱}A_k\overline{A}_k=n(|x|^۲+|y|^۲+\ldots+|w|^۲)+$$
$$+x\sum_{k=۰}^{n-۱}(\overline{y}\varepsilon^{-k}+\overline{z}\varepsilon^{-۲k}+\ldots+\overline{w}\varepsilon^{-(n-۱)k})+$$

$$+y\sum_{k=0}^{n-1}(\overline{x}\varepsilon^{k}+\overline{z}\varepsilon^{-k}+\ldots+\overline{w}e^{-(n-2)k})+\ldots+$$
$$+w\sum_{k=1}^{n-1}(\overline{x}\varepsilon^{(n-1)k}+\overline{y}\varepsilon^{(n-2)k}+\ldots+\overline{u}\varepsilon^{k})$$

اما اگر l بر n بخش‌پذیر نباشد، $\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{lk}=0$ (مساله ۲۶ را ببینید). بنابراین تمام مجموع سمت راست صفر است و درنتیجه:

$$|A_0|^2+|A_1|^2+\ldots+|A_{n-1}|^2=n\{|x|^2+|y|^2+\ldots+|w|^2\}$$

۲۸. الف) ریشه‌های $2n$ام عددِ یک را با x_s نشان می‌دهیم، درنتیجه:

$$x_s=\cos\frac{2s\pi}{n}+i\sin\frac{2s\pi}{n}\quad(s=1,2,\ldots,2n)$$

بنابراین:

$$x^{2n}-1=\prod_{s=1}^{2n}(x-x_s)=\prod_{s=1}^{n-1}(x-x_s)\prod_{s=n+1}^{2n-1}(x-x_s)(x^2-1)$$

از آن‌جاکه $x_n=-1$ و $x_{2n}=1$، اما $x_{2n-s}=\overline{x}_s$، درنتیجه:

$$x^{2n}-1=(x^2-1)\prod_{s=1}^{n-1}(x-x_s)(x-\overline{x}_s)=(x^2-1)\prod_{s=1}^{n-1}(x^2-2x\cos\frac{s\pi}{n}+1)$$

بقیه حالت‌ها به‌صورت مشابه ثابت می‌شود.

۲۹. الف) برابری را مانند مساله قبل به‌این صورت می‌نویسیم:

$$x^{2n-2}+x^{2n-4}+\ldots+x^2+1=\prod_{s=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{s\pi}{n}+1\right)$$

اگر در این اتحاد فرض کنیم $x=1$:

$$n=\prod_{s=1}^{n-1}\left(2-2\cos\frac{s\pi}{n}\right)=\prod_{s=1}^{n-1}4\sin^2\frac{s\pi}{n}=$$
$$=2^{2(n-1)}\sin^2\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{2\pi}{n}\ldots\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n}$$

بنابراین:

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{۲\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-۱)\pi}{n}=\frac{\sqrt{n}}{۲^{n-۱}}$$

ب) مانند بخش الف حل می‌شود.

۳۰. داریم: $x^n-۱=(x-۱)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)$

بنابراین: $x^{n-۱}+x^{n-۲}+\ldots+x+۱=(x-\lambda)(x-\beta)\ldots(x-\lambda)$

درنتیجه: $(۱-\lambda)(۱-\beta)\ldots(۱-\lambda)=n$

۳۱. معادله‌ای را تشکیل می‌دهیم که ریشه‌های آن عبارتند از:

$$x_۱-۱,\quad x_۲-۱,\ldots,\quad x_n-۱$$

این معادله به‌این صورت است:

$$(x+۱)^n+(x+۱)^{n-۱}+\ldots+(x+۱)+۱=۰$$

یعنی: $\frac{(x+۱)^{n+۱}-۱}{x+۱-۱}=\frac{(x+۱)^{n+۱}-۱}{x}=۰$

اکنون، معادله‌ای با این ریشه‌ها تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{۱}{x_۱-۱},\quad\frac{۱}{x_۲-۱},\ldots,\frac{۱}{x_n-۱}$$

که به‌این صورت است:

$$\frac{(\frac{۱}{x}+۱)^{n+۱}-۱}{\frac{۱}{x}}=\frac{(۱+x)^{n+۱}+x^{n+۱}}{x^n}=۰$$

این عبارت را، برحسب توان‌های x بسط می‌دهیم، حاصل می‌شود:

$$(n+۱)x^n+\frac{(n+۱)n}{۱\times۲}x^{n-۱}+\ldots=۰;$$

$$x^n+\frac{n}{۲}x^{n-۱}+\ldots=۰$$

مجموع ریشه‌های این معادله برابر است با $-\frac{n}{۲}$؛ درنتیجه:

$$\frac{۱}{x_۱ - ۱} + \frac{۱}{x_۲ - ۱} + \ldots + \frac{۱}{x_n - ۱} = -\frac{n}{۲}$$

۳۲. معادله زیر را (که t مجهول آن است) در نظر بگیرید:

$$\frac{x^۲}{t} + \frac{y^۲}{t - b^۲} + \frac{z^۲}{t - c^۲} = ۱$$

باتوجه به معادله‌های داده شده، این معادله سه ریشهٔ $\mu^۲$، $v^۲$ و $\rho^۲$ دارد. معادله اخیر را برحسب توان‌های t منظم می‌کنیم:

$$t(t - b^۲)(t - c^۲) - x^۲(t - b^۲)(t - c^۲) - y^۲(t - c^۲)t - z^۲(t - b^۲)t = ۰;$$
$$t^۳ + \alpha t^۲ + \ldots = ۰,$$

(که در آن: $\alpha = -b^۲ - c^۲ - x^۲ - y^۲ - z^۲$.)

اما همان‌طور که می‌دانیم، ریشه‌های این معادله $\mu^۲$ و $v^۲$ و $\rho^۲$ است. بنابراین باید داشته باشیم

$$\mu^۲ + v^۲ + \rho^۲ = b^۲ + c^۲ + x^۳ + y^۲ + z^۲$$

از آن‌جا $x^۲ + y^۲ + z^۲ = \mu^۲ + v^۲ + \rho^۲ - b^۲ - c^۲$.

۳۳. از آن‌جاکه $\cos\alpha + i\sin\alpha$ ریشهٔ معادلهٔ داده شده است، به‌ترتیب داریم:

$$\sum_{k=۰}^{n} p_k(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{n-k} = ۰ \quad (p_۰ = ۱);$$
$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n \sum_{k=۰}^{n} p_k(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-k} = ۰;$$
$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n \sum_{k=۰}^{n} p_k(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-k} = ۰;$$
$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-۱} = \cos\alpha - i\sin\alpha;$$
$$\sum_{k=۰}^{n} p_k(\cos\alpha - i\sin\alpha)^k = ۰, \quad \sum_{k=۰}^{n} p_k(\cos\alpha k - i\sin\alpha k) = ۰$$

درنتیجه: $\sum_{k=0}^{n} p_k \sin k\alpha = p_1 \sin\alpha + p_2 \sin 2\alpha + \ldots + p_n \sin n\alpha$

۳۴. باتوجه به آن‌چه داده شده‌است، اتحاد زیر را داریم:

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = (x-a)(x-b)\ldots(x-k)$$

به‌جای x، i و سپس $-i$ را قرار می‌دهیم. با انجام ضرب‌ها، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

۳۵. دو معادله را از هم کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(p-p')x + (q-q') = 0 \qquad (1)$$

معادلهٔ اول را در q' و معادله دوم را در q ضرب می‌کنیم و آن‌ها را از هم کم می‌کنیم:

$$x^2(q'-q) + x(pq'-qp') = 0;$$
$$x^2(q'-q) + pq' - qp' = 0 \qquad (2)$$

اکنون، x را بین معادلهٔ (۱) و (۲) حذف می‌کنیم، جواب لازم به‌دست می‌آید

۳۶. ریشه‌های معادلهٔ $x^7 = 1$، چنین‌اند.

$$\cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 6)$$

بنابراین، ریشه‌های معادلهٔ

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \qquad (*)$$

به‌صورت $x_k = \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}$، $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ درمی‌آیند.

اگر فرض کنیم $x + \frac{1}{x} = y$، به‌دست می‌آید $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ و $x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$.

معادلهٔ $(*)$ را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

و روشن است که:

$$x_1 = \overline{x}_6, \quad x_2 = \overline{x}_5, \quad x_3 = \overline{x}_4, \quad x_k + \frac{1}{x_k} = x_k + \overline{x}_k = 2\cos\frac{2k\pi}{7}$$

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $2\cos\frac{2\pi}{7}$، $2\cos\frac{4\pi}{7}$ و $2\cos\frac{8\pi}{7}$، ریشه‌های این معادله‌اند:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$$

اکنون، معادله‌ای با ریشه‌های زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}}, \quad \sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{7}}, \quad \sqrt[3]{2\cos\frac{8\pi}{7}}$$

اگر ریشه‌های یک معادله درجه سوم به‌صورت

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

برابر α، β و γ باشند، آن‌وقت $\alpha\beta\gamma = c$ و $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = l$ و $\alpha + \beta + \gamma = a$
فرض کنید معادله را ریشه‌های $\sqrt[3]{\alpha}$ و $\sqrt[3]{\beta}$ و $\sqrt[3]{\gamma}$ چنین باشد:

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

در این صورت:

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\gamma} = A \\ &\sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{\gamma} + \sqrt[3]{\beta}\sqrt[3]{\gamma} = B, \quad \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} = C \end{aligned}$$

از این اتحاد استفاده می‌کنیم:

$$(m+n+p)^3 = m^3 + p^3 + q^3 + 3(m+p+q)(mp+mq+pg) - 3mpq;$$

در این‌جا به‌جای m و p و q نخست $\sqrt[3]{\alpha}$ و $\sqrt[3]{\beta}$ و $\sqrt[3]{\gamma}$ و سپس $\sqrt[3]{\alpha\beta}$ و $\sqrt[3]{\alpha\gamma}$ و $\sqrt[3]{\beta\gamma}$ را قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$A^3 = a + 3AB - 3C, \quad B^3 = b + 3BCA - 3C^2$$

در این حالت $a = -۱$، $b = -۲$، $c = ۱$ و $C = ۱$. بنابراین:

$$A^۳ = ۳AB - ۴, \quad B^۳ = ۳AB - ۵$$

این معادله‌ها را ضرب و فرض می‌کنیم: $AB = z$، نتیجه می‌شود:

$$z^۳ - ۹z^۲ + ۲۷z - ۲۰ = ۰, \quad (z-۳)^۳ + ۷ = ۰, \quad z = ۳ - \sqrt[۳]{۷}$$

اما: $A^۳ = ۳z - ۴ = ۵ - ۳\sqrt[۳]{۷}$ و $A = \sqrt[۳]{۵ - ۳\sqrt[۳]{۷}}$، بنابراین درحقیقت:

$$\sqrt[۳]{\alpha} + \sqrt[۳]{\beta} + \sqrt[۳]{\gamma} = \sqrt[۳]{۲\cos\frac{۲a}{۷}} + \sqrt[۳]{۲\cos\frac{۴\pi}{۷}} + \sqrt[۳]{۲\cos\frac{۸\pi}{۷}} = \sqrt[۳]{۵ - ۳\sqrt[۳]{۷}}$$

۳۷. از آن‌جا که بنا به‌فرض $a + b + c = ۰$ می‌توان a و b و c را ریشه‌های معادلهٔ

$$x^۳ + px + q = ۰$$

در نظر گرفت که در آن: $q = -abc$ و $p = ab + ac + bc$ داریم:

$$(a + b + c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲(ab + ac + bc)$$

یعنی: $s_۲ = -۲p$ در معادله به‌ترتیب $x = a$ و $x = b$ و $x = c$ قرار می‌دهیم، به این برابری می‌رسیم:

$$a^۳ + pa + q = ۰, \quad b^۳ + pb + q = ۰, \quad c^۳ + pc + q = ۰$$

از مجموع این برابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$s_۳ + ps_۱ + ۳q = ۰$$

اما از آن‌جاکه $s_۱ = a + b + c = ۰$، داریم: $s_۳ = -۳q$.

دو طرف معادله اصلی را در x^k ضرب می‌کنیم و x را، به‌ترتیب، برابر a، b و c قرار می‌دهیم. از مجموع برابری‌های حاصل، به‌دست می‌آید:

$$s_{k+۳} = -ps_{k+۱} - qs_k$$

که اگر k را، به‌ترتیب، برابر ۱، ۲، ۳ و ۴ قرار دهیم، نتیجه مشود.

$$s_۴ = ۲p^۲, \quad s_۵ = ۵pq, \quad s_۶ = -۲p^۳ + ۳q^۲, \quad s_۷ = -۷p^۲q$$

با استفاده از این رابطه‌ها، به‌سادگی شش دستور اول ثابت می‌شود. دستور آخر، نیز به‌سادگی به‌دست می‌آید.

۳۸. داریم: $x^۲ - u^۲ = v^۲ - y^۲$ و $x - u = v - y$

برابری دوم را می‌توان به این صورت نوشت:

$$(x-u)(x+u) - (v-y)(v+y) = ۰ = ۰$$

از آن‌جاکه $x - u = v - y$، برابری اخیر، به‌این صورت درمی‌آید:

$$(x-u)[x+u-(v+y)] = ۰ = ۰$$

که از آن نتیجه می‌شود:

الف) $x - u = ۰, v - y = ۰, x = u, y = v$

ب) $(x+u) - (v-y) = ۰, (x-u) - (v-y) = ۰, x = v, y = u$

درنتیجه $x^n + y^n = u^n + v^n$

اکنون، حالت دوم را در نظر می‌گیریم. فرض کنید x, y, z ریشه‌های معادله درجه سوم

$$\alpha^۳ + p\alpha^۲ + q\alpha + r = ۰$$

باشند، ثابت می‌کنیم، در این صورت، u, v, t ریشه‌های این معادله هستند. داریم:

$$x + y + z = -p, \quad xy + xz + yz = q, \quad xyz = -r$$

بنابراین، برای اثبات این مطلب که u, v, t ریشه‌های این معادله هستند (که ریشه‌ها x و y و z هستند) کافی است ثابت کنیم

$$u + v + t = x + y + z, uv + ut + vt = xy + xz + yz, uvt = xyz$$

بنابه فرض، برابری اول از این برابری‌ها درست است. برابری دوم بلافاصله از اتحاد

$$۲(xy + xz + yz) = (x + y + z)^۲ - (x^۲ + y^۲ + z^۲)$$

و از شرط $x^۲ + y^۲ + z^۲ = u^۲ + v^۲ + t^۲$، نتیجه می‌شود.

به‌همین ترتیب، برابری سوم از اتحاد

$$۳xyz = x^۳ + y^۳ + z^۳ + ۳(x+y+z)(xy+xz+yz) - (x+y+z)^۳$$

و شرط $x^۳ + y^۳ + z^۳ = u^۳ + v^۳ + t^۳$، به‌دست می‌آید.

بنابراین t, v, u نیز مانند x, y, x ریشه‌های یک معادلهٔ درجه سوم هستند. یعنی، یکی از این شش حالت پیش می‌آید:

u	v	t
x	y	z
y	x	z
x	z	y
y	z	x
z	x	y
x	y	x

روش است که، در همهٔ حالت‌ها، داریم

$$x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + t^n$$

۳۹. سه‌جمله‌ای اول را به توان دو می‌رسانیم:

$$A^۲ = (x_۱^۲ + ۲x_۲x_۳) + (x_۳^۲ + ۲x_۱x_۲)\varepsilon + (x_۲^۲ + ۲x_۱x_۳)\varepsilon;$$
$$A^۳ = (x_۱^۳ + x_۲^۳ + x_۳^۳ + ۶x_۱x_۲x_۳) + (۳x_۱^۲x_۲ + ۳x_۲^۲x_۱ + ۳x_۲^۲x_۳)\varepsilon +$$
$$+(۳x_۱^۲x_۳ + ۳x_۲^۲x_۱ + ۳x_۳^۲x_۱ + ۳x_۳^۲x_۲)\varepsilon^۲$$

فرض می‌کنیم:

$$\alpha = x_۱^۲x_۲ + x_۲^۲x_۳ + x_۳^۲x_۱, \quad \beta = x_۱x_۲^۲ + x_۲x_۳^۲ + x_۳x_۱^۲$$

از آن‌جا

$$x_۱^۳ + x_۲^۳ + x_۳^۳ = -(px_۱ + q) - (px_۲ + q) - (px_۳ + q) = -۳q$$

زیرا $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ و $x_1x_1x_3 = -q$. بنابراین

$$A^3 = -9q + 3\alpha\varepsilon + 3\beta\varepsilon^2$$

با جای‌گذاری x_2 و x_3، به‌دست می‌آوریم:

$$\beta^3 = -9q + 3\alpha\varepsilon^2 + 3\beta\varepsilon;$$
$$A^3 + B^3 = -18q - 3\alpha - 3\beta = -27q$$

زیرا:

$$\alpha+\beta = x_1x_2(x_1+x_2)+x_2x_3(x_2+x_3)+x_3x_1(x_3+x_1) = -3x_1x_2x_3 = 3q$$

به‌همین ترتیب به‌دست می‌آید: $A^3 \times B^3 = -27p^3$

باید توجه داشت که:

$$\alpha\beta = 3x_1^2x_2^2x_3^2 + (x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_2^3x_3^3) + x_1^4x_2x_3 + x_2^4x_1x_3 +$$
$$+x_3^4x_2x_1 = 3q^2 + x_1^3x_2^3x_3^3\left(\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \frac{1}{x_3^3}\right) + x_1x_2x_3(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3);$$
$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \frac{1}{x_3^3} = -\frac{3}{q} - \frac{p^3}{q^3}$$

۴۰. فرض کنیم: $a + b = c + d = p$، در این صورت

$$(x^2 + px + ab)(x^2 + px + cd) = m;$$
$$\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + ab - \frac{p^2}{4}\right]\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + cd - \frac{p^2}{4}\right] = m$$

اگر فرض کنیم $y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$، آن‌گاه معادله به‌این صورت درمی‌آید:

$$\left(y + ab - \frac{p^2}{4}\right)\left(y + cd - \frac{p^2}{4}\right) = m$$

یعنی:

$$y^۲+\left(ab+cd-\frac{p^۲}{۲}\right)y+\left(ab-\frac{p^۲}{۴}\right)\left(cd-\frac{p^۲}{۴}\right)-m=۰$$

تنها حل این معادلهٔ درجه دوم باقی می‌ماند.

۴۱. فرض می‌کنیم: $x=y-\frac{a+b}{۲}$، در این صورت

$$x+a=y+\frac{a-b}{۲},\quad x+b=y-\frac{a-b}{۲}$$

معادله به این صورت درمی‌آید:

$$\left(y+\frac{a-b}{۲}\right)^۴+\left(y-\frac{a-b}{۲}\right)^۴=c;$$

$$\left(y+\frac{a-b}{۲}\right)^۴=y^۴+۴y^۳\frac{a-b}{۲}+$$

$$+۶y^۲\left(\frac{a-b}{۲}\right)^۲+۴y\left(\frac{a-b}{۲}\right)^۳+\left(\frac{a-b}{۲}\right)^۴$$

بنابراین، معادله را می‌توان این‌طور نوشت:

$$y^۴+۶\left(\frac{a-b}{۲}\right)^۲y^۲+\left(\frac{a-b}{۲}\right)^۴=\frac{c}{۲}$$

مساله منجر به حل یک معادله دو مجذوری می‌شود.

۴۲. برای سادگی کار، فرض می‌کنیم $a+b+c=p$ و $x+p=y$؛ داریم:
بنابراین: $(y-a)(y-b)(y-c)p-abc(y-p)=۰$ بنابراین:

$$p\{y^۳-(a+b+c)y^۲+(ab+ac+bc)y\}-abcy=۰;$$

$$y\{(a+b+c)y^۲-(a+b+c)^۲y+(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc\}=۰$$

از این‌رو، برابری y سه مقدار به‌دست می‌آید، یکی از این مقدارها صفر است. دو مقدار دیگر به‌عنوان ریشه‌های یک معادلهٔ دومجذوری به‌دست می‌آید. آن‌گاه به‌سادگی مقدارهای متناظر x محاسبه می‌شود.

۴۳. معادله را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$(x+a)^۳ - ۳bc(x+a) + b^۳ + c^۳ = ۰$$

و فرض می‌کنیم: $x + a = y$. معادله به‌این صورت درمی‌آید:

$$y^۳ - ۳bcy + b^۳ + c^۳ = ۰$$

اما می‌دانیم (مساله ۲۰، فصل ۱) که:

$$y^۳ + b^۳ + c^۳ - ۳bcy = (y+b+c)(y^۲ + b^۲ + c^۲ - yb - yc - bc)$$

درنتیجه: یکی از ریشه‌های معادله برابر $-b-c$ خواهد بود، دو ریشهٔ دیگر با حل معادله دومجذوری به‌دست می‌آید. و سپس، مقدارهای متناظر x پیدا می‌شود.

۴۴. معادله شامل پنج ضریب e, d, c, b, a است، که بین آن‌ها دو رابطه وجود دارد. بنابراین سه ضریب، اختیاری باقی می‌ماند. داریم:

$$a = c + d, \quad e = b + c$$

و معادله به‌این صورت درمی‌آید:

$$(c+d)x^۴ + bx^۳ + cx^۲ + dx + (b+c) = ۰;$$
$$c(x^۴ + x^۲ + ۱) + dx(x^۳ + ۱) + b(x^۳ + ۱) = ۰$$

اما $x^۳ + ۱ = (x+۱)(x^۲ - x + ۱)$ و

$$x^۴+x^۲+۱ = (x^۴+۲x^۲+۱)-x^۲ = (x^۲+۱)^۲-x^۲ = (x^۲+x+۱)(x^۲-x+۱)$$

اکنون، معادله را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$(x^۲ - x + ۱)\{c(x^۲ + x + ۱) + dx(x+۱) + b(x+۱)\} = ۰$$

اگر عامل اول را برابر صفر قرار دهیم، حاصل می‌شود:

$$x = \frac{۱}{۲} \pm i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

دو ریشهٔ دیگر، با حل معادله درجه دوم پیدا می‌شود.

۴۵. این اتحاد، روشن است:

$$(a+b+x)^3 = a^3 + b^3 + x^3 + 3a^2(b+x) +$$
$$+3b^2(a+x) + 3x^2(a+b) + 6abx$$

که با استفاده از آن، معادله به‌این صورت تبدیل می‌شود:

$$x^3 - (a+b)x^2 - (a-b)^2x + (a-b)^2(a+b) = 0;$$
$$x^2(x-a-b) - (a-b)^2(x-a-b) = 0;$$
$$(x-a-b)[x^2 - (a-b)^2] = 0;$$
$$(x-a-b)(x+a-b)(x-a+b) = 0$$

بنابراین، معادله داده شده، سه ریشه دارد:

$$x = a+b, \quad x = a-b, \quad x = b-a$$

۴۶. معادله را به‌این صورت می‌نویسیم: به‌ترتیب تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{ax^2}{(a+x)^2} - \frac{2ax^2}{a+x} = m^2 - \frac{2ax^2}{a+x};$$
$$\left(x - \frac{ax}{a+x}\right)^2 = m^2 - \frac{2ax^2}{a+x};$$
$$\frac{x^4}{(a+x)^2} = m^2 - \frac{2ax^2}{a+x}$$

اگر فرض کنیم: $y = \frac{x^2}{a+x}$، در آن صورت معادله به‌این صورت درمی‌آید:

$$y^2 + 2ay - m^2 = 0$$

که از آن y و به‌دنبال آن x به‌دست می‌آید. برای y این مقدارها به‌دست می‌آید:

$$y = -a \pm \sqrt{a^2 + m^2} \qquad (1)$$

و برای مقدارهای متناظر x، از این برابری استفاده می‌کنیم:

$$x = \frac{y}{۲} \pm \sqrt{\frac{y^۲}{۴} + ay} \qquad (۲)$$

در برابری (۱)، علامت مثبت را در نظر می‌گیریم. در این حالت، مقدار y بزرگتر از صفر خواهد بود. از برابری (۲)، مقدارهای متناظر x را به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم x دارای دو مقدار است، یکی مثبت و دیگری منفی. از این رو، معادله همیشه دست‌کم دو ریشهٔ حقیقی دارد، مثبت و منفی. حالتی را در نظر می‌گیریم که در برابری (۱)، علامت منفی در نظر گرفته شد. مقدار y منفی است و برای حقیقی بودن x، لازم و کافی است که $y^۲ + ۴ay \geq ۰$. و درنتیجه، باید

$$y + ۴a \leq ۰ \Rightarrow a - \sqrt{a^۲ + m^۲} + ۴a \leq ۰;\ m^۲ \geq ۸a^۲$$

با برقراری این شرط، تمام چهار ریشهٔ حقیقی خواهند بود. از آن‌جا که $ay > ۰$، داریم:

$$\left|\sqrt{\frac{y^۲}{۴} + ay}\right| < \left|\frac{y}{۲}\right|$$

و درنتیجه، هر دو ریشهٔ حقیقی که از برابری (۱) با در نظر گرفتن علامت منفی به‌دست می‌آیند، منفی خواهند بود. بنابراین، اگر تمام چهار ریشه حقیقی باشند، آن‌گاه یکی از آن‌ها مثبت است و بقیه منفی.

۴۷. برای سادگی قرار دهید: $\frac{۵x^۴ + ۱۰x^۲ + ۱}{x^۴ + ۱۰x^۲ + ۵} = f(x)$، در این‌صورت، معادله چنین می‌شود:

$$f(x) \cdot f(a) = ax$$

علاوه بر این داریم:

$$x - f(x) = \frac{(x-۱)^۵}{x^۴ + ۱۰x^۲ + ۵}, \quad x + f(x) = \frac{(x+۱)^۵}{x^۴ + ۱۰x^۲ + ۵}$$

معادلهٔ اول را بر معادله دوم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x - f(x)}{x + f(x)} = \left(\frac{x-۱}{x+۱}\right)^۵ \qquad (*)$$

فرض می‌کنیم: $b=\frac{a-۱}{a+۱}$ و $y=\frac{x-۱}{x+۱}$. از معادلهٔ (*) به‌دست می‌آید:

$$x-f(x)=y^۵x+y^۵f(x),\quad x(۱-y^۵)=f(x)(۱+y^۵);$$
$$\frac{f(x)}{x}=\frac{۱-y^۵}{۱+y^۵}$$

به‌همین ترتیب $\frac{f(a)}{a}=\frac{۱+b^۵}{۱-b^۵}$.

اکنون معادله را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$\frac{۱-y^۵}{۱+y^۵}=\frac{۱+b^۵}{۱-b^۵}\quad (y^۵=-b^۵)$$

معادله اخیر، پنج ریشه دارد، یعنی:

$$y_k=-b\varepsilon^k\quad (k=۰,۱,۲,۳,۴);$$
$$\varepsilon=\cos\frac{۲\pi}{۵}+i\sin\frac{۲\pi}{۵}$$

اما $x=\frac{۱+y}{۱-y}$، درنتیجه:

$$x_k=\frac{۱+y_k}{۱-y_k}=\frac{۱-b\varepsilon^k}{۱+b\varepsilon^k}=\frac{(a+۱)-(a-۱)\varepsilon^k}{(a+۱)+(a-۱)\varepsilon^k}$$

علاوه بر این:

$$x_k=\frac{(a+۱)\varepsilon^{\frac{-k}{۲}}-(a-۱)\varepsilon^{\frac{k}{۲}}}{(a+۱)\varepsilon^{\frac{-k}{۲}}+(a-۱)\varepsilon^{\frac{k}{۲}}}=\frac{a(\varepsilon^{\frac{-k}{۲}}-\varepsilon^{\frac{k}{۲}})+\varepsilon^{\frac{-k}{۲}}+\varepsilon^{\frac{k}{۲}}}{a(\varepsilon^{\frac{-k}{۲}}+\varepsilon^{\frac{k}{۲}})+\varepsilon^{\frac{-k}{۲}}-\varepsilon^{\frac{k}{۲}}}=$$
$$=\frac{\cos\frac{\pi k}{۵}-ia\sin\frac{\pi k}{۵}}{a\cos\frac{\pi k}{۵}-i\sin\frac{\pi k}{۵}}$$

در حالت خاص، به‌ازای $k=۰$، جواب عبارت است از:

$$x_۰=\frac{۱}{a}$$

۴۸. سمت چپ معادله را به‌این صورت تبدیل می‌کنیم. مجموع سمت چپ برابری را با s_m نمایش می‌دهیم:

$$s_1 = 1 + \frac{a_1}{x-a_1} + \frac{a_2 x}{(x-a_1)(x-a_2)} = \frac{x^2}{(x-a_1)(x-a_2)}$$

و ثابت می‌کنیم:

$$s_m = \frac{x^{2m}}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2m})}$$

فرض کنید، این برابری، به‌ازای $m=n$ درست باشد، ثابت می‌کنیم که به‌ازای $m=n+1$ نیز درست است. داریم:

$$s_{n+1} = \frac{x^{2n}}{(x-a_1)\dots(x-a_{2n})} + \frac{a_{2n+1}x^{2n}}{(x-a_1)\dots(x-a_{2n})(ax-a_{2n+1})} + \\ + \frac{a_{2n+2}x^{2n+1}}{(x-a_1)\dots(x-a_{2n+2})}$$

در عبارت سمت راست برابری مخرج مشترک می‌گیریم و تبدیل‌های لازم را انجام می‌دهیم:

$$s_{n+1} = \frac{x^{2n+2}}{(x-a_1)\dots(x-a_{2n+2})}$$

اکنون، معادله به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{x^{2m} - 2px^m + p^2}{(x-a_1)\dots(x-a_{2m})} = 0;\ (x^m-p)(x^m-p) = 0$$

معادلهٔ m ریشهٔ مضاعف دارد.

۴۹. الف) داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p,\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q,\ x_1x_2x_3 = -r$$

از برابری دوم به‌دست می‌آید:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1^2 = x_1(x_1 + x_2 + x_3) = q$$

که از آن: $x_1 = -\dfrac{q}{p}$ با استفاده از برابری اول، به‌دست می‌آید:

$$x_2 + x_3 = \frac{q - p^2}{p}$$

و از برابری سوم: $x_2 x_3 = \dfrac{rp}{q}$. تنها تشکیل معادلهٔ درجه دومی باقی می‌ماند که x_2 و x_3 در آن صدق کند.

ب) شبیه بخش الف حل کنید.

۵۰. الف) با استفاده از اتحاد مساله ۴ این فصل، دستگاه را می‌توان به این صورت نوشت:

$$(y + z + a)(y + z\varepsilon + a\varepsilon^2)(y + z\varepsilon^2 + a\varepsilon) = 0,$$
$$(z + x + b)(z + x\varepsilon + b\varepsilon^2)(z + x\varepsilon^2 + b\varepsilon) = 0,$$
$$(x + y + c)(z + y\varepsilon + c\varepsilon^2)(x + y\varepsilon^2 + c\varepsilon) = 0$$

برای تعیین همهٔ جواب‌های دستگاه، لازم است همهٔ ۲۷ ترکیب ممکن را در نظر بگیریم. بنابراین، ۲۷ دستگاه به‌دست می‌آید، هر دستگاه شامل سه معادلهٔ خطی با سه مجهول x و y و z است.

اگر هریک از این دستگاه‌ها را با یک عدد سه‌رقمی نشان دهیم که در آن مکانی که یک رقم معین در آن قرار دارد متناظر با شمارهٔ معادله و خود رقم متناظر با شمارهٔ عامل در این معادله باشد، آن‌گاه، ۲۷ دستگاه به‌این صورت به‌دست می‌آید:

۱۱۱, ۱۱۲, ۱۱۳, ۱۲۱, ۱۲۲, ۱۲۳, ۱۳۱, ۱۳۲, ۱۳۳,

۲۱۱, ۲۱۲, ۲۱۳, ۲۲۱, ۲۲۲, ۲۲۳, ۲۳۱, ۲۳۲, ۲۳۳,

۳۱۱, ۳۱۲, ۳۱۳, ۳۲۱, ۳۲۲, ۳۲۳, ۳۳۱, ۳۳۲, ۳۳۳

برای مثال، اکنون دستگاه ۲۱۳ را توضیح می‌دهیم: از معادله اول عامل دوم، از معادله دوم عامل اول و از معادله سوم عامل سوم در نظر گرفته شده‌است. بنابراین، دستگاه ۲۱۳ چنین است:

$$y + z\varepsilon + a\varepsilon^2 = 0,$$

$$z + x + b = 0,$$
$$x + y\varepsilon^2 + c\varepsilon = 0$$

چند دستگاه زیر را کشف رمز می‌کنیم:

$$\begin{array}{llll} y + z + a = 0, & z + x + b = 0, & x + y + c = 0, & (111) \\ y + z\varepsilon + a\varepsilon^2 = 0, & z + x\varepsilon^2 + b\varepsilon = 0, & x + y\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0 & (232) \\ y + z\varepsilon^2 + a\varepsilon = 0, & z + x\varepsilon^2 + b\varepsilon = 0, & x + y\varepsilon^2 + c\varepsilon = 0 & (333) \\ y + z + a = 0, & z + x\varepsilon + b\varepsilon^2 = 0, & x + y\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0 & (122) \end{array}$$

و غیره.

ب) داریم:

$$x^4 = xyzu + a,\ y^4 = xyzu + b,$$
$$z^4 = xyzu + c,\ u^4 = xyzu + d$$

این معادله‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $xyzu = t$، به‌دست می‌آید:

$$t^4 = (t+a)(t+b)(t+c)(t+d)$$

بنابراین، برای تعیین t، این معادله را داریم:

$$(a+b+c+d)t^3 + (ab+ac+\ldots)t^2 + (abc+acd+\ldots)t + abcd = 0$$

درنتیجه: $a + b + c + d = 0$، بنابراین، برای تعیین t، به یک معادله درجه دوم دست می‌یابیم. با معلوم بودن t، به‌سادگی x و y و z و u به‌دست می‌آیند.

۵۱. داریم:

$$1 + (1+x) + (1+x)^2 + \ldots + (1+x)^n = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{(1+x) - 1} =$$
$$= \frac{1}{x}\{\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k - 1\} = \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k x^{k-1}$$

که از آن نتیجه می‌شود، جملهٔ شامل x^k عبارت است از:

$$C_{n+1}^{k+1} x^k$$

۵۲. داریم:

$$(x+۱)^n = ۱ + C_n^۱ x + C_n^۲ x^۲ + \ldots + C_n^{s-۱} x^{s-۱} + C_n^s x^s + \ldots + x^n$$

با ضرب این چندجمله‌ای در سه‌جمله‌ای درجه دوم

$$(s-۲)x^۲ + nx - s$$

روشن می‌شود که ضریب x^s در حاصل‌ضرب برابر است با:

$$(s-۲)C_n^{s-۲} + nC_n^{s-۱} - sC_n^s$$

با انجام همهٔ تبدیل‌های لازم، این عبارت برابر می‌شود با:

$$nC_n^{s-۲}$$

۵۳. قرار دهید $x = ۱ + \alpha$ که در آن $\alpha > ۰$ (زیرا $x > ۱$). آن‌گاه داریم

$$px^q - qx^p - p + q = p(۱+\alpha)^q - q(۱+\alpha)^p - p + q =$$
$$= p\{۱ + q\alpha + \frac{q(q-۱)}{۱ \times ۲}\alpha^۲ + \ldots\} - q\{۱ + p\alpha + \frac{p(p-۱)}{۱ \times ۲}\alpha^۲ +$$
$$+ \ldots\} - p + q = (pc_q^۲ - qc_p^۲)\alpha^۲ + (pc_q^۳ - qc_p^۳)\alpha^۳ + \ldots$$

از آن‌جاکه $q > p$، می‌توان ثابت کرد، همهٔ جمله‌های این بسط مثبت هستند [ضریب α^k (اگر $k > p$) برابر pc_q^k خواهد بود]. بنابراین برای اثبات درستی ادعا، کافی است ثابت کنیم:

$$\Delta = pc_q^k - qc_p^k > ۰$$

با شرط $q > p$ و $k \leq p$ داریم

$$\Delta = p\frac{q(q-۱)\ldots(q-k+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times k} - q\frac{p(p-۱)\ldots(p-k+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \times k} =$$
$$= \frac{pq}{k!}\{(q-۱)(q-۲)\ldots(q-k+۱) -$$
$$-(p-۱)(p-۲) \times \ldots \times (p-k+۱) > ۰$$

چون $p - ۱ > q - ۱$، $p - ۲ > q - ۲$، ...

۵۴. فرض کنید بزرگترین جمله برابر

$$T_n = C_n^k x^{n-k} a^k$$

باشد. این جمله نباید کوچکتر از دو جمله قبل و بعد، یعنی $T_{k-۱}$ و $T_{k+۱}$ باشد. بنابراین، باید نابرابری‌ها را ثابت کنیم:

$$T_k \geq T_{k-۱}, \quad T_k \geq T_{k+۱}$$

که از آن: $\frac{k}{n-k+۱} \cdot \frac{x}{a} \geq ۱$ و $\frac{n-k}{k+۱} \cdot \frac{a}{x} \leq ۱$. از نابرابری اول، نتیجه می‌شود:

$$k \leq \frac{(n+۱)a}{x+a}$$

از نابرابری دوم حاصل می‌شود: $k \geq \frac{(n+۱)a}{x+a} - ۱$

نخست فرض کنید $\frac{(n+۱)a}{x+a}$ یک عدد درست باشد. در آن صورت $\frac{(n+۱)a}{x+a} - ۱$ نیز یک عدد درست است و چون k عددی درست است که در نابرابری‌های مضاعف

$$\frac{(n+۱)}{x+a} - ۱ \leq k \leq \frac{(n+۱)a}{x+a}$$

صدق می‌کند، می‌توان به دو مقدار

$$k = \frac{(n+۱)a}{x+a}, \quad k = \frac{(n+۱)a}{x+a} - ۱$$

رسید. در این حالت، دو جملهٔ قبل و بعد وجود دارد که برابر یکدیگر و درضمن بزرگتر از تمام جمله‌های دیگر هستند. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که $\frac{(n+۱)a}{x+a}$ عددی درست نباشد، در آن صورت داریم:

$$\frac{(n+۱)a}{x+a} = \left[\frac{(n+۱)a}{x+a}\right] + \theta$$

که در آن $۰ < \theta < ۱$ (برای نماد [ ] مساله ۳۵ از فصل ۱ را ببینید). در این حالت نابرابری‌ها به این صورت درمی‌آیند:

$$k \leq \left[\frac{(n+۱)a}{x+a}\right] + \theta, \quad k \geq \left[\frac{(n+۱)a}{x+a}\right] - (۱-\theta)$$

روشن است که در این حالت، تنها یک مقدار k وجود دارد که به‌ازای آن، نابرابری‌ها برقرار هستند، یعنی: $k = \left[\frac{(n+۱)a}{x+a}\right]$.

از این‌رو، وقتی $\frac{(n+۱)a}{x+a}$ یک عددی درست نیست، تنها T_k بزرگترین جمله است.

۵۵. فرض کنید i و m عددهایی درست مثبت باشند. داریم:

$$(x+۱)^m - x^m = mx^{m-۱}\frac{m(m-۱)}{۱\times ۲}x^{m-۲} + \ldots + mx + ۱$$

به‌جای x، $x+۱$ قرار دهید. نتیجه می‌شود:

$$(x+۲)^۲-(x+۱)^m = m(x+۱)^{m-۱}+\frac{m(m-۱)}{۱\times ۲}(x+۱)^{m-۲}+\ldots+m(x+۱)+۱$$

برابری قبل را از برابری اخیر کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(x+۲)^m - ۲(x+۱)^m + x^m = m(m-۱)x^{m-۲} + p_۱x^{m-۳} + \ldots$$

به‌همین ترتیب، حاصل می‌شود:

$$(x+۳)^m-۳(x+۲)^m+۳(x+۱)^m-x^m = m(m-۱)(m-۲)x^{m-۳}+p_۲x^{m-۴}+\ldots$$

با استفاده از روش استقرای ریاضی، می‌توان این اتحاد عمومی را ثابت کرد:

$$(x+i)^m - \frac{i}{۱}(x+i-۱)^m + \frac{i(i-۱)}{۱\times ۲}(a+i-۲)^m + \ldots + (-۱)^i x^m =$$
$$= m(m-۱)\ldots(m-i+۱)x^{m-i} + px^{m-i-۱} + \ldots$$

که از آن، به‌سادگی به‌ازای $i = m$ حاصل می‌شود:

$$(x+m)^m - \frac{m}{۱}(x+i-۱)^m + \ldots + (-۱)^m x^m = m!$$

اگر $i > m$، آن‌وقت

$$(x+i)^m - \frac{i}{۱}(x+۱-۱)^m + \frac{i(i-۱)}{۱\times ۲}(x+i-۲)^m + \ldots + (-۱)^i x^m = ۰$$

در برابری‌های آخر $x = ۰$ قرار می‌دهیم، اتحادهای مطلوب به‌دست می‌آید.

۵۶. داریم:

$$(x+ai)^n = x^n + C_n^۱ x^{n-۱} ai + C_n^۲ x^{n-۲} a^۲ i^۲ + C_n^۳ x^{n-۳} a^۳ i^۳ + \ldots =$$
$$= \{x^n - C_n^۲ x^{n-۲} a^۲ + C_n^۴ x^{n-۴} a^۴ - \ldots\} + i\{C_n^۱ x^{n-۱} a - C_n^۳ x^{n-۳} a^۳ + \ldots\}$$

باتوجه به کمیت‌های مزدوج آن، به‌دست می‌آید:

$$(x-ai)^n = \{x^n - C_n^۲ x^{n-۲} a^۲ + C_n^۴ x^{n-۴} a^۴ - \ldots\} -$$
$$-i\{C_n^۱ x^{n-۱} a - C_n^۳ x^{n-۳} a^۳ + \ldots\}$$

با ضرب جمله به جملهٔ این برابری‌ها، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

۵۷. الف) حاصل‌ضرب را به این صورت می‌نویسیم:

$$\sum_{s=۰}^{n} x^s \sum_{t=۰}^{n} x^t = \sum_{l=۰}^{۲n} A_l x^l$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$A_l = \sum_{\substack{s+t=l \\ ۰ \leq s \leq n \\ ۰ \leq t \leq n}} ۱$$

نخست، فرض می‌کنیم $l \leq n$ آن‌گاه s می‌تواند مقدارهای ۰، ۱، ۲، ...، l را اختیار کند و درنتیجه:

$$A_l = l + ۱ \quad (l < ۱)$$

اگر $n < l \leq ۲n$، آنگاه قرار دهید:

$$l = n + l'$$

که در آن $۱ \leq l' \leq n$ و $l' = l - n$.

در این حالت، s میتواند تنها این مقدارها را اختیار کند:

$$s = l', l' + ۱, \ldots, n$$

تعداد کل مقدارها برابر است با:

$$n - (l' - ۱) = n - (l - n - ۱) = ۲n - l + ۱$$

و از اینرو، $A_l = ۲n + ۱ - l$ اگر $n < l \leq ۲n$ بهسادگی دیده میشود که $A_{n-k} = A_{n+k} = n - k + ۱$.

در واقع، با بسط حاصلضرب، بلافاصله نتیجه میشود:

$$(۱ + x + x^۲ + \ldots + x^n)(۱ + x + x^۲ + \ldots + x^n) = ۱ + ۲x +$$
$$+ ۳x^۲ + \ldots + nx^{n-۱} + (n + ۱)x^n + nx^{n+۱} + \ldots + ۲x^{۲n-۱} + x^{۲n}$$

ب) در این حالت، داریم:

$$\sum_{s=۰}^{n} (-۱)^s x^s \sum_{t=۰}^{n} x^t = \sum_{l=۰}^{۲n} A_l x^l$$

بنابراین:

$$A_l = \sum (-۱)^s$$
$$l = s + t$$
$$۰ \leq s \leq n$$
$$۰ \leq t \leq n$$

بهطور جداگانه حالتهایی که در آنها $l \leq n$ و $l > n$ است، در نظر میگیریم، بهدست میآید:

اگر $l \leq n$، آنگاه $A_l = \frac{۱ + (-۱)^l}{۲}$

اگر $l > n$، آن‌گاه وقتی l فرد باشد $A_l = ۰$ و وقتی l زوج باشد $A_l = (-۱)^n$

بنابراین، برای هر l فرد، $A_l = ۰$، حاصل‌ضرب تنها شامل توان‌های زوج x است و اگر n زوج باشد، آن‌گاه همه ضریب‌های (توان‌های زوج) برابر ۱+ است، اگر n فرد باشد، آن‌گاه نصف ضریب‌ها برابر ۱+ است، اگر n فرد باشد، آن‌گاه نصف ضریب‌ها، برابر ۱+ و نصف دیگر برابر ۱− است.

$$A_۰ = A_۲ = \ldots = A_{n-۱} = +۱,$$
$$A_{n+۱} = A_{n+۳} = \ldots = A_{۲n} = -۱$$

ج) داریم:

$$\sum_{k=۰}^{n}(k+۱)x^k \sum_{s=۰}^{n}(s+۱)x^s = \sum_{l=۰}^{m} A_l x^l$$

از این‌رو:

$$A_l = \sum_{k+s=l}(k+۱)(s+۱) = \sum_{k+s=l}(ks+l+۱)$$

نخست، فرض می‌کنیم $l \leq n$، آن‌گاه k می‌تواند تنها این مقدارها را اختیار کنید:

$$۰, ۱, ۲, \ldots, l$$

مقدارهای متناظر s عبارت است از

$$l, l_۱, \ldots, ۰$$

بنابراین:

$$Al = \sum_{k=۰}^{l}[k(l-k)+l+۱] = l\sum_{k=۰}^{l} k - \sum_{k=۰}^{l} k^۲ + (l+۱)^۲ = \frac{(l+۱)(l+۲)(l+۳)}{۶}$$

زیرا می‌دانیم:

$$۱^۲ + ۲^۲ + \ldots + l^۲ = \frac{l(l+۱)(۲l+۱)}{۶}$$

(مساله ۲۵ فصل ۷ را ببینید).

آن‌گاه، فرض کنید $n < l \leq ۲n$ قرار دهید $l = n + l'$ که در آن $۱ \leq l' \leq n$. k می‌تواند تنها این مقدارها را اختیار کنید:

$$l, l' + ۱, \ldots, n$$

و درنتیجه:

$$A_l = \sum_{k+s=l} (ks + l + ۱) = \sum_{k=l-s} [k(l-k) + l + ۱] = [\sum_{k+s=l} \sum k - \\ - \sum_{k=l-n}^{n} k^۲ + (l+۱)(۲n - l + ۱) = \frac{(۲n - l + ۱)(l^۲ + ۲l + ۲)}{۲} + \\ + \frac{(l - n - ۱)(l - n)(۲l - ۲n - ۱)}{۶} - \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

د) مانند حالت قبل حل می‌شود.

۵۸. الف) داریم:

$$۱ + c_n^۱ + c_n^۲ + c_n^۳ + \ldots + c_n^{n-۱} + c_n^n = (۱ + ۱)^n = ۲^n$$
$$۱ - c_n^۱ + c_n^۲ - c_n^۳ + \ldots + (-۱)^n c_n^n = (۱ - ۱)^n = ۰$$

با جمع و سپس تفریق برابری‌ها، به اتحاد مورد نظر دست می‌یابیم.

ب) اگر توجه کنیم که $c_{۲n}^k = c_{۲n}^{۲n-k}$، آن‌وقت، این مساله هم مانند مساله ج منجر به مسالهٔ الف می‌شود.

۵۹. این اتحاد را در نظر بگیرید:

$$(۱ + x)^n = c_n^۰ + c_n^۱ x + c_n^۲ x^۲ + c_n^۳ x^۳ + \ldots + c_n^{n-۱} x^{n-۱} + c_n^n x^n$$

در این اتحاد، به‌جای x به‌ترتیب ۱ و ε و $\varepsilon^۲$ قرار دهید که در آن $۱ + \varepsilon + \varepsilon^۲ = ۰$، حاصل می‌شود:

$$۲^n = c_n^۰ + c_n^۱ + c_n^۲ + c_n^۳ + \ldots$$
$$(۱ + \varepsilon)^n = c_n^۰ + c_n^۱ \varepsilon + c_n^۲ \varepsilon^۲ + c_n^۳ \varepsilon^۳ + \ldots$$
$$(۱ + \varepsilon^۲) = c_n^۰ + c_n^۱ \varepsilon^۲ + c_n^۲ \varepsilon^۴ + c_n^۳ \varepsilon^۶ + \ldots$$

اما $\circ = \varepsilon^{۲k} + \varepsilon + ۱$ اگر k بر ۳ بخشپذیر نباشد و $۳ = \varepsilon^{۲k} + \varepsilon^k + ۱$ اگر k بر ۳ بخش‌پذیر باشد، درنتیجه:

$$۲^n + (۱ + \varepsilon)^n + (۱ + \varepsilon^۲)^n = ۳\{c_n^\circ + c_n^۳ + c_n^۶ + \dots\}$$

از آن‌جا که به‌جای ε می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = \cos \frac{۲\pi}{۳} + i \sin \frac{۲\pi}{۳}$$

داریم:

$$۱ + \varepsilon = -\varepsilon^۲ = -\cos \frac{۴\pi}{۳} - i \sin \frac{۴\pi}{۳} = \cos \frac{\pi}{۳} + i \sin \frac{\pi}{۳}$$

$$۱ + \varepsilon^۲ = -\varepsilon = -\cos \frac{۲\pi}{۳} - i \sin \frac{۲\pi}{۳} = \cos \frac{\pi}{۳} - i \sin \frac{\pi}{۳}$$

بنابراین:

$$۲^n + (۱ + \varepsilon)^n + (۱ + \varepsilon^۲)^n = ۲^n + ۲ \cos \frac{n\pi}{۳}$$

از این‌رو، به‌دست می‌آید:

$$c_n^\circ + c_n^۳ + c_n^۶ + \dots = \frac{۱}{۳}\left(۲^n + ۲ \cos \frac{n\pi}{۳}\right)$$

دو برابری دیگر باتوجه به مجموع‌های

$$۲^n + \varepsilon(۱ + \varepsilon)^n + \varepsilon^۲(۱ + \varepsilon^۲)^n$$

$$۲^n + \varepsilon^۲(۱ + \varepsilon)^n + \varepsilon(۱ + \varepsilon^۲)^n$$

به‌صورت مشابه محاسبه می‌شوند.

۶۰. جواب این مساله مشابه جواب مساله قبل است. $(۱ + i)^n$ را در نظر بگیرید.

۶۱. از آنجاکه: $c_k^۲ = \frac{k(k-۱)}{۱ \times ۲} = \frac{k^۲}{۲} - \frac{k}{۲}$، داریم:

$$۲c_k^۲ = k^۲ - k$$

درنتیجه $\sum_{k=2}^{n} k - \sum_{k=2}^{n} k^2 = \sum_{k=2}^{n} c_k^2$ ۲، که از آن، اتحاد بهدست میآید.

۶۲. فرض کنید $a_1 = c_n^k$ و $a_2 = c_n^{k+1}$ و $a_3 = c_n^{k+2}$ و $a_4 = c_n^{k+3}$. در آن صورت:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{n-k}{k+1}, \quad \frac{a_4}{a_3} = \frac{n-k-2}{k+3}, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{n-k-1}{k+2}$$

تنها باقی میماند اثبات این مطلب که:

$$\frac{1}{1+\frac{a_2}{a_1}} + \frac{1}{1+\frac{a_4}{a_3}} = \frac{2}{1+\frac{a_3}{a_2}}$$

۶۳. اگر برابری را بهاین صورت بنویسیم:

$$\frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{5!(n-5)!} + \ldots + \frac{n!}{(n-1)!1!} = 2^{n-1}$$

در آن صورت، مساله به اثبات این رابطه منجر میشود (مساله ۵۸ را ببینید):

$$c_n^1 + c_n^3 + \ldots + c_n^{n-1} = 2^{n-1}$$

۶۴. این برابری را در نظر بگیرید:

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n = \cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3} \quad (*)$$

علاوه بر این:

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \frac{(-1)^n}{2^n}(1 - i\sqrt{3})^n = \frac{(-1)^n}{2^n}\{1 + c_n^1(-i\sqrt{3}) +$$
$$+c_n^2(-i\sqrt{3})^2 + c_n^3(-i\sqrt{3})^3 + \ldots\} = \frac{(-1)^n}{2^n}\{1 - 3c_n^2 - i\sqrt{3}(c_n^1 - 3c_n^3 +$$
$$3^2c_n^5 - 3^3c_n^7 + \ldots)\}$$

ضریبهای i را در دو طرف برابری $(*)$، برابر قرار دهیم، بهدست میآید:

$$-\sqrt{3}(c_n^1 - 3c_n^3 + 3^2c_n^5 - 3^3c_n^7 + \ldots) = (-1)^n 2^n \sin\frac{2n\pi}{3}$$

بنابراین:

$$s = c_n^۱ - ۳c_n^۳ + ۳^۲c_n^۵ - ۳^۳c_n^۷ + \ldots = (-۱)^{n+۱}\frac{۲^n}{\sqrt{۳}}\sin\frac{۲n\pi}{۳}$$

که از آن، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$s = ۰$ اگر $n \equiv ۰ \pmod{۳}$

$s = ۲^{n-۱}$ اگر $n \equiv ۱$ یا $۲ \pmod{۶}$

$s = -۲^{n-۱}$ اگر $n \equiv ۴$ یا $۵ \pmod{۶}$

۶۵. می‌دانیم:

$$(۱+i)^n = ۱ + c_n^۱ i + c_n^۱ i^۲ + c_n^۳ i^۳ + \ldots$$

از این‌رو

$$(۱+i)^n = (۱ - c_n^۲ + c_n^۴ - c_n^۶ + \ldots) + i(c_n - c_n^۳ + c_n^۶ - \ldots)$$

اما

$$۱ + i = \sqrt{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴}\right)$$

بنابراین:

$$\sigma = ۱ - c_n^۲ + c_n^۴ - c_n^۶ + \ldots = ۲^{\frac{n}{۲}}\cos\frac{n\pi}{۴}$$

$$\sigma' = c_n^۱ - c_n^۳ + c_n^۵ - c_n^۷ + \ldots = ۲^{\frac{n}{۲}}\sin\frac{n\pi}{۴}$$

بنابراین اگر $n \equiv ۰ \pmod{۴}$ یعنی $n = ۴m$، در آن صورت:

$$\sigma = (-۱)^m ۲^{۲m}, \quad \sigma' = ۰$$

اگر $n \equiv ۱ \pmod{۴}$ یعنی $n = ۴m + ۱$، آن‌گاه

$$\sigma = \sigma' = (-۱)^m ۲^{۲m}$$

اگر $n \equiv ۳ (\mathrm{mod}\ ۴)$ یعنی $n = ۴m + ۳$، آن‌گاه

$$\sigma = (-۱)^{m+۱} ۲^{۲m+۱}, \quad \sigma' = (-۱)^m ۲^{۲m+۱}$$

سرانجام، اگر $n \equiv ۲ (\mathrm{mod}\ ۴)$ یعنی $n = ۴m + ۲$، آن‌گاه

$$\sigma = ۰, \quad \sigma' = (-۱)^m ۲^{۲m+۱}$$

۶۶. الف) مجموع داده شده را به این صورت می‌نویسیم:

$$s = ۱ \times c_n^۰ + ۲c_n^۱ + ۳c_n^۲ + \ldots + (n+۱)c_n^n = \sum_{k=۰}^{k=n} (k+۱)c_n^k$$

و یک متغیر جمع جدید معرفی می‌کنیم. قرار دهید $k = n - k'$، در آن صورت مجموع به این صورت نوشته می‌شود:

$$s = \sum_{k'=n}^{k'=۰} (n - k' + ۱)c_n^{n-k'} = \sum_{k=۰}^{k=n} (n - k + ۱)c_n^k = \sum_{k=۰}^{k=n} [n + ۲ - (k+۱)]c_n^k$$
$$= (n+۲) \sum_{k=۰}^{k=n} c_n^k - \sum_{k=۰}^{k=n} (k+۱)c_n^k = (n+۲)۲^n - s$$

درنتیجه:

$$۲s = (n+۲)۲^n, \quad s = (n+۲)۲^{n-۱}$$

این مجموع را می‌توان با روش اندک متفاوتی محاسبه کرد. آن را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$s = (c_n^۰ + c_n^۱ + \ldots + c_n^n) + (c_n^i + ۲c_n^۲ + \ldots + nc_n^n) = ۲^n + n +$$
$$+ ۲\frac{n(n-۱)}{۱ \times ۲} + ۳\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱ \times ۲ \times ۳} + \ldots +$$
$$+ n(n-۱) + n \times ۱ = ۲^n + n\{۱ + (n-۱) +$$
$$+ \frac{(n-۱)(n-۲)}{۱ \times ۲} + \ldots +$$
$$+ (n-۱) + ۱ = ۲^n + n\{c_{n-۱}^۰ + c_{n-۱}^۱ + \ldots + c_{n-۱}^{n-۱}\} =$$
$$= ۲^n + n۲^{n-۱} = ۲^{n-۱}(n+۲)$$

ب) داریم:

$$c_n^1 - 2c_n^2 + 3c_n^3 + \ldots + (-1)^{n-1}nc_n^n = n - 2\frac{n(n-1)}{1\times 2} +$$
$$+3\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3} + \ldots + (-1)^{n-1}n =$$
$$= n\{1 - \frac{n-1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1\times 2} + \ldots +$$
$$+(-1)^{n-2}\frac{n-1}{1} + (-1)^{n-1}\} = n(1-1)^{n-1} = 0$$

۶۷. مجموع را به این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}c_n^2 + \frac{1}{4}c_n^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}c_n^n = \frac{n}{2} - \frac{n(n-1)}{1\times 2\times 3}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3\times 4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} =$$
$$= \frac{1}{n+1}\{\frac{(n+1)n}{1\times 2} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1\times 2\times 3} +$$
$$+ \ldots + (-1)^{n-1}\} =$$
$$= \frac{1}{n+1}\{[1 - \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1\times 2} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1\times 2\times 3} + \ldots +$$
$$+(-1)^{n+1}] - 1 + \frac{n+1}{1}\} = \frac{1}{n+1}\{(1-1)^{n+1} + n\} = \frac{n}{n+1}$$

۶۸. الف) این چندجمله‌ای را در نظر بگیرید:

$$(1+x)^{n+1} = 1 + c_{n+1}^1 x + c_{n+1}^2 x^2 + \ldots + c_{n+1}^{n+1} x^{n+1}$$

بنابراین:

$$\frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1} = c_n^0 x + \frac{c_n^1}{2}x^2 + \frac{c_n^2}{3}x^3 + \ldots + \frac{c_n^n}{n+1}x^{n+1}$$

اگر به‌جای x مقدار یک را قرار دهیم، به اتحاد مورد نظر دست می‌یابیم.

ب) از اتحاد قبل به‌ازای $x = 2$ حاصل می‌شود.

۶۹. قرار دهید:

$$c_n^۱ - \frac{۱}{۲}c_n^۲ + \frac{۱}{۳}c_n^۳ + \ldots + \frac{(-۱)^{n-۱}}{n}c_n^n = u_n$$

در آن صورت داریم:

$$u_n - u_{n-۱} = \{n - \frac{۱}{۲}\frac{n(n-۱)}{۱\times۲} + \frac{۱}{۳}\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱\times۲\times۳} + \ldots\} -$$
$$-\{n-۱-\frac{۱}{۲}\frac{(n-۱)(n-۲)}{۱\times۲} + \frac{۱}{۳}\frac{(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۱\times۲\times۳} - \ldots\} =$$
$$\{n-(n-۱)\} - \frac{۱}{۲}\frac{n(n-۱)}{۱\times۲} - \frac{(n-۱)(n-۲)}{۱\times۲}\} +$$
$$+\frac{۱}{۳}\{\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱\times۲\times۳} - \frac{(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۱\times۲\times۳}\} + \ldots =$$
$$= ۱ - \frac{n-۱}{۱\times۲} + \frac{(n-۱)(n-۲)}{۱\times۲\times۳} + \ldots =$$
$$= \frac{۱}{n}\{n - \frac{n(n-۱)}{۱\times۲} + \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱\times۲\times۳} - \ldots\} =$$
$$= \frac{۱}{n}\{۱-(۱-۱)^n\} = \frac{۱}{n}$$

و درنتیجه: $u_n - u_{n-۱} = \frac{۱}{n}$، بنابراین، برابریهایی بهاین صورت بهدست میآید:

$$u_۲ - u_۱ = \frac{۱}{۲}$$
$$u_۳ - u_۲ = \frac{۱}{۳}$$
$$u_n - u_{n-۱} = \frac{۱}{n}$$

که از مجموع آنها بهدست میآید:

$$u_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \ldots + \frac{۱}{n}$$

۷۰. الف) می‌توان به‌این صورت عمل کرد. عبارت سمت چپ، ضریب x^n در چندجمله‌ای زیر است:

$$s = (1+x)^n + (1+x)^{n+1} + (1+x)^{n+2} + \ldots + (1+x)^{n+k}$$

با انجام تبدیل‌های لازم، داریم:

$$s = (1+x)^n\{1 + (1+x) + (1+x)^2 + \ldots + (1+x)^k\} =$$
$$= (1+x)^n \frac{(1+x)^{k+1} - 1}{x} = \frac{1}{x}\{(1+x)^{n+k+1} - (1+x)^n\}$$

ضریب x^{n+1} در چندجمله‌ای داخل کروشه برابر c_{n+k+1}^{n+1} است. بنابراین حکم اثبات می‌شود.

ب) عبارت سمت چپ، ضریب x^n در چندجمله‌ای زیر است:

$$x^n(1+x)^n - x^{n-1}(1+x)^n + x^{n-2}(1+x)^n +$$
$$+ \ldots + (-1)^h x^{n-h}(1+x)^n = (1+x)^n \times$$
$$\times\{x^n - x^{n-1} + \ldots + (-1)^h x^{n-h}\} = (1+x)^{n-1} + (-1)^h x^{n-h}\}$$

روشن است که ضریب x^n در عبارت اخیر عبارت است از:

$$(-1)^h c_{n-1}^h$$

۷۱. الف) این چندجمله‌ای‌ها را در نظر بگیرید:

$$(1+x)^n = \sum_{s=0}^{n} c_n^s x^s, \quad (1+x)^m = \sum_{t=0}^{m} c_m^t x^t$$

داریم:

$$(1+x)^n(1+x)^m = \sum_{s=0}^{n} c_n^s x^s \sum_{t=0}^{m} c_m^t x^t = (1+x)^{m+n} = \sum_{p=0}^{m+n} c_{m+n}^p x^p$$

که از آن، اتحاد مورد نظر به‌دست می‌آید.

ب) از قسمت الف نتیجه می‌شود.

۷۲. این حاصل‌ضرب را در نظر بگیرید:

$$\sum_{s=۰}^{n} c_n^s x^s \sum_{t=۰}^{n} c_n^t x^t = \sum_{l=۰}^{۲n} c_{۲n}^l x^l$$

بنابراین: $c_{۲n}^l = \sum_{s+t=l} c_n^s c_n^t$

درنتیجه:

$$c_{۲n}^{۲} = \sum_{s+t=n} c_n^s c_n^t = \sum_{s=۰}^{n} c_n^s c_n^{n-s} = \sum_{s=۰}^{n} (c_n^s)^{۲}$$

ب) در این حالت، این حاصل‌ضرب را در نظر بگیرید:

$$(۱+x)^m(۱-x)^m = (۱-x^{۲})^m \qquad (*)$$

درنتیجه:

$$\sum_{s=۰}^{m}(-۱)^s c_m^s x^s \sum_{t=۰}^{m} c_m^t x^t = \sum_{l=۰}^{m}(-۱)^l c_m^l x^{۲l}$$

بنابراین:

$$\sum_{s+t=۲l}(-۱)^s c_m^s c_m^t = (-۱)^l c_m^l$$

نخست فرض کنید m زوج باشد ($m = ۲n$). اگر $l = n$. آن‌گاه

$$\sum_{s+t=۲n}(-۱)^s c_{۲n}^s c_{۲n}^t = (-۱)^n c_{۲n}^n$$

از این‌رو:

$$\sum_{s=۰}^{۲n}(-۱)^s (c_{۲n}^s)^{۲} = (-۱)^n c_{۲n}^n$$

ج) اگر m فرد باشد، آن‌گاه قرار دهید $m = ۲n+۱$. ضریب $x^{۲n+۱}$ در سمت چپ برابری (*) برابر است با:

$$\sum_{s+t=۲n+۱}(-۱)^s c_{۲n+۱}^s c_{۲n+۱}^t = \sum_{s=۰}^{۲n+۱}(-۱)^s (c_{۲n+۱}^s)^{۲}$$

اما سمت راست برابری (*) نشان می‌دهد که این ضریب باید برابر صفر باشد (زیرا از بسط روشن است که توان‌های فرد x وجود ندارد). بنابراین:

$$\sum_{s=0}^{2n+1}(-1)^s(c_{2n+1}^s)^2=0$$

و برابری ج ثابت می‌شود.

د) دو برابری داریم:

$$c_n^1x+2c_n^2x^2+\ldots+nc_n^nx^n=nx(1+x)^{n-1};$$
$$c_n^0+c_n^1x+\ldots+c_n^nx^n=(1+x)^n$$

با ضریب جمله به جملهٔ آن‌ها، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{s=0}^{n}sc_n^sx^s\sum_{k=0}^{n}c_n^kx^k=nx(1+x)^{2n-1}$$

ضریب‌های x^n در دو طرف این برابری‌ها را برابر قرار می‌دهیم، اتحاد مورد نظر به‌دست می‌آید.

۷۳. از آن‌جا که حاصل‌ضرب $(x-a)(x-b)$ یک سه‌جمله‌ای درجه دوم است، در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر آن باقی‌مانده، به‌صورت یک چندجمله‌ای درجهٔ اول برحسب x به‌صورت $\alpha x+\beta$ است، بنابراین، این اتحاد وجود دارد:

$$f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+\alpha x+\beta$$

تنها باقی می‌ماند α و β را تعیین کنیم. با قرار دادن $x=a$ و بعد $x=b$ در این اتحاد، به‌دست می‌آید:

$$f(a)=\alpha a+\beta,$$
$$f(b)=\alpha b+\beta$$

اما می‌دانیم باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ برابر $f(a)$ است، بنابراین:

$$f(a)=A,\quad f(b)=B$$

بنابراین، برای تعیین α و β به دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی می‌رسیم:

$$\alpha a+\beta=A, \quad \alpha b+\beta=B$$

درنتیجه:

$$\alpha=\frac{۱}{a-b}(A-B), \quad \beta=\frac{\alpha B-bA}{a-b}$$

۷۴. با استدلالی شبیه مساله قبل، نتیجه می‌گیریم که باقی‌مانده به‌این صورت است:

$$\alpha x^{۲}+\beta x+\gamma$$

برای تعیین α و β و γ، این دستگاه را داریم:

$$\alpha a^{۲}+\beta a+\gamma=A$$
$$\alpha b^{۲}+\beta b+\gamma=B$$
$$\alpha c^{۲}+\beta c+\gamma=C$$

با تعیین α و β و γ می‌توان باقی‌مانده مطلوب را به این صورت تقارنی نمایش داد:

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}A+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}B+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}C$$

۷۵. پاسخ. باقی‌مانده برابر است با:

$$\frac{(x-x_{۲})(x-x_{۳})\ldots(x-x_m)}{(x_{۱}-x_{۲})(x_{۱}-x_{۳})\ldots(x_{۱}-x_m)}y_{۱}+$$
$$\frac{(x-x_{۱})(x-x_{۳})\ldots(x-x_m)}{(x_{۲}-x_{۱})(x_{۲}-x_{۳})\ldots(x_{۲}-x_m)}y_{۲}$$
$$+\ldots+\frac{(x-x_{۱})(x-x_{۲})\ldots(x-x_{m-۱})}{(x_m-x_{۱})(x_m-x_{۲})\ldots(x_m-x_{m-۱})}y_m$$

۷۶. پاسخ. چندجمله‌ای مطلوب (مساله قبل را ببینید) به‌این صورت است:

$$\frac{(x-a_{۲})(x-a_{۳})\ldots(x-a_m)}{(a_{۱}-a_{۲})(a_{۱}-a_{۳})\ldots(a_{۱}-a_m)}A_{۱}+$$
$$+\frac{(x-a_{۱})(x-a_{۳})\ldots(x-a_m)}{(a_{۲}-a_{۱})(a_{۲}-a_{۳})\ldots(a_{۲}-a_m)}A_{۲}+\ldots+$$
$$\frac{(x-a_{۱})(x-a_{۲})\ldots(x-a_{m-۱})}{(a_m-a_{۱})(a_m-a_{۲})\ldots(a_m-a_{m-۱})}A_m$$

۷۷. برابری داده شده بیان می‌کند که این دو چندجمله‌ای، اتحاد هستند. برای این منظور کافی است ثابت کنیم چندجمله‌ای

$$f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_m)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_m)}+$$
$$+f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_m)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_m)}+$$
$$+\dots+f(x_m)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_1)\dots(x_m-x_{m-1})}-f(x)$$

متحد با صفر است. از آن‌جا که درجهٔ این چندجمله‌ای برابر $m-1$ است، کافی است ثابت کنیم، این چندجمله‌ای به‌ازای m مقدار مختلف x برابر صفر می‌شود. در واقع، به‌سادگی بررسی می‌شود که این چندجمله‌ای به‌ازای

$$x=x_1,x_2,x_3,\dots,x_m$$

برابر صفر است.

۷۸. با برابر قرار دادن ضریب‌های x از مسالهٔ قبل به‌دست می‌آید.

۷۹. اگر در مسالهٔ قبل قرار دهیم:

$$f(x)=1,x,x^2,\dots,x^{m-2}$$

آن‌گاه ثابت می‌شود، اگر $0\le n<m-1$، آن‌گاه $s_n=0$. برای اثبات اتحاد

$$s_{m-1}=1$$

کافی است، در اتحاد مساله ۷۷، قرار دهیم: $f(x)=x^{m-1}$ و ضریب‌های x^{m-1} را در دو طرف اتحادی به‌دست می‌آید، برابر قرار دهیم. به‌ازای $n>m-1$ برای محاسبهٔ s_n، می‌توانیم به‌این صورت عمل کنیم. فرض کنید $x_1,x_2,\dots,x_n$ در معادلهٔ درجهٔ m

$$\alpha^m+p_1\alpha^{m-1}+p_2\alpha^{m-2}+\dots+p_{m-1}\alpha+p_m=0$$

صدق می‌کنند که در آن:

$$-p_1=x_1+x_2+\dots+x_m,$$

$$p_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{m-1}x_m,$$
$$-p_3 = x_1x_2x_3 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-1)^k p_k = x_1x_2\ldots x_k + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

دو طرف معادله را در α^k ضرب می‌کنیم:

$$\alpha^{m+k} + p_1\alpha^{m+k-1} + p_2\alpha^{m+k-2} + \ldots + p_{m-1}\alpha^{k+1} + p_m\alpha^k = 0$$

در این برابری به‌ترتیب

$$\alpha = x_1, x_2, \ldots, x_m$$

قرار می‌دهیم، از مجموع آن‌ها، حاصل می‌شود:

$$s_{m+k} + p_1s_{m+k-1} + p_2s_{m+k-2} + \ldots + p_{m-1}s_{k+1} + p_ms_k = 0$$

به‌ازای $k = 0$ داریم: $s_m + p_1s_{m-1} = 0$، درنتیجه

$$s_m = p_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$$

به‌ازای $k = 1$ به‌دست می‌آید:

$$s_{m+1} + p_1s_m + p_2s_{m-1} = 0$$

علاوه بر این:

$$s_{m+1} = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m)^2 - (x_1x_2 + \ldots + x_{m-1}x_m) =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots$$

یعنی s_{m+1} برابر مجموع حاصل‌ضرب‌های دوبه‌دوی x_1، x_2، ...، x_m است.

در این‌جا عامل‌ها می‌توانند برابر یا مخالف هم باشند. برای s_{m+2} و s_{m+3} و غیره نیز نتیجه‌های مشابهی به‌دست می‌آید. می‌توان همین نتیجه‌ها را با روش جالب دیگری (به نام روش گوس) به‌دست آورد. قرار دهید:

$$\frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)}=\alpha_1,$$
$$\frac{1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_m)}=\alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_{m-1})}=\alpha_m,$$

آن‌گاه داریم:

$$s_n=x_1^n\alpha_1+x_2^n\alpha_2+\ldots+x_m^n\alpha_m$$

این عبارت را تشکیل می‌دهیم:

$$p=\frac{\alpha_1}{1-x_1z}+\frac{\alpha_2}{1-x_2z}+\ldots+\frac{\alpha_m}{1-x_mz}\qquad(*)$$

با استفاده از دستور مربوط به تصاعد هندسی نزولی بی‌پایان و با این فرض که z طوری انتخاب شود که $|x_1z|<1$ و $|x_2z|<1$ و ... و $|x_mz|<1$ و بسط مجموع در یک رشته بی‌پایان به‌صورت

$$P=\alpha_1(1+x_1z+x_1^2z^2+x_1^3z^3+\ldots)+$$
$$+\alpha_2(1+x_2z+x_2^2z^2+x_2^3z^3+\ldots)+$$
$$+\ldots+\alpha_m(1+x_mz+x_m^2z^2+x_m^3z^3+\ldots)$$

یا

$$p=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)+(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_m\alpha_m)z+$$
$$+(x_1^2\alpha_1+x_2^2\alpha_2+\ldots+x_m^2\alpha_m)z^2+\ldots$$

یعنی

$$p=s_0+s_1z+s_2z^2+s_3z^3+\ldots$$

برای سادگی قرار دهید:

$$(۱ - x_۱ z)(۱ - x_۲ z)\dots(۱ - x_m z) = Q$$

Q را برحسب توان‌های z بسط می‌دهیم. می‌توان نوشت:

$$Q = ۱ - \sigma_۱ z + \sigma_۲ z^۲ + \dots \pm \sigma_m z^m$$

که در آن:

$$\sigma_۱ = x_۱ + x_۲ + \dots + x_m,$$
$$\sigma_۲ = x_۱ x_۲ + x_۱ x_۳ + \dots + x_m x_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

دو طرف $(*)$ را در $(۱ - x_۱ z)(۱ - x_۲ z) \times \dots \times (۱ - x_m z)$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$PQ = \alpha_۱(۱ - x_۲ z)(۱ - x_۳ z)\dots(۱ - x_m z) +$$
$$+\alpha_۲(۱ - x_۱ z)(۱ - x_۳ z)\dots(۱ - x_m z) +$$
$$+\alpha_۳(۱ - x_۱ z)(۱ - x_۲ z)\dots(۱ - x_m z) + \dots +$$
$$+\alpha_m(۱ - x_۱ z)(۱ - x_۲ z)\dots-(۱ - x_{m-۱} z)$$

بنابراین، حاصل‌ضرب PQ، یک چندجمله‌ای درجهٔ $(m - ۱)$ام برحسب z است، نشان می‌دهیم که به‌سادگی برابر $z^{m-۱}$ است، یعنی این اتحاد را داریم:

$$PQ = z^{m-۱}$$

در واقع، عبارت $PQ - z^{m-۱}$ به‌ازای

$$z = \frac{۱}{x_۱}, \frac{۱}{x_۲}, \dots, \frac{۱}{x_m}$$

صفر می‌شود. به‌ازای $z = \frac{۱}{x_۱}$ داریم:

$$\alpha_۱\left(۱ - \frac{x_۲}{x_۱}\right)\left(۱ - \frac{x_۳}{x_۱}\right)\dots\left(۱ - \frac{x_m}{x_۱}\right) - \frac{۱}{x_۱^{m-۱}} = \frac{۱}{x_۱^{m-۱}} - \frac{۱}{x_۱^{m-۱}} = ۰$$

به‌همین ترتیب نشان می‌دهیم که $PQ - z^{m-۱}$ به‌ازای

$$z = \frac{۱}{x_۲}, \ldots, \frac{۱}{x_m}$$

صفر می‌شود. اما اگر یک چندجمله‌ای درجهٔ $m - ۱$ به‌ازای m مقدار مختلف متغیر صفر شود، آن‌گاه متحد با صفر است. بنابراین $PQ - z^{m-۱} \equiv ۰$. درنتیجه:

$$\frac{z^{m-۱}}{Q} = p$$

یا

$$z^{m-۱}\frac{۱}{۱ - \sigma_۱ z + \sigma_۲ z^۲ - \sigma_۳ z^۳ + \ldots \pm \sigma_m z^m} =$$
$$= s_۰ + s_۱ z + \ldots + s_{m-۲} z^{m-۲} + s_{m-۱} z^{m-۱} x + \ldots$$

اگر سمت چپ را به‌صورت یک رشتهٔ بی‌پایان برحسب توان‌های z بسط دهیم، آن‌گاه این رشته تنها با یک جملهٔ شامل $z^{m-۱}$ آغاز می‌شود. بنابراین، ضریب‌های $z^۰, z^۱, \ldots, z^{m-۲}$ در سمت راست نیز باید برابر صفر باشد، یعنی:

$$s_۰ = s_۱ = s_۲ = \ldots = s_{m-۲} = ۰$$

علاوه بر این، به‌ازای $z^{m-۱}$ سمت چپ برابر یک است. درنتیجه:

$$s_{m-۱} = ۱$$

اکنون، برابری به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{z^{m-۱}}{۱ - \sigma_۱ z + \sigma_۲ z^۲ + \ldots \pm \sigma_m z^m} = z^{m-۱} + s_m z^m + s_{m+۱} z^{m+۱} + \ldots$$

با تقسیم دوطرف بر $z^{m-۱}$، حاصل می‌شود:

$$\frac{۱}{۱ - \sigma_۱ z + \sigma_۲ z^۲ - \sigma_۳ z^۳ + \ldots \pm \sigma_m z^m} = ۱ + s_m z + s_{m+۱} z^۲ + \ldots$$

یا

$$۱ = (۱ - \sigma_۱ z + \sigma_۲ z^۲ - \sigma_۳ z^۳ + \ldots \pm \sigma_m z^m)(۱ + s_m z + s_{m+۱} z^۲ + \ldots)$$

سمت راست را برحسب توان‌های z مرتب می‌کنیم و ضریب‌های این توان‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم (زیرا سمت چپ تنها شامل صفر است)، به‌دست می‌آید:

$$s_m - \sigma_۱ = ۰$$

$$\sigma_۲ - \sigma_۱ s_m + s_{m+۱} = ۰$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

به‌این ترتیب، امکانی برای محاسبهٔ $s_m, s_{m+۱}, s_{m+۲}, \ldots$ پیدا کرده‌ایم. با وجود این، برای تعیین ساختار کلی $s_{m+۱}$، این عبارت را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{۱}{Q} = \frac{۱}{۱ - x_۱ z} \cdot \frac{۱}{۱ - x_۲ z} \ldots \frac{۱}{۱ - x_m z} = \sum_{s=۰}^{\infty} x_۱^s z^s \sum_{s'=۰}^{\infty} x_۲^{s'} x^{s'} \ldots =$$
$$= \sum x_۱^s x_۲^{s'} x_۳^{s''} \ldots x^{s+s'+s''+\ldots}$$

اما، از طرف دیگر:

$$\frac{۱}{Q} = ۱ + s_m z + s_{m+۱} z^۲ + \ldots + s_{m+k} z^{k+۱} + \ldots$$

بنابراین، به‌دست می‌آید:

$$s_{m+k} = \sum_{s+s'+s''+\ldots=k+۱} x_۱^s x_۲^{s'} x_۳^{s''} \ldots$$

بنابراین، به نتیجهٔ نهایی دست می‌یابیم: s_{m+k} برابر مجموع حاصل‌ضرب‌های $k+۱$ کمیت برابر یا مخالف از کل $x_۱, x_۲, \ldots, x_m$ است. در حالت خاص:

$$s_{m+۱} = x_۱^۲ + x_۲^۲ + \ldots + x_n^۲ + x_۱ x_۲ +$$
$$+ x_۱ x_۳ + \ldots + x_۱ x_m + x_۲ x_۳ + \ldots + x_{m-۱} x x_m$$
$$s_{m+۲} = x_۱^۳ + x_۲^۳ + \ldots + x_m^۳ + x_۱^۲ x_۲ + \ldots + x_{m-۱}^۲ x_m + x_۱ x_۲ x_۳ + \ldots$$

۸۰. این نماد را می‌پذیریم:

$$s_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{x_1^n}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_m)} +$$
$$+\frac{x_2^n}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_m)} +$$
$$+\ldots+\frac{x_m^n}{(x_m - x_1)(x_m - x_2)\ldots(x_m - x_{m-1})}$$

داریم:

$$\frac{x_1^{-n}}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_m)} =$$
$$= \frac{x_1^{-n-m+2}}{x_1 x_2 \ldots x_m \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_1}\right)\ldots\left(\frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_1}\right)} =$$
$$= (-1)^{m-1}\frac{\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n+m-2}}{\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_m}\right)} \cdot \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_m}$$

بنابراین، روشن است که:

$$s_{-n}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{(-1)^{m-1}}{x_1 x_2 \ldots x_m} s_{n+m-2}\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_m}\right)$$

۸۱. درستی این ادعا از اتحاد مساله ۷۷ نتیجه می‌شود. همین اتحاد نتیجه می‌دهد:

$$A_1 = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_m)}$$
$$A_2 = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_m)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_m = \frac{f(x_m)}{(x_m - x_1)(x_m - x_2)\ldots(x_m - x_{m-1})}$$

۸۲. این عبارت را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{x_1}{\lambda - b_1} + \frac{x_2}{\lambda - b_2} + \ldots + \frac{x_n}{\lambda - b_n} = \frac{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)\ldots(\lambda - a_n)}{(\lambda - b_1)(\lambda - b_2)\ldots(\lambda - b_n)}$$

اگر همهٔ جملهها را به‌سمت چپ منتقل کنیم و مخرج مشترک بگیریم و آن‌گاه، مخرج مشترک حذف شود، در آن صورت سمت چپ یک چندجمله‌ای درجهٔ $n-1$ برحسب λ می‌شود.

باتوجه به وجود دستگاه معادله‌ها، این چندجمله‌ای به‌ازای n مقدار مختلف λ یعنی به‌ازای a_1، a_2، ...، a_n، صفر می‌شود. بنابراین، متحد با صفر است، و درنتیجه، برابری اصلی (*) نیز یک اتحاد است. اما در آن صورت، برابری (*)، نمایش بسط کسر زیر به کسرهای جزیی است:

$$\frac{(\lambda-b_1)(\lambda-b_2)\ldots(\lambda-b_n)-(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)\ldots(\lambda-a_n)}{(\lambda-b_1)(\lambda-b_2)\ldots(\lambda-b_n)}$$

بنابراین، مجهول‌های x_1، x_2 و ... و x_n با استفاده از دستورهای مساله قبل، به‌دست می‌آید، درنتیجه:

$$x_1=-\frac{(b_1-a_1)(b_1-a_2)\ldots(b_1-a_n)}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)\ldots(b_1-b_n)}$$
$$x_2=-\frac{(b_2-a_1)(b_2-a_2)\ldots(b_2-a_n)}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)\ldots(b_2-b_n)},\ldots$$

۸۳. با استفاده از نتیجهٔ مسالهٔ ۸۱ به‌سادگی به‌دست می‌آید.

۸۴. این کسر را در نظر بگیرید:

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)}$$

و روشن است که تفاضل

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)}-1$$

با مخرج مشترک گرفتن، کسری است که در آن، درجهٔ صورت یک واحد کمتر از درجهٔ مخرج است. این کسر را می‌توان به‌صورت کسرهای جزیی بسط داد:

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)}=1+\frac{A_1}{x-b_1}+\frac{A_2}{x-b_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-b_n}$$

دو طرف این برابری را در $x-b_1$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_2)(x-b_3)\ldots(x-b_n)}=$$
$$=x-b_1+A_1+\frac{A_2}{x-b_2}(x-b_1)+\ldots+\frac{A_n}{x-b_n}(x-b_1)$$

در این اتحاد می‌توان قرار داد: $x = b_۱$، در این صورت

$$A_۱ = \frac{(b_۱ - a_۱)(b_۱ - a_۲)\dots(b_۱ - a_n)}{(b_۱ - b_۲)(b_۱ - b_۳)\dots(b_۱ - b_n)}$$

عبارت‌های مشابهی برای $A_۲$، $A_۳$ و ... و A_n به‌دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$\frac{(x - a_۱)(x - a_۲)\dots(x - a_n)}{(x - b_۱)(x - b_۲)\dots(x - b_n)} = ۱ + \frac{(b_۱ - a_۱)(b_۱ - a_۲)\dots(b_۱ - a_n)}{(b_۱ - b_۲)(b_۱ - b_۳)\dots(b_۱ - b_n)} \times$$
$$\times \frac{۱}{x - b_۱} + \frac{(b_۲ - a_۱)(b_۲ - a_۲)\dots(b_۲ - a_n)}{(b_۲ - b_۱)(b_۲ - b_۳)\dots(b_۲ - b_n)} \times \frac{۱}{x - b_۲} + \dots +$$
$$+ \frac{(b_n - a_۱)(b_۲ - a_۲)\dots(b_n - a_n)}{(b_n - b_۱)(b_n - b_۲)\dots(b_n - b_{n-۱})} \times \frac{۱}{x - b_n}$$

که به‌ازای $x = ۰$، به اتحاد مطلوب دست می‌یابیم.

۸۵. مانند مسالهٔ قبل، به‌سادگی دیده می‌شود که:

$$\frac{(x + \beta)(x + ۲\beta)\dots(x + n\beta)}{(x - \beta)(x - ۲\beta)\dots(x - n\beta)} = ۱ + \sum_{r=۱}^{n} \frac{A_r}{x - r\beta}$$

که در آن:

$$A_r = \frac{(r\beta + \beta)(r\beta + ۲\beta)\dots(r\beta + n\beta)}{(r\beta - \beta)(r\beta - ۲\beta)\dots[r\beta - (r - ۱)\beta][r\beta - (r + ۱)\beta]\dots(r\beta - n\beta)}$$

تنها ساده کردن این ضریب باقی می‌ماند.

۸۶. داریم: $c_{k+۱} - c_k = \Delta c_k$ یعنی $c_{k+۱} = c_k + \Delta c_k$ و برابری الف به‌ازای $n = ۱$ برقرار است. با فرض درست بودن آن به‌ازای n، درستی آن را به‌ازای $n + ۱$ ثابت می‌کنیم. درحقیقت:

$$c_{k+n+۱} = c_{k+n} + \Delta c_{k+n} = (c_k + \frac{n}{۱}\Delta c_k + \frac{n(n - ۱)}{۱ \times ۲}\Delta^۲ c_k +$$
$$+ \frac{n(n - ۱)(n - ۲)}{۱ \times ۲ \times ۳}\Delta^۳ c_k + \dots + \Delta^n c_k) + \Delta(c_k + \frac{n}{۱}\Delta c_k + \frac{n(n - ۱)}{۱ \times ۲}\Delta^۲ c_k +$$
$$+ \dots + \Delta^n c_k = c_k + (\frac{n}{۱} + ۱)\Delta c_k + (\frac{n(n - ۱)}{۱ \times ۲} + \frac{n}{۱})\Delta^۲ c_k + \dots + \Delta^{n+۱} c_k =$$
$$= c_k + \frac{n + ۱}{۱}\Delta c_k + \frac{(n + ۱)n}{۱ \times ۲}\Delta^۲ c_k + \dots + \Delta^{n+۱} c_k$$

و اثبات کامل می‌شود.

برابری ب نیز به‌طور مشابه ثابت می‌شود. روشن است که به‌ازای $n = ۱$ درست است. فرض می‌کنیم به‌ازای n درست باشد، در این صورت

$$\Delta^{n+۱}c_k = \Delta c_{k+n} - \frac{n}{۱}\Delta c_{k+n-۱} + \frac{n(n-۱)}{۱\times ۲}\Delta c_{k+n-۲} - \ldots + (-۱)^n\Delta c_k$$
$$= (c_{k+n+۱} - c_{k+n}) - \frac{n}{۱}(c_{k+n} - c_{k+n-۱}) + \frac{n(n-۱)}{۱\times ۲}(c_{k+n-۱} - c_{k+n-۲})$$
$$+ \ldots + (-۱)^n(c_{k+۱} - c_k) = c_{k+n+۱} - \frac{n+۱}{۱}c_{k+n}$$
$$+ \frac{(n+۱)n}{۱\times ۲}c_{k+n-۱} - \ldots + (-۱)^{n+۱}c_k$$

۸۷. درستی این برابری به‌سادگی ثابت می‌شود. می‌بینیم که سمت راست، یک چندجمله‌ای درجهٔ n برحسب x است، آن را با $\varphi(x)$ نمایش می‌دهیم، یعنی قرار می‌دهیم:

$$f(۰) + \frac{x}{۱}\Delta f(۰) + \frac{x(x-۱)}{۱\times ۲}\Delta^۲ f(۰) + \ldots +$$
$$+ \frac{(x(x-۱)\ldots(x-n+۱)}{n!}\Delta^n f(۰) = \varphi(x)$$

در این برابری قرار می‌دهیم $x = ۰$. حاصل می‌شود $\varphi(۰) = f(۰)$، به‌ازای $x = ۱$ داریم:

$$\varphi(۱) = f(۰) + \Delta f(۰) = f(۱)$$

با استفاده از برابری الف مساله قبل، در حالت کلی به‌ازای مقدارهای از ۰ تا n، داریم:

$$\varphi(k) = f(k)$$

بنابراین، مقدار دو چندجمله‌ای درجهٔ n، $[\varphi(x), f(x)]$ به‌ازای $n+۱$ مقدار مختلف متغیر مستقل از x، برابر هم است. درنتیجه، متحد با یکدیگرند و به‌ازای هر x داریم:

$$\varphi(x) = f(x)$$

و به‌این ترتیب، درستی برابری‌ها را ثابت کرده‌ایم. به‌دست آوردن این دستور مشکل نیست. فرض کنید $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ n باشد. قبل از همه، ادعا می‌کنیم که همواره می‌توان ضریب‌های $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ را طوری انتخاب کرد که اتحاد زیر برقرار باشد:

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x(x-1) + A_3 x(x-1)(x-2) + \ldots +$$
$$+ A_n x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$$

چندجمله‌ای $f(x)$ را بر $(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$ تقسیم می‌کنیم. از آن‌جاکه چندجمله‌ای اخیر نیز از درجهٔ n است. خارج‌قسمت مقداری ثابت است و باقی‌مانده، یک چندجمله‌ای با درجه‌ای حداکثر برابر $n-1$. با تقسیم این چندجمله‌ای بر $x(x-1)\ldots(x-n+1)$، ثابت A_{n-1} و غیره به‌دست می‌آید. اکنون، ثابت‌های $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ را محاسبه می‌کنیم. برای سادگی کار فرض می‌کنیم،

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1) = \varphi_k(x), \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

آن‌گاه داریم:

$$\Delta\varphi_k(x) = \varphi_k(x-1) - \varphi_k(x) = (x+1)x(x-1)\ldots(x-k+2) -$$
$$-x(x-1)\ldots(x-k+1) = kx(x-1)\ldots(x-k+2) = k\varphi_{k-1}(x)$$

برای تعیین $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ به‌این ترتیب عمل می‌کنیم. در اتحاد $x = 0$ قرار می‌دهیم از آن‌جا که $\varphi_k(0) = 0$، به‌دست می‌آید:

$$A_0 = f(0)$$

اکنون تفاضل عضوهای اتحاد را در نظر می‌گیریم. حاصل می‌شود:

$$\Delta f(x) = A_1\Delta\varphi_1(x) + A_2\Delta\varphi_2(x) + \ldots + A_n\Delta\varphi_n(x) =$$
$$= A_1 + 2A_2\varphi_1(x) + \ldots + nA_n\varphi_{n-1}(x)$$

در این‌جا قرار می‌دهیم $x = 0$، به‌دست می‌آید:

$$A_1 = \Delta f(0)$$

علاوه بر این:

$$\Delta^{۲} f(x) = ۲A_{۲}\Delta\varphi_{۱}(x)+\ldots+nA_n\Delta\varphi_{n-۱}(x) = ۲A_{۲}+\ldots+n(n-۱)A_n\varphi_{n-۲}(x)$$

بنابراین:

$$A_{۲} = \frac{\Delta^{۲} f(۰)}{۱ \times ۲}$$

با انجام این عمل‌ها، تمام ضریب‌های $A_{۰}$، $A_{۱}$، ...، A_n به‌دست می‌آیند.

۸۸. به‌جای x، $x + ۱$ قرار می‌دهیم. داریم:

$$(x + ۱)^n = A_{۰} + A_{۱}x + \frac{A_{۲}}{۲!}x(x - ۱) +$$
$$+\frac{A_{۳}}{۳!}x(x - ۱)(x - ۲) + \ldots + \frac{A_n}{n!}x(x - ۱)\ldots(x - n + ۱)$$

قرار می‌دهیم: $f(x) = (x + ۱)^n$؛ با استفاده از نتیجهٔ مسالهٔ قبل، حاصل می‌شود:

$$A_s = \Delta^s f(۰)$$

از دستور ب مساله ۸۶، عبارت مطلوب برای A_s به‌دست می‌آید.

۸۹. در دستور ب مسالهٔ ۸۶ قرار دهید $k = ۰$، نتیجه می‌شود:

$$\Delta^{۲} c_{۰} = c_n - \frac{n}{۱}c_{n-۱} + \frac{n(n - ۱)}{۱ \times ۲}c_{n-۲} - \ldots + (-۱)^n c_{۰}$$

قرار دهید: $c_{۰} = \dfrac{۱}{(x + n)^{۲}}$ و در نظر بگیرید:

$$c_{۰} = \frac{۱}{(x + n)^{۲}},\ c_{۱} = \frac{۱}{(x + n - ۱)^{۲}}, \ldots, c_n = \frac{۱}{x^{۲}}$$

برای اثبات اتحاد، تنها کافی است ثابت کنیم:

$$\Delta^n \frac{۱}{(x + n)^{۲}} = \frac{n!}{x(x + ۱)\ldots(x + n)}\left\{\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x + ۱} + \ldots + \frac{۱}{x + n}\right\}$$

از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. به‌ازای $n = 1$، این دستور درست است. مطابق معمول فرض می‌کنیم برای n درست باشد، ثابت می‌کنیم، برای $n + 1$ نیز درست است. داریم:

$$\Delta^{n+1}\frac{1}{(x+n+1)^2} = \Delta(\Delta^n\frac{1}{(x+n+1)^2}) =$$
$$= \Delta\{\frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}(\frac{1}{x+1}+\ldots+\frac{1}{x+n})\} =$$
$$= \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\ldots+\frac{1}{x+n}\} -$$
$$= \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}\{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+n+1}\} =$$
$$= \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n+1)}\{(x+n+1)(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\ldots+\frac{1}{x+n}) -$$
$$-x(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+n+1})\} =$$
$$= \frac{(n+1)!}{x(x+1)\ldots(x+n+1)}\{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+$$
$$+\ldots+\frac{1}{x+n+1}\}\{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\ldots+\frac{1}{x+n+1}\}$$

به‌ازای $x = 1$، از اتحاد نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{n+1}\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\} = \frac{1}{1^2} - \frac{c_n^1}{2^2} - \frac{c_n^1}{2^2} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{(n+1)^2}$$

۹۰. عبارت $\varphi_n(x+y)$ یک چندجمله‌ای درجه n برحسب x است. بنابراین، می‌توان آن را به‌این صورت نوشت:

$$\varphi_n(x+y) = A_0 + A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \ldots + A_n\varphi_n(x)$$

که در آن $A_s = \frac{\Delta^s\varphi_n(y)}{s!}$ (زیرا به‌ازای $x = 0$، $\varphi_n(x+y)$ به $\varphi_n(y)$ تبدیل می‌شود). بنابراین، می‌دانیم (مسالهٔ ۸۷) که $\Delta\varphi_n(y) = n\varphi_{n-1}(y)$، درنتیجه:

$$\Delta^2\varphi_n(y) = n(n-1)\varphi_{n-2}(y)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta^s \varphi_n(y) = n(n-1)\dots(n-s+1)\varphi_{n-s}(y)$$

بنابراین:

$$A_s = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-s+1)\varphi_{n-s}(y)}{s!} = C_n^s \varphi_{n-s}(y)$$

با وجود این، درستی این دستور را می‌توان با استفاده از دلیل‌های دیگر ثابت کرد. فرض کنید x و y عددهای درست و مثبت بزرگتر از n باشند، در آن صورت این برابری‌ها به‌دست می‌آیند.

$$(1+z)^x = 1 + xz + \frac{x(x-1)}{1\times 2}z^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\times 2\times 3}z^3 + \dots$$

$$(1+z)^y = 1 + yz + \frac{y(y-1)}{1\times 2}z^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{1\times 2\times 3}z^3 + \dots$$

$$(1+z)^{x+y} = 1 + (x+y)z + \frac{(x+y)(x+y-1)}{1\times 2}z^2 +$$

$$+\frac{(x+y)(x+y-1)(x+y-2)}{1\times 2\times 3}z^3 + \dots$$

از طرف دیگر، $(1+z)^x \cdot (1+z)^y = (1+z)^{x+y}$، یعنی

$$\sum \frac{\varphi_k(x)}{k!}z^k \cdot \sum \frac{\varphi_s(y)}{s!}z^s = \sum \frac{\varphi_n(x+y)}{n!}z^n$$

ضریب‌های z^n را در دو طرف این برابری، برابر قرار می‌دهیم، حاصل می‌شود:

$$\varphi_n(x+y) = \varphi_n(x) + C_n^1\varphi_{n-1}(x)\varphi_1(y) + \dots + C_n^{n-1}\varphi_1(x)\varphi_{n-1}(xy) + \varphi_n(y)$$

فرض کنید y_0 عدد درست و مثبت و بزرگتر از n باشد. در آن صورت:

$$\varphi_n(x+y) \text{ و } \varphi_n(x) + C_n^1\varphi_{n-1}(x)\varphi_1(y_0) + \dots + \varphi_n(y_0)$$

دو چندجمله‌ای، از درجه n، برحسب x هستند و به‌ازای همهٔ مقدارهای مثبت x بزرگتر n برابر هستند. درنتیجه، به‌ازای همهٔ مقدارهای x با هم متحدند، اما y_0 می‌تواند همهٔ

مقدارهای درست بزرگتر از n را اختیار کند. درنتیجه، مانند حالت قبل، نتیجه می‌گیریم که y. نمی‌تواند هر مقداری را اختیار کند و برابری

$$\varphi_n(x+y) = \varphi_n(x)+C_{n-۱}^{۱}\varphi(x)\varphi_۱(y)+\ldots+C_n^{n-۱}\varphi_۱(x)\varphi_{n-۱}(y)+\varphi_n(y)$$

برای تمام مقدارهای x و y درست است.

۹۱. قبل از همه، دو اتحاد الف و ب را به‌سادگی می‌توان با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کرد. در واقع، به‌ازای $n = ۱$، اتحاد الف برقرار است. فرض کنید به‌ازای تمام مقدارهای n، که از n بیشتر نیست، برقرار باشد، داریم:

$$x^n+y^n = p^n-\frac{n}{۱}p^{n-۲}q+\frac{n(n-۳)}{۱\times ۲}p^{n-۴}q^۲-\frac{n(n-۴)(n-۵)}{۱\times ۲\times ۳}p^{n-۶}q^۳+\ldots$$

دو طرف این برابری را در $x + y = p$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x^{n+۱}+y^{n+۱}+xy(x^{n-۱}+y^{n-۱}) = p^{n+۱}-\frac{n}{۱}p^{n-۱}q+$$
$$+\frac{n(n-۳)}{۱\times ۲}q^{n-۳}q^۲-\frac{n(n-۴)(n-۵)}{۱\times ۲\times ۳}p^{n-۵}q^۳+\ldots$$

از این‌رو:

$$x^{n+۱}+y^{n+۱} = p^{n+۱}-\frac{n}{۱}p^{n-۱}q+\frac{n(n-۳)}{۱\times ۲}p^{n-۳}q^۲-$$
$$-\frac{n(n-۴)(n-۵)}{۱\times ۲\times ۳}p^{n-۵}q^۳+\ldots-$$
$$-q(p^{n-۱}-\frac{n-۱}{۱}p^{n-۳}q+\frac{(n-۱)(n-۴)}{۱\times ۲}p^{n-۵}q^۲-$$
$$-\frac{(n-۱)(n-۵)(n-۶)}{۱\times ۲\times ۳}p^{n-۷}q^۳+$$
$$+\ldots) = p^{n+۱}-\frac{n+۱}{۱}p^{n-۱}q+\{\frac{n(n-۳)}{۱\times ۲}+\frac{n-۱}{۱}\}p^{n-۳}q^۲-$$
$$-\{\frac{n(n-۴)(n-۵)}{۱\times ۲\times ۳}+$$
$$+\frac{(n-۱)(n-۴)}{۱\times ۲}\}p^{n-۵}q^۲+\ldots = p^{n+۱}-\frac{n+۱}{۱}p^{n-۱}q+$$

$$+\frac{(n+۱)(n-۲)}{۱\times ۲}p^{n-۳}q^{۲}-$$
$$-\frac{(n+۱)(n-۳)(n-۴)}{۱\times ۲\times ۳}p^{n-۵}q^{۲}+\dots$$

و قضیه به‌ازای $n+۱$ برقرار است.

بخش ب را می‌توان درست با همین روش حل کرد.

توجه داشته باشید، اگر x و y ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دوم باشند، آن‌گاه هر دو دستور به‌جز عبارت کسرهای متقارن ریشه‌های این معادله برحسب ضریب‌ها چیز دیگری را نشان نمی‌دهند.

اگر در این دستورها، قرار دهیم $x=\cos\varphi+i\sin\varphi$ و $y=\cos\varphi-i\sin\varphi$ آن‌گاه

$$x^n+y^n=۲\cos n\varphi,\ p=x+y=۲\cos\varphi,\ q=xy=۱,$$
$$\frac{x^{n+۱}-y^{n+۱}}{x-y}=\frac{\sin(n+۱)\varphi}{\sin\varphi}$$

بنابراین، بسط $\cos n\varphi$ و $\frac{\sin(n+۱)\varphi}{\sin\varphi}$ را برحسب توان‌های $\cos\varphi$ به‌دست می‌آوریم.

۹۲. فرض می‌کنیم $xy=q$ و $x^k+y^k=S_k$، باید ثابت کنیم:

$$S_m+C_m^۱qS_{m-۱}+C_{m+۱}^۲q^۲S_{m-۲}+\dots+C_{۲m-۲}^{m-۱}q^{m-۱}S_۱=۱$$

با فرض درستی این برابری، ثابت می‌کنیم:

$$S_{m+۱}+C_{m+۱}^۱qS_m+C_{m+۲}^۲q^۲S_{m-۱}+\dots+C_{۲m-۱}^{m-۱}q^{m-۱}S_۲+C_{۲m}^{m}q^mS_۱=۱$$

می‌توان توجه داشت که x و y ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $\alpha^۲-\alpha+q=۰$ هستند. بنابراین به‌ازای هر عدد درست k، $S_{k+۱}=S_k-qS_{k-۱}$. درنتیجه:

$$S_{m+۱}=S_m-qS_{m-۱}$$
$$S_m=S_{m-۱}-qS_{m-۲}$$
$$S_{m-۱}=S_{m-۲}-qS_{m-۳}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_۳ = S_۲ - qS_۱$$

$$S_۲ = S_۱ - qS_۰$$

$$S_۱ = S_۱$$

این برابری‌ها را به‌ترتیب در

$$۱,\ C^۱_{m+۱}q,\ C^۲_{m+۲}q^۲,\ \ldots,\ C^{m-۱}_{۲n-۱}q^{m-۱},\ C^m_{۲m}q^m$$

ضرب و آن‌ها را جمع می‌کنیم.

آن‌گاه در طرف چپ به‌دست می‌آوریم:

$$S_{m+۱} + C^۱_{m+۱}qS_m + C^۲_{m+۲}q^۲S_{m-۱} + \ldots + C^{m-۱}_{۲m-۱}q^{m-۱}S_۲ + C^m_{۲m}q^{mS_۱}$$

تنها باید ثابت کنیم که طرف راست، برابر یک است. سمت راست برابر با

$$S_m + C^۱_{m+۱}qS_{m-۱} + C^۲_{m+۲}q^۲S_{m-۲} + \ldots + C^{m-۱}_{۲m-۱}q^{m-۱}S_۱ + C^m_{۲m}q^nS_۱$$
$$-qS_{m-۱} - C^۱_{m+۱}q^۲S_{m-۲} - C^۲_{m+۲}q^۳S_{m-۳} - \ldots - C^{m-۱}_{۲m-۱}q^mS_۰ =$$
$$= \{S_m + C^۱_mqS_{m-۱} + C^۲_{m+۱}q^۲S_{m-۲} + \ldots + C^{m-۱}_{۲m-۲}q^{m-۱}S_۱\} +$$
$$+C^m_{۲m}q^mS_۱ - C^{m-۱}_{۲m}q^mS_۰$$

اما بنابه‌فرض، عبارت داخل آکولاد برابر یک است و، درضمن $C^m_{۲m}S_۱ - C^{m-۱}_{۲m-۱}S_۰ = ۰$، زیرا $S_۱ = ۰$ و $S_۰ = ۲$ به‌همین ترتیب، طرف راست برابر است. علاوه بر این واضح است که به‌ازای $m = ۱$، برابری درست است. اکنون می‌توانیم ادعا کنیم که برابری به‌ازای هر مقدار m درست است.

۹۳. اگر $u + v = ۱$، آن‌گاه

$$u^m(۱ + c^۱_mv + c^۲_{m+۱}v^۲ + \ldots + c^{m-۱}_{۲m-۲}v^{m-۱}) +$$
$$+v^m(۱ + c^۱_mu + c^۲_{m+۱}u^۲ + \ldots + c^{m-۱}_{۲m-۲}u^{m-۱}) = ۱$$

قرار دهید: $u = \frac{x-a}{b-a}$ و $v = \frac{x-b}{a-b}$، در این صورت $u + v = ۱$ و

$$\frac{۱}{u^m v^m} = (\frac{۱}{v^m} + c_m^۱ \frac{۱}{v^{m-۱}} + c_{m+۱}^۲ \frac{۱}{v^{m-۲}} + \ldots + c_{۲m-۲}^{m-۱} \frac{۱}{v}) +$$

$$+(\frac{۱}{u^m} + c_m^۱ \frac{۱}{u^{m-۱}} + c_{m+۱}^۲ \frac{۱}{u^{m-۲}} + \ldots + c_{۲m-۲}^{m-۱} \frac{۱}{u})$$

از این‌رو، درستی اتحاد نتیجه می‌شود.

۹۴. به‌سادگی دیده می‌شود که می‌توان همواره ثابت‌های $A_۱$ و $A_۲$ و ... را طوری انتخاب کرد که اتحاد زیر برقرار باشد:

$$(۱ + t)^n = ۱ + t^n + A_۱ t(۱ + t^{n-۲}) + A_۲ t^۲(۱ + t^{n-۲}) + \ldots$$

در واقع، $(۱ + t)^n$ یک چندجمله‌ای درجه n برحسب t است. با تقسیم آن بر $۱ + t^n$، باقی‌مانده‌ای برابر یک چندجمله‌ای با درجهٔ نابیشتر از $n - ۱$ به‌دست می‌آید. آن را بر $t(t^{n-۲} + ۱)$ و غیره تقسیم می‌کنیم. روشن است که به‌این ترتیب، خارج‌قسمت به‌دست آمده مقدار ثابتی خواهد بود که به‌صورت منحصر به‌فرد قابل محاسبه است.

در اتحاد تشکیل شده فرض می‌کنیم: $t = \frac{y}{x}$. به‌دست می‌آید:

$$(x+y)^n = x^n + y^n + A_۱ xy(x^{n-۲} + y^{n-۲}) + A_۲ x^۲ y^۲(x^{n-۴} + y^{n-۴}) + \ldots$$

برای تعیین ضریب‌های $A_۱$ و $A_۲$ و ... در این اتحاد قرار می‌دهیم:

$$x = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ y = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

در این صورت، به‌دست می‌آید:

$$(۲\cos\varphi)^n = ۲\cos n\varphi + ۲A_۱ \cos(n-۲)\varphi + ۲A_۲ \cos(n-۴)\varphi + \ldots$$

با استفاده از دستورهای معروف مربوط به بسط توان کسینوس برحسب کسینوسِ چند زاویه (مسالهٔ ۱۰، الف و ج را ببینید)، عبارت مربوط به $A_۱$ و $A_۲$ و ... به‌دست می‌آید.

۹۵. فرض کنید $y_۱$ و $y_۲$ ریشه‌های معادله درجه دوم زیر باشد:

$$y^۲ + py + q = ۰$$

اکنون این معادله را تشکیل می‌دهیم، یعنی p و q را پیدا می‌کنیم. برای این منظور، معادله اول را در q و معادلهٔ دوم را در p و معادله سوم را در واحد ضرب و نتیجه‌ها را با هم جمع می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$x_1(y_1^2 + py_1 + q) + x_2(y_2^2 + py_2 + q) = a_1q + a_2q + a_3 = 0$$

از آن‌جا

$$y_1^2 + py_1 + q = y_2^2 + py_2 + q = 0$$

معادله دوم را در q، معادله سوم را در p و معادله چهارم را در واحد ضرب و سپس جمع می‌کنیم:

$$x_1y_1(y_1^2 + py_1 + q) + x_2y_2(y_2^2 + py_2 + q) = a_2q + a_3p + a_4 = 0$$

به این ترتیب، برای تعیین p و q، یک دستگاه خطی به‌دست می‌آید:

$$a_1q + a_2q + a_3 = 0$$
$$a_2q + a_3p + a_4 = 0$$

با پیدا شدن p و q؛ y_1 و y_2 از معادلهٔ $y^2 + py + q = 0$ تعیین می‌شود. با معلوم شدن y_1 و y_2، x_1 و x_2، از دو معادلهٔ اول به‌دست می‌آید.

دستگاه در حالت کلی با این روش حل می‌شود، که فرض می‌کنیم $y_1, y_2, \ldots, y_n$ و ریشه‌های یک معادله معلوم درجه n هستند:

$$y^n + p_1y^{n-1} + p_2y^{n-2} + \ldots + p_{n-1}y + p_n = 0$$

برای تشکیل این معادله، معادلهٔ (۱) را در p_n، معادلهٔ (۲) را در p_{n-1} و غیره، و سرانجام معادله $(n+1)$ام را در واحد ضرب و نتیجه‌ها را، با هم جمع می‌کنیم. حاصل می‌شود:

$$a_1p_n + a_2p_{n-1} + \ldots + a_{n+1} = 0$$

آن‌گاه معادله (۲) را در p_n، معادله (۳) را در p_{n-1}، ... و معادلهٔ $(n+2)$ام را در واحد ضرب می‌کنیم و به‌این ترتیب یک رابطهٔ خطی دوم برای تعیین p_n و p_{n-1} و ... به‌دست

می‌آید. با ادامهٔ این عمل‌ها، سرانجام به n معادلهٔ خطی برای تعیین $p_1, p_2, \ldots, p_n$ دست می‌یابیم. اگر $p_1, p_2, \ldots, p_n$ پیدا شوند، آن‌گاه برای تعیین $y_1, y_2, \ldots, y_n$ باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$y^n + py^{n-1} + \ldots + p_{n-1}y + p_n = 0$$

برای تعیین $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تنها حل یک دستگاه از معادله‌های خطی باقی می‌ماند. روش حل نخستین این دستگاه که در پایین نشان داده شده‌است منسوب به س. رامانوجان است. عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$\phi(\theta) = \frac{x_1}{1-\theta y_1} + \frac{x_2}{1-\theta y_2} + \ldots + \frac{x_n}{1-\theta y_n}$$

اما:

$$\frac{x_1}{1-\theta y_1} = x_1(1 + \theta y_1 + \theta^2 y_1^2 + \theta^3 y_1^3 + \ldots),$$
$$\frac{x_2}{1-\theta y_2} = x_2(1 + \theta y_2 + \theta^2 y_2^2 + \theta^3 y_2^3 + \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{x_n}{1-\theta y_n} = x_n(1 + \theta y_n + \theta^2 y_n^2 + \theta^3 y_n^3 + \ldots)$$

درنتیجه:

$$\begin{aligned}\phi(\theta) &= (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)\theta + \\ &+(x_1y_1^2 + \ldots + x_ny_n^2)\theta^2 + \ldots + \\ &+(x_1y_1^{2n-1} + x_2y_2^{2n-1} + \ldots + x_ny_n^{2n-1})\theta^{2n-1} + \\ &+(x_1y_1^{2n} + \ldots + x_ny_x^{2n})\theta^{2n} + \ldots\end{aligned}$$

اما باتوجه به معادله‌های داده شده، به‌دست می‌آید:

$$\phi(\theta) = a_1 + a_2\theta + a_3\theta^2 + \ldots + a_{2n}\theta^{2n-1} + \ldots$$

در کسرها مخرج مشترک می‌گیریم، حاصل می‌شود:

$$\phi(\theta) = \frac{A_1 + A_2\theta + A_3\theta^3 + \ldots + A_n\theta^{n-1}}{1 + B_1\theta + B_2\theta^2 + \ldots + B_n\theta^n}$$

بنابراین:

$$(a_1 + a_2\theta + a_3\theta^3 + \ldots + a_{2n}\theta^{2n-1} + \ldots)(1 + B_1\theta + B_2\theta^2 + \ldots + B_n\theta^n)$$
$$= A_1 + A_2\theta + \ldots + A_n\theta^{n-1}$$

از آن‌جا

$$A_1 = a_1,$$
$$A_2 = a_2 + a_1B_1,$$
$$A_3 = a_3 + a_2B_1 + a_1B_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = a_n + a_{n-1}B_1 + a_{n-2}B_2 + \ldots + a_1B_{n-1},$$
$$0 = a_n + a_{n-1}B_1 + \ldots + a_1B_n,$$
$$0 = a_{n+2} + a_{n+1}B_1 + \ldots + a_2B_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = a_{2n} + a_{2n-1}B_1 + \ldots + a_nB_n$$

از آن‌جا که کمیت‌های $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}$ معلوم هستند، معادله‌های اخیر ما را قادر می‌سازد نخست $B_1, B_2, \ldots, B_n$ را پیدا کنیم و آن‌گاه $A_1, A_2, \ldots, A_n$ پیدا می‌شود. با معلوم بودن کمیت‌های A_i و B_i می‌توان کسر گویای $\phi(\theta)$ را تشکیل و آن‌گاه آن را به کسرهای جزیی بسط داد. برای مثال، فرض کنید بسط زیر وجود داشته باشد:

$$\phi(\theta) = \frac{p_1}{1 - q_1\theta} + \frac{p_2}{1 - q_2\theta} + \frac{p_3}{1 - q_3\theta} + \ldots + \frac{p_n}{1 - q_n\theta}$$

در آن صورت، روشن است که:

$$x_1 = p_1,\ y_1 = q_1$$

$$x_۲ = p_۲,\ y_۲ = q_۲$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = p_n,\ y_n = q_n$$

و دستگاه حل می‌شود.

۹۶. برای حالت داده شده داریم:

$$\phi(\theta) = \frac{۲ + \theta + ۳\theta^۲ + ۲\theta^۳ + \theta^۴}{۱ - \theta - ۵\theta^۲ + \theta^۳ + ۳\theta^۴ - \theta^۵}$$

با تفکیک این کسر به کسرهای ساده‌تر، برای مجهول این مقدارها به‌دست می‌آید:

$$x = -\frac{۳}{۵},\quad p = -۱$$

$$y = \frac{۱۸ + \sqrt{۵}}{۱۰},\quad q = \frac{۳ + \sqrt{۵}}{۲}$$

$$z = \frac{۱۸ - \sqrt{۵}}{۱۰},\quad r = \frac{۳ - \sqrt{۵}}{۲}$$

$$u = -\frac{۸ + \sqrt{۵}}{۲\sqrt{۵}},\quad s = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$$

$$v = \frac{۸ - \sqrt{۵}}{۲\sqrt{۵}},\quad t = -\frac{\sqrt{۵} + ۱}{۲}$$

۹۷. الف) داریم:

$$(m, \mu) = \frac{(۱ - x)(۱ - x^۲)\dots(۱ - x^{m-\mu})(۱ - x^{m-\mu+۱})\dots(۱ - x^{m-۱})(۱ - x^m)}{(۱ - x)(۱ - x^۲)\dots(۱ - x^\mu)(۱ - x)(۱ - x^۲)\dots(۱ - x^{m-\mu})}$$

بنابراین روشن است که:

$$(m, \mu) = (m, m - \mu)$$

ب) در واقع

$$(m, \mu + ۱) = \frac{(۱ - x^m)(۱ - x^{m-۱})\dots(۱ - x^{m-\mu+۱})(۱ - x^{m-\mu})}{(۱ - x)(۱ - x^۲)\dots(۱ - x^\mu)(۱ - x^{\mu+۱})} =$$

$$= \frac{(1 - x^{m-1})\dots(1 - x^{m-\mu})(1 - x^{m-\mu+1})}{(1 - x)(1 - x^2)\dots(1 - x^{\mu+1})} \cdot \frac{1 - x^m}{1 - x^{m-\mu+1}}$$

بنابراین:

$$(m, \mu + 1) = (m - 1, \mu + 1)\frac{1 - x^m}{1 - x^{m-\mu-1}} =$$

$$= (m - 1, \mu + 1)\frac{1 - x^{m-\mu-1} + x^{m-\mu-1} - x^m}{1 - x^{m-\mu-1}} =$$

$$= (m - 1, \mu + 1)[1 + x^{m-\mu-1}\frac{1 - x^{\mu+1}}{1 - x^{m-\mu-1}}] =$$

$$= (m - 1, \mu + 1) + x^{m-\mu-1}(m - 1, \mu)$$

ج) با استفاده از نتیجهٔ ب، تعداد برابری به‌این صورت به‌دست می‌آید:

$$(m, \mu + 1) = (m - 1, \mu + 1) + x^{m-\mu-1}(m - 1, \mu)$$

$$(m - 1, \mu + 1) = (m - 2, \mu + 1) + x^{m-\mu-2}(m - 2, \mu)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(\mu + 2, \mu + 1) = (\mu + 1, \mu + 1) + x(\mu + 1, \mu)$$

$$(\mu + 1, \mu + 1) = (\mu, \mu)$$

با جمع جمله به جملهٔ این برابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$(m, \mu + 1) = (\mu, \mu) + x(\mu + 1, \mu) + \dots + x^{m-\mu-1}(m - 1, \mu) \quad (*)$$

د) لازم است ثابت کنیم (m, μ) یک چندجمله‌ای است. داریم:

$$(m, 1) = \frac{1 - x^m}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1}$$

به‌این ترتیب، فرض برای $\mu = 1$ و هر مقدار m درست است. فرض کنید (m, k) به‌ازای $k \leq \mu$ یک چندجمله‌ای باشد، باتوجه به دستور $(*)$ می‌توان ادعا کرد که $(m, \mu + 1)$ نیز یک چندجمله‌ای است و از این‌رو، حکم با روش استقرای ریاضی ثابت می‌شود.

ه) نمادگذاری زیر را میپذیریم:

$$f(x,m)=۱-(m,۱)+(m,۲)-(m,۳)+\ldots+(-۱)^m(m,n)$$

نخست ثابت میکنیم که

$$f(x,m)=(۱-x^{m-۱})f(x,m-۲),$$

داریم:

$$\begin{aligned}
&۱=۱,\\
&(m,۱)=(m-۱,۱)+x^{m-۱},\\
&(m,۲)=(m-۱,۲)+x^{m-۲}(m-۱,۱),\\
&(m,۳)=(m-۱,۳)+x^{m-۳}(m-۱,۲),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(m,m-۱)=(m-۱,m-۱)+x(m-۱,m-۲),\\
&(m,m)=(m-۱,m-۱)
\end{aligned}$$

این برابریها را بهترتیب در $۱\pm$ ضرب و نتیجهها را جمع میکنیم، حاصل میشود:

$$f(x,m)=(۱-x^{m-۱})-(m-۱,۱)(۱-x^{m-۲})+$$
$$+(m-۱,۲)(۱-x^{m-۳})-\ldots+(-۱)^{m-۲}(m-۱,m-۲)(۱-x)$$

اما:

$$\begin{aligned}
&(۱-x^{m-۲})(m-۱,۱)=(۱-x^{m-۱})(m-۲,۱),\\
&(۱-x^{m-۳})(m-۱,۲)=(۱-x^{m-۱})(m-۲,۲)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

بنابراین:

$$f(x,m)=(۱-x^{m-۱})\{۱-(m-۲,۱)+(m-۲,۲)-\ldots+$$
$$+(-۱)^{m-۲}(m-۲,m-۲))=(۱-x^{m-۱})f(x,m-۲)$$

به‌این ترتیب:

$$f(x,m) = (1 - x^{m-1})f(x, m-2)$$
$$f(x, m-2) = (1 - x^{m-3})f(x, m-4)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

نخست فرض می‌کنیم m زوج باشد، به‌دست می‌آید:

$$f(x,m) = (1 - x^{m-1})(1 - x^{m-3})(1 - x^{m-5})\ldots(1 - x^{3})f(x, 2)$$

اما

$$f(x,2) = 1 - (2,1) + (2,2) = 2 - \frac{1 - x^2}{1 - x} = 1 - x$$

درنتیجه،

$$f(x,m) = (1 - x^{m-1})(1 - x^{m-3})\ldots(1 - x^{3})(1 - x)$$

با شرط زوج بودن m.

اگر m فرد باشد، داریم:

$$f(x,m) = (1 - x^{m-1})(1 - x^{m-3})\ldots(1 - x^{2})f(x, 1)$$

اما $f(x,1) = 0$، درنتیجه برای هر مقدار فرد m داریم: $f(x,m) = 0$. باوجود این، رابطهٔ آخر را می‌توان به‌سادگی و به‌طور مستقیم از بسط $f(x,m)$ به‌دست آورد.

$$f(x,m) = 1 - (m,1) + (m,2) - (m,3) + \ldots + (-1)^m(m,n)$$

۹۸. الف) قرار دهید:

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(1 - x^n)(1 - x^{n-1})\ldots(1 - x^{n-k+1})}{(1 - x)(1 - x^2)\ldots(1 - x^k)} x^{\frac{k(k+1)}{2}} z^k = F(n)$$

درآن صورت:

$$F(n+1) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(1 - x^{n+1})(1 - x^n)\ldots(1 - x^{n-k+2})}{(1 - x)(1 - x^2)\ldots(1 - x^k)} x^{\frac{k(k+1)}{2}} z^k$$

درنتیجه:

$$F(n+۱)-F(n)=\sum_{k=۱}^{n}\frac{(۱-x^n)\dots(۱-x^{n-k+۲})}{(۱-x)(۱-x^۲)\dots(۱-x^k)}\cdot$$
$$\cdot x^{\frac{k(k+۱)}{۲}}z^k\{۱-x^{n+۱}-۱+x^{n-k+۱}\}+$$
$$+x^{\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}}z^{n+۱}=\sum_{k=۱}^{n}\frac{(۱-x^n)\dots(۱-x^{n-k+۲})}{(۱-x)(۱-x^۲)\dots(۱-x^k)}\cdot$$
$$\cdot x^{\frac{k(k+۱)}{۲}}z^kx^{n-k+۱}(۱-x^k)+$$
$$+x^{\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}}z^{n+۱}=$$
$$=zx^{n+۱}\sum_{k=۱}^{n}\frac{(۱-x^n)(۱-x^{n-۱})\dots(۱-x^{n-k+۲})}{(۱-x)(۱-x^۲)\dots(۱-x^{k-۱})}z^{k-۱}x^{\frac{k(k-۱)}{۱\times ۲}}+$$
$$+zx^{n+۱}x^{\frac{n(n+۱)}{۲}}z^n=zx^{n+۱}f(x)$$

و بنابراین:

$$f(n+۱)-f(n)=zx^{n+۱}f(n)$$

یعنی:

$$f(n+۱)=(۱+zx^{n+۱})f(n)$$

بنابراین:

$$f(n)=(۱+zx^n)f(n-۱)$$
$$f(n-۱)=(۱+zx^{n-۱})f(n-۲)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(۳)=(۱+zx^۳)f(۲)$$
$$f(۲)=(۱+zx^۲)f(۱)$$
$$f(۱)=۱+xz$$

با ضرب این برابری‌ها، نتیجه می‌شود:

$$f(n)=(۱+xz)(۱+x^۲z)\dots(۱+x^nz)$$

ب) به‌صورت مشابه ثابت می‌شود.

علاوه بر این از اول نتیجه می‌شود:

$$\frac{(۱-x^n)(۱-x^{n-۱})\dots(۱-x^{n-k+۱})}{(۱-x)(۱-x^۲)\dots(۱-x^k)}$$

یک چندجمله‌ای برحسب x است (مساله ۹۷ را ببینید).

از همین دستور می‌توانیم دستور بسط دوجمله‌ای را نیز به‌دست آوریم. درواقع:

$$\frac{۱-x^{n-k+۱}}{۱-x^k}=\frac{۱+x+x^۲+\dots+x^{n-k}}{۱+x+x^۲+\dots+x^{k-۱}}$$

علاوه بر این، به‌ازای $x=۱$، عبارت اخیر، مقدار $\frac{n-k+۱}{k}$ را به‌دست می‌دهد. درنتیجه، می‌توان توجه داشت که عبارت

$$\frac{(۱-x^n)(۱-x^{n-۱})\dots(۱-x^{n-k+۱})}{(۱-x)(۱-x^۲)\dots(۱-x^k)}$$

به‌ازای $x=۱$ تبدیل به

$$\frac{n(n-۱)\dots(n-k+۱)}{۱\times ۲\times\dots\times k}=C_n^k$$

می‌شود و در دستور الف به‌ازای $x=۱$ نتیجه می‌شود:

$$(۱+z)^n=۱+\sum_{k=۱}^{k=n}C_n^k z^k \quad \text{(دستور اویلر)}$$

۹۹. به‌سادگی از الفِ مساله ۹۸ به‌ازای $z=-۱$ به‌دست می‌آید.

۱۰۰. قرار دهید:

$$c_۰+c_۱(z+z^{-۱})+c_۲(z^۲+z^{-۲})+\dots+c_n(z^n+z^{-n})=\varphi_n(z)$$

در آن صورت داریم:

$$\varphi_n(x^۲z)=\varphi_n(z)\frac{۱+x^{۲n+۱}z}{xz+x^{۲n}}$$

(که $\varphi_n(z)$ را برحسب یک حاصل‌ضرب بیان می‌کند). با استفاده از $\varphi_n(z)$ که برحسب مجموع بیان شود، با استفاده از اتحاد اخیر به‌دست می‌آید:

$$c_k x^{2k+1}(1-x^{2n-2k}) = c_{k+1}(1-x^{2n+2k+2})$$
$$(k=0,1,2,\dots,n-1)$$

علاوه بر این، روشن است که $c_n = x^{n^2}$. در رابطهٔ اخیر مقدارهای زیر را به‌ترتیب به‌جای k قرار می‌دهیم: $n-1$، $n-2$، ...، 0 و برابری‌هایی را، که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، در هم ضرب می‌کنیم، حاصل می‌شود:

$$C_k = \frac{(1-x^{2n+2k+2})(1-x^{2n+2k+4})\dots(1-x^{4n})}{(1-x^2)(1-x^4)\dots(1-x^{2n-2k})}x^{k^2}$$

۱۰۱. قرار دهید: $\cos x + i\sin x = \varepsilon$، درآن صورت

$$\cos x - i\sin x = \varepsilon^{-1}$$

علاوه بر این: $\cos lx - i\sin lx = \varepsilon^{-l}$ و $\cos lx + i\sin lx = \varepsilon^{l}$

درنتیجه: $\sin lx = \frac{\varepsilon^l}{2i}(1-\varepsilon^{-2l})$

این مقدار $\sin lx$ را در عبارت به‌جای u_k قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$u_k = \frac{(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})\dots(1-q^{2n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^k)}\cdot q^{-\frac{1}{2}k(2n-k)}$$

که در آن $q=\varepsilon^{-2}$.

مجموع مطلوب را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$1-u_1+u_2-u_3+\dots+u_{2n} =$$
$$= 1+\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})\dots(1-q^{2n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^k)}\times q^{-\frac{1}{2}k(2n-k)}$$

اکنون از دستور الف مساله ۹۸ استفاده می‌کنیم و در آن، n را به $2n$ تبدیل می‌کنیم، (با فرض $x=q$ و $z=-q^{-n-\frac{1}{2}}$). درآن صورت، داریم:

$$1-u_1+u_2-u_3+\dots+u_{2n} = \prod_{k=1}^{2n}(1-q^{k-n-\frac{1}{2}}) = \prod_{k=1}^{2n}(1-\varepsilon^{2n+1-2k})$$

$$= \prod_{k=1}^{n}(1-\varepsilon^{2k-1})(1-\varepsilon^{-2k+1}) =$$
$$= \prod_{k=1}^{n} 2[1-\cos(2k-1)x] = 2^n \prod_{k=1}^{n}[1-\cos(2k-1)x]$$

ب) فرض می‌کنیم (مانند مساله ۹۷):

$$\frac{(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})\dots(2-q^{2n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^k)} = (2n, k)$$

آنگاه $u_k = (2n, k)q^{-\frac{1}{2}k(2n-k)}$، که در آن $q = \cos 2x - i\sin 2x$.
باید این مجموع را محاسبه کنیم:

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k^2 = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(2n, k)^2 \cdot q^{-k(2n-k)}$$

(که در آن $(2n, 0) = 1$) از مساله ۹۸ الف داریم:

$$(1-qz)(1-q^2z)\dots(1-q^{2n}z) = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(2n, k)q^{\frac{k(k+1)}{2}}z^k$$

قرار دهید:

$$(1-qz)(1-q^2z)\dots(1-q^{2n}z) = \varphi_n(z, q)$$

درآن صورت داریم:

$$\varphi_n(z, q)\cdot\varphi_n(-z, q) = \varphi_n(q^2, z^2)$$

از این‌رو

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(2n, k)q^{\frac{k(k+1)}{2}}z^k \sum_{s=0}^{2n}(2n, s)q^{\frac{s(s+1)}{2}}z^2 =$$
$$= \sum_{m=0}^{2n}(-1)^m\{2n, m\}q^{m(m+1)z^{2m}}$$

که در آن $\{2n, m\}$ از $(2n, m)$ با تبدیل q به q^2 به‌دست می‌آید. ضریب z^{2n} را در دو طرف این برابری، در نظر بگیرید. این ضریب در طرف راست برابر است با:

$$(-1)^n\{2n, n\}q^{n(n+1)}$$

و در طرف چپ این عبارت به‌دست می‌آید:

$$\sum_{k+s=2n}(-1)^k(2n, k)(2n, s)q^{\frac{k(k+1)}{2}+\frac{s(s+1)}{2}}$$

اما $(2n, 2n-k) = (2n, k)$ بنابراین، مجموع اخیر برابر است با:

$$q^{2n^2+n}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(2n, k)^2q^{k^2-2nk}$$

و به‌این ترتیب، داریم:

$$q^{2n^2+n}\sum_{k=0}^{3n}(-1)^k(2n, k)^2q^{2k^2-2nk} = (-1)^n\{2n, n\}q^{n^2+n}$$

اما $(2n, k)^2 = u_k^2q^{2nk-k^2}$، بنابراین

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k^2 = (-1)^n q^{-n^2}\{2n, n\}$$

علاوه بر این:

$$(2n, n) = u_n q^{\frac{1}{2}n^2},\ \{2n, n\} = \overline{u}_n\overline{q}^{n^2}$$

که در آن، $\overline{u}_n$ با گذاشتن $2x$ به‌جای x از u_n به‌دست می‌آید.

سرانجام:

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k^2 = (-1)^n\frac{\sin(2n+2)x\sin(2n+4)x\ldots\sin 4nx}{\sin 2x\sin 4x\ldots\sin 2nx}$$

که از

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k(2n+1, k)^2 \quad q^{k^2-2nk} = (-1)^n\{2n, n\}q^{-n^2}$$

نتیجه می‌شود.

به‌همین ترتیب، می‌توان به‌دست آورد:

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k(2n+1,k)^2q^{2-(2n+1)k}=0$$

اگر قرار دهیم $q=1$، آن‌گاه (n,k) تبدیل به C_n^k می‌شود و این دستورها به‌دست می‌آید:

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(C_{2n}^k)^2=(-1)^nC_{2n}^n,\ \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k(C_{2n+1}^k)^2=0$$

به‌همین ترتیب، اگر از اتحاد

$$\varphi_n(z,q)\cdot\varphi_n(q^nz,q)=\varphi_{2n}(z,q)$$

استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{k=0}^{n}(n,k)^2q^{k^2}=(2n,n)$$

و درنتیجه: $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=C_{2n}^n$.

(مساله ۷۲ را ببینید)

فصل ۷

۱. باید ثابت کنیم:

$$\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+c}$$

این برابری هم‌ارز است با برابری

$$\frac{b-a}{(c+a)(b+c)}=\frac{c-b}{(a+b)(a+c)};$$

$$\frac{b-a}{b+c}=\frac{c-b}{a+b}\Rightarrow b^2-a^2=c^2-b^2$$

برابری اخیر، بی‌درنگ شرط مساله را برآورده می‌کند.

۲. اگر a_n جمله nام و a_m جملهٔ mام تصاعد حسابی باشد، آن‌گاه

$$a_n = a_۱ + d(n - ۱),$$
$$a_m = a_۱ + d(m - ۱)$$

که در آن‌ها، d قدرنسبت تصاعد است، از این‌جا

$$a_n - a_m = (n - m)d$$

بنابه‌فرض، باید داشته باشیم:

$$b - c = (q - r)d, \quad c - a = (r - p)d, \quad a - b = (p - q)d$$

برابری اول را در a، برابری دوم را در b و برابری سوم را در c ضرب و سپس با هم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$d[(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c] = a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = ۰$$

که از آن نتیجه شود:

$$(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c = ۰$$

۳. داریم:

$$a_p - a_q = (p - d)d$$

که در آن d قدرنسبت تصاعد است. بنابه فرض $a_q = p, a_p = q$، پس $a_p - a_q = q - p$ بنابراین با فرض $p \neq q$

$$q - p = (p - q)d \Rightarrow d = -۱$$

و علاوه بر این $a_m - a_p = (m - p)d$، بنابراین

$$a_m = a_p + (m - p)d = q - m + p$$

۴. داریم: $a_{p+k} = a_k + pd$.
فرض کنید در این برابری k به‌ترتیب مقدارهای ۱ و ۲ و ۳ و ...، q را اختیار کند. تعداد q برابریِ به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم. حاصل می‌شود.

$$a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_{p+q} = a_1 + a_2 + \ldots + a_q + pdq$$

اما $a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_{p+q} = s_{p+q} - s_p,$ بنابراین

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_q = s_q, \quad s_{p+q} = s_p + s_q + pdq$$

از طرف دیگر می‌دانیم:

$$s_p = \frac{a_1 + a_p}{2}p, \quad s_q = \frac{a_1 + a_q}{2}q$$

بنابراین:

$$\frac{2s_p}{p} - \frac{2s_q}{q} = a_p - a_q = (p-q)d; \quad \frac{2(ps_p - ps_q)}{p-q} = pdq$$

در نتیجه:

$$s_{p+q} = s_p + s_q + \frac{2(qs_p - ps_q)}{p-q} = \frac{(p+q)s_p - (p+g)s_q}{p-q}$$

و سرانجام

$$s_{p+q} = \frac{p+q}{p-q}(s_p - s_q) = -(p+q)$$

۵. از مسالهٔ ۴ نتیجه می‌شود. باوجود این، روش دیگری هم می‌تواند به‌کار گرفته شود. داریم:

$$s_p = \frac{a_1 + a_p}{2}p, \quad s_q = \frac{a_1 + a_q}{2}q$$

از این‌رو: $\frac{a_1 + a_p}{2}p = \frac{a_1 + a_q}{2}q$، یا

$$[2a_1 + d(p-1)]p = [2a_1 + d(q-1)]q;$$

$$2a_1(p-q) + d(p^2 - p - q^2 + q) = 0;$$

$$2a_1 + d(p+q-1) = 0;$$

$$a_1 + a_{p+q} = 0$$

از آنجاکه $a_{p+q}=a_۱+d(p+q-۱)$ و

$$s_{p+q}=\frac{a_۱+a_{p+q}}{۲}(p+q)$$

درنتیجه، در واقع: $s_{p+q}=۰$.

۶. داریم: $s_n=\frac{a_۱+a_n}{۲}n$ و $s_m=\frac{a_۱+a_m}{۲}m$ از شرط داده شده نتیجه می‌شود:

$$\frac{a_۱+a_m}{a_۱+a_n}=\frac{a_m}{n}\Rightarrow\frac{۲a_۱+(m-۱)d}{۲a_۱+(n-۱)d}=\frac{m}{n}$$

از این رو:

$$۲a_۱(n-m)+\{(m-۱)n-(n-۱)m\}d=۰$$

بنابراین:

$$a_m=\alpha_۱+(m-۱)d=\frac{d}{۲}+(m-۱)d=\frac{۲m-۱}{۲}d,\quad a_n=\frac{۲n-۲}{۲}d$$

و سرانجام $\frac{a_m}{a_n}=\frac{۲m-۱}{۲n-۱}$.

۷. باید ثابت کنیم، به‌ازای n و k (a_n عددهای درست و مثبت $k\geq ۲$) می‌توانیم عدد درست s را طوری انتخاب کنیم که این برابری برقرار باشد:

$$(۲s+۱)+(۲s+۳)+\ldots+(۲s+۲n-۱)=n^k$$

سمت چپ برابر است با: $(۲s+n)n$.

بنابراین باقی می‌ماند اثبات این مطلب که می‌توان یک عدد درست s را طوری پیدا کرد که برابر زیر برقرار باشد:

$$(۲s+n)n=n^k,\quad s=\frac{n(n^{k-۲}-۱)}{۲}$$

اما n می‌تواند زوج یا فرد باشد. در هر دو حالت، s عددی درست خواهد بود که اثبات کامل می‌شود.

۸. فرض کنید $a_2 = d$. آن‌گاه $a_k = a_1 + d(k-1) = d(k-1)$، زیرا بنابه‌فرض $a_1 = 0$. درنتیجه

$$s = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \ldots + \frac{n-1}{n-2} - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-3}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k+1}{k} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-2} = \sum_{k=1}^{n-2} \left(1 + \frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-2} 1 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-2} =$$

$$= n - 2 + \frac{1}{n-2} = \frac{(n-2)d}{(n-2)d} + \frac{d}{(n-2)d} = \frac{a_{n-1}}{a_2} + \frac{a_2}{a_{n-1}}$$

۹. صورت و مخرج هر کسر سمت چپ را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$S = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \ldots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{d}(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}) = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d}$$

از آن‌جا که:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$$

درنتیجه:

$$s = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d} - \frac{a_n - a_1}{d(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1})} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}$$

۱۰. داریم:

$$a_1^2 - a_2^2 = (a_1 - a_2)(a_1 + a_2) = -d(a_1 + a_2)$$

$$a_3^2 - a_4^2 = (a_3 - a_4)(a_3 + a_4) = -d(a_3 + a_4)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{2k-1}^2 - a_{2k}^2 = (a_{2k-1} - a_{2k})(a_{2k-1} + a_{2k}) = -d(a_{2k-1} + a_{2k})$$

بنابراین:

$$s = -d(a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + \ldots + a_{۲k-۱} + a_{۲k}) = -d\frac{a_۱ + a_{۲k}}{۲}۲k$$

اما:

$$a_{۲k} = a_۱ + d(۲k - ۱), \quad a_۱ - a_{۲k} = -d(۲k - ۱)$$

درنتیجه:

$$s = -d(۲k - ۱)\frac{a_۱ + a_{۲k}}{۲k - ۱}k = \frac{k}{۲k - ۱}(a_۱^۲ - a_{۲k}^۲)$$

۱۱. الف) داریم:

$$s(n + ۲) - s(n + ۱) = a_{n+۲},$$
$$s(n + ۳) - s(n) = a_{n+۱} + a_{n+۲} + a_{n+۳}$$

درنتیجه، تنها باید ثابت کنیم:

$$a_{n+۱} + a_{n+۲} + a_{n+۳} - ۳a_{n+۲} = ۰$$

اما می‌توان ثابت کرد: $\frac{a_r + a_s}{۲} = a_{\frac{s+r}{۲}}$.
(اگر r و s یک همنهشتی داشته باشند). در واقع

$$a_r + a_s = ۲a_۱ + (s - ۱)d + (r - ۱)d =$$
$$= ۲[a_۱ + (\frac{r + s}{۲} - ۱)d] = ۲a_{\frac{r+s}{۲}}$$

بنابراین: $a_{n+۱} + a_{n+۳} = ۲a_{n+۲}$
و درنتیجه: $a_{n+۱} + a_{n+۲} + a_{n+۳} - ۳a_{n+۲} = ۰$

ب) قبل از همه $s(۲n) - s(n) = a_{n+۱} + \ldots + a_{۲n} = \frac{a_{n+۱} + a_{۲n}}{۲} \cdot n$
اکنون داریم:

$$s(۳n) = a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n + (a_{n+۱} + \ldots + a_{۲n}) + a_{۲n+۱} + \ldots + a_{۳n} =$$
$$= \frac{a_{n+۱} + a_{۲n}}{۲}n + (a_n + a_{۲n+۱}) + (a_{n-۱} + a_{۲n+۲}) + \ldots + (a_۱ + a_{۳n})$$

اما از آن‌جا که مجموع دو جملهٔ یک تصاعد حسابی، به‌شرطی‌که از دو انتهای آن تصاعد، فاصله‌ای برابر داشته باشد، مقداری ثابت است، داریم:

$$a_n + a_{۲n+۱} = a_{n-۱} + a_{۲n+۲} = \ldots = a_۱ + a_{۳n} = a_{n+۱} + a_{۲n}$$

بنابراین:

$$s(۳n) = \frac{a_{n+۱} + a_{۲n}}{۲}n + (a_{n+۱} + a_{۲n}) \cdot n = ۳\frac{a_{n+۱} + a_{۲n}}{۲}n =$$
$$= ۳(s(۲n) - s(n))$$

۱۲. باتوجه به نمادگذاری داده شده، داریم:

$$s_k = a_{(k-۱)n+۱} + a_{(k-۱)n+۲} + \ldots + a_{kn},$$
$$s_{k+۱} = a_{kn+۱} + a_{kn+۲} + \ldots + a_{(k+۱)n}$$

تفاضل $s_{k+۱} - s_k$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$s_{k+۱} - s_k = [a_{kn+n} - a_{kn}] + \ldots + [a_{kn+۲} - a_{(k-۱)n+۲}] +$$
$$+[a_{kn+۱} - a_{(k-۱)n+۱}]$$

اما چون: $a_m - a_l = (m-l)d$، به‌دست می‌آید:

$$s_{k+۱} - s_k = nd + \ldots + nd + nd = n^۲d$$

۱۳. داریم:

$$b - a = d(q-p),\ c - b = d(r-q),\ c - a = d(r-p)$$

از طرف دیگر:

$$a = u_۱w^{p-۱}, \quad b = u_۱w^{q-۱}, \quad c = u_۱w^{r-۱}$$

که در آن $u_۱$ جملهٔ اول تصاعد هندسی و w قدرنسبت آن است. بنابراین:

$$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = a^{d(q-r)} \cdot b^{d(r-p)} \cdot c^{d(p-q)} =$$
$$= u_۱^{d(q-r)+d(r-p)+d(p-q)} \cdot w^{d\{(q-r)(p-۱)+(r-p)(q-۱)+(p-q)(r-۱)\}}$$

اما به‌سادگی دیده می‌شود:

$$d(q-r)+d(r-p)+d(p-q)=0,$$
$$(q-r)(p-1)+(r-p)(q-1)+(p-q)(r-1)=0$$

و به‌این ترتیب: $a^{b-c}\cdot b^{c-a}\cdot c^{a-b}=1$.

۱۴. داریم: $1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$؛ درنتیجه

$$(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2-x^n=\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)^2-x^n=$$
$$=\frac{(x^{n+1}-1)^2-x^n(x-1)^2}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{x^{2n+2}-2x^{n+1}+1-x^{n+2}+2x^{n+1}-x^n}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{(x^n-1)(x^{n+2}-1)}{(x-1)(x-1)}=$$
$$=(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})(1+x+x^2+\ldots+x^{n+1})$$

۱۵. فرض کنید تصاعد هندسی به‌این صورت باشد:

$$u_1,u_2,\ldots,u_n,u_{n+1},\ldots,u_{2n},u_{2n+1},\ldots,u_{3n}$$

از این‌رو:

$$s_{3n}-s_{2n}=u_{2n+1}+\ldots+u_{3n},\ s_{2n}-s_n=u_{n+1}+\ldots+u_{2n}$$

اما $u_s=u_1q^{s-1}$ و $u_k=u_1q^{k-1}$؛ بنابراین

$$u_k=u_s\cdot q^{k-s},\quad u_{2n+k}=u_kq^{2n}$$

و درنتیجه:

$$s_{3n}-s_{2n}=u_{2n+1}+\ldots+u_{3n}=q^{2n}(u_1+u_2+\ldots+u_n)=q^{2n}s_n,$$
$$s_{2n}-s_n=u_{n+1}+\ldots+u_{2n}=q^n(u_1+u_2+\ldots+u_{2n})=$$
$$=q^n(u_1+u_2+\ldots+u_n)=q^ns_n$$

بنابراین:

$$s_n(s_{3n} - s_{2n}) = q^{2n}s_n^2,\ (s_{2n} - s_n)^2 = q^{2n}s_n^2$$

۱۶. با استفاده از دستور مجموع جمله‌های تصاعد هندسی، حاصل می‌شود:

$$s' = \frac{\frac{1}{a_n}\frac{1}{q} - \frac{1}{a_1}}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{a_nq - a_1}{q-1} \cdot \frac{1}{a_na_1}$$

درنتیجه: $\frac{s}{s'} = a_na_1$؛ از طرف دیگر

$$p^2 = (a_1a_2\ldots a_n)^2 = (a_1a_n)^2$$

از این‌رو: $p = \left(\frac{s}{s'}\right)^{\frac{n}{2}}$.

۱۷. اتحاد لاگرانژ را که در بخش ۱ آورده‌ایم (مساله ۵ را ببینید) در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2) -\\&-(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_{n-1}y_{n-1})^2 =\\&= (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + \ldots + (x_{n-2}y_{n-1} - y_{n-2}x_{n-1})^2\end{aligned}$$

و فرض کنید:

$$\begin{aligned}&x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \ldots, \quad x_{n-1} = a_{n-1},\\&y_1 = a_1, \quad y_2 = a_2, \ldots, \quad y_{n-1} = a_n\end{aligned}$$

در آن صورت، به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2) -\\&-(a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n)^2 =\\&= (a_1a_3 - a_2^2)^2 + (a_1a_4 - a_3a_2)^2 + \ldots + (a_{n-2}a_n - a_{n-1}^2)^2 \quad (*)\end{aligned}$$

عبارت داخل پرانتز سمت راست، به‌صورت، $a_k a_s - a_{k'}a_{s'}$ است $(k+s=k'+s')$. روشن است اگر $a_۱$ و $a_۲$ و ... و a_n تشکیل یک تصاعد هندسی بدهند آن‌گاه (با شرط $k+s=k'+s'$):

$$a_k a_s - a_{k'}a_{s'} = ۰$$

در واقع: $a_s = a_۱ q^{s-۱}$ و $a_k = a_۱ q^{k-۱}$.

$$a_{k'} = a_۱ q^{k'-۱},\ a_{s'} = a_۱ q^{s'-۱}$$

بنابراین: $a_k a_s = a_۱^۲ q^{k+s-۲}$ و

$$a_k a_{s'} = a_۱^۲ q^{k'+s'-۲},$$

$$a_k a_s = a_{k'}a_{s'}$$

بنابراین، اگر $a_n, \ldots, a_۲, a_۱$ تشکیل یک تصاعد هندسی دهند، تمام عبارت‌های داخل پرانتز سمت راست برابری (*)، برابر صفر است و داریم:

$$(a_۱^۲+a_۲^۲+\ldots+a_{n-۱}^۲)(a_۲^۲+a_۳^۲+\ldots+a_n^۲) = (a_۱a_۲+a_۲a_۳+\ldots+a_{n-۱}a_n)^۲$$

اکنون، فرض کنید این رابطه برقرار باشد و باید ثابت کنیم عددهای $a_n, \ldots, a_۲, a_۱$ تشکیل یک تصاعد هندسی می‌دهند. در این حالت، تمام عبارت‌های داخل پرانتز سمت راست برابری (*) برابر صفر است. اما بین این عبارت‌ها، عبارت زیر وجود دارد:

$$(a_۱a_k - a_۲a_{k-۱})^۲ \quad (k=۳,۴,\ldots,n)$$

بنابراین داریم:

$$\frac{a_k}{a_{k-۱}} = \frac{a_۲}{a_۱} \quad (k=۳,۴,\ldots,n)$$

یعنی عددهای $a_n, \ldots, a_۲, a_۱$ تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند.

۱۸. الف) می‌دانیم: $s_m = \dfrac{a_m q - a}{q-۱}$؛ مجموع لازم را تشکیل می‌دهیم:

$$s_۱+s_۲+\ldots+s_n = \frac{a_۱q-a_۱}{q-۱}+\frac{a_۲q-a_۱}{q-۱}+\ldots+\frac{a_nq-a_۱}{q-۱} =$$

$$= \frac{(a_۱+a_۲+\ldots+a_n)q}{q-۱} - \frac{a_۱n}{q-۱} = \frac{(a_nq-a_۱)q}{(q-۱)^۲} - \frac{a_۱n}{q-۱}$$

ب)

$$\frac{۱}{a_۱^۲ - a_۲^۲} + \ldots + \frac{۱}{a_{n-۱}^۲ - a_n^۲} = \frac{۱}{۱ - q^۲}\left\{\frac{۱}{a_۱^۲} + \frac{۱}{a_۲^۲} + \ldots + \frac{۱}{a_{n-۱}^۲}\right\} =$$

$$= \frac{۱}{۱-q^۲}\frac{\frac{۱}{a_{n-۱}^۲}\cdot\frac{۱}{q^۲} - \frac{۱}{a_۱^۲}}{\frac{۱}{q^۲} - ۱} = q^۲\frac{(\frac{۱}{a_n^۲} - \frac{۱}{a_۱^۲})}{(۱-q^۲)۲}$$

ج)

$$\frac{۱}{a_۱^k + a_۲^k} + \ldots + \frac{۱}{a_{n-۱}^k + a_n^k} = \frac{۱}{۱+q^k}\frac{q^k(\frac{۱}{a_n^k} - \frac{۱}{a_۱^k})}{۱-q^k} =$$

$$= \frac{q^k}{۱-q^{۲k}}(\frac{۱}{a_n^k} - \frac{۱}{a_۱^k})$$

۱۹. فرض کنید تصاعد داده شده، $a_n, \ldots, a_۲, a_۱$ باشد. فرض کنید $a_{\overline{k}}$ نمایش جملهٔ kام از انتهای تصاعد باشد. در آن صورت:

$$a_{\overline{k}} = a_n - (k-۱)d, \quad a_k = a_۱ + (k-۱)d$$

حاصل‌ضرب $a_k a_{\overline{k}}$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$a_k a_{\overline{k}} = a_۱ a_{\overline{n}}(k-۱)^۲ d^۲ + (k-۱)d(a_n - a_۱) =$$
$$= a_۱ a_n - (k-۱)^۲ d^۲ + (k-۱)(n-۱)d^۲;$$

و

$$a_k a_{\overline{k}} = a_۱ a_n + d^۲\{(k-۱)(n-۱) - (k-۱)^۲\}$$

تنها باقی می‌ماند اثبات این مطلب که عبارت

$$p_n = (k-۱)(n-۱) - (k-۱)^۲$$

با افزایش n از ۱ تا $\frac{n}{۲}$ یا $\frac{n+۱}{۲}$، داریم:

$$p_k = (k-۱)(n-k), \quad p_{k+۱} = k(n-k-۱);$$
$$p_{k+۱} - p_k = n - ۲k$$

بنابراین: اگر $n - ۲k > ۰$، یعنی $k < \frac{n}{۲}$، آن‌وقت $p_{k+۱} > p_k$.

۲۰. فرض کنید $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ یک تصاعد حسابی و $u_۱, u_۲, \ldots, u_n$ یک تصاعد هندسی باشد. بنابه فرض، $a_۱ = u_۱$ و $u_n = a_n$. فرض کنید قدرنسبت تصاعد هندسی برابر q باشد. در آن صورت:

$$u_n = u_۱ q^{n-۱} = a_n$$

فرض می‌کنیم:

$$a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n = s_n, \quad u_۱ + u_۲ + \ldots + u_n = \sigma_n$$

و ثابت می‌کنیم:

$$s_n \geq \sigma_n$$
$$s_n = \frac{a_۱ + a_n}{۲} \cdot n = \frac{a_۱ + a_۱ q^{n-۱}}{۲} n = a_۱ \frac{۱ + q^{n-۱}}{۲} n$$

داریم: $\sigma_n = \frac{u_n q - u_۱}{q-۱} = a_۱ \frac{q^n - ۱}{q-۱}$؛ از آن‌جاکه بنابه‌فرض، $a_۱ > ۰$، تنها باقی می‌ماند اثبات:

$$\frac{q^n - ۱}{q-۱} \leq \frac{۱ + q^{n-۱}}{۲} n$$

سمت چپ این برابری را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\frac{q^n - ۱}{q-۱} = ۱ + q + q^۲ + \ldots + q^{n-۳} + q^{n-۲} + q^{n-۱} =$$
$$= \frac{۱}{۲}\{(۱ + q^{n-۱}) + (q + q^{n-۲}) +$$
$$+ \ldots + (q^k + q^{n-k-۱}) + \ldots + (q^{n-۱} + ۱)\}$$

ثابت می‌کنیم: $q^k + q^{n-k-۱} \leq ۱ + q^{n-۱}$. درواقع

$$q^k+q^{n-k-۱}-۱-q^{n-۱} = (q^k-۱)+q^{n-k-۱}(۱-q^k) = (q^k-۱)(۱-q^{n-k-۱}) \leq ۰$$

چون اگر $q > ۱$، آن‌گاه $q^k - ۱ \geq ۰$، $۱ - q^{n-k-۱} \leq ۰$ و اگر $q < ۱$، آن‌گاه $q^k - ۱ \leq ۰$ و $۱ - q^{n-k-۱} \geq ۰$. به‌ازای $q = ۱$ و روشن است که حاصل‌ضرب عبارت سمت چپ نابرابری داده شده، برابر صفر است، و بنابراین

$$q^k + q^{n-k-۱} \leq ۱ + q^{n-۱}$$

عبارت داخل کروشه شامل n عبارت کروشه‌ای است که هریک از آن‌ها از $۱ + q^{n-۱}$ بیشتر نیست. بنابراین:

$$\frac{q^{n-۱}}{q-۱} \leq n\frac{۱+q^{n-۱}}{۲} \Rightarrow \sigma_n \leq s_n$$

۲۱. فرض کنید نخستین جملهٔ مشترک تصاعدها a و دومین جملهٔ مشترک b باشد در آن‌صورت جملهٔ nام تصاعد حسابی برابر است با:

$$a + (b-a)(n-۱)$$

و جملهٔ متناظر آن در تصاعد هندسی چنین است:

$$a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-۱}$$

بنابراین، باید ثابت کنیم:

$$a + (b-a)(n-۱) \leq a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-۱}$$

به زبان دیگر

$$a + (b-a)(n-۱) - a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-۱} \leq b;$$

$$a\left\{\left(\frac{b}{a}-۱\right)(n-۱) - \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{n-۱} - ۱\right]\right\} \leq ۰$$

اکنون، سمت چپ این برابری را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$a\left(\frac{b}{a}-۱\right)\left\{(n-۱)-\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{n-۲}+\left(\frac{b}{a}\right)^{n-۳}+\ldots+\left(\frac{b}{a}\right)+۱\right]\right\}$$

به‌طور جداگانه سه حالت $\frac{b}{a} > ۱$، $\frac{b}{a} < ۱$ و $\frac{b}{a} = ۱$ را در نظر می‌گیریم. به‌سادگی درستی نابرابری ثابت می‌شود.

۲۲. باید عبارت $s_n = ۱\cdot x + ۲x^۲ + ۳x^۳ + \ldots + nx^n$ را محاسبه کنیم. دو طرف این برابری را در x ضرب می‌کنیم:

$$s_n x = ۱\cdot x^۲ + ۲x^۳ + ۳x^۴ + \ldots + (n-۱)x^n + nx^{n+۱}$$

روشن است که سمت راست برابر است با:

$$s_n - x - x^۲ - x^۳ - \ldots - x^n + nx^{n+۱}$$

بنابراین، به این اتحاد می‌رسیم:

$$s_n x = s_n + nx^{n+۱} - x(۱+x+x^۲+\ldots+x^{n-۱});$$
$$s_n(x-۱) = nx^{n+۱} - x\frac{x^n-۱}{x-۱};$$
$$s_n(x-۱)^۲ = x\{nx^{n+۱}+۱-(n+۱)x^n\}$$

و سرانجام، به‌دست می‌آید:

$$s_n = \frac{x}{(x-۱)^۲}\{nx^{n+۱}-(n+۱)x^n+۱\}$$

۲۳. داریم: $s = \sum_{k=۱}^{n} a_k u_k$ دو طرف این برابری را در q ضرب می‌کنیم (q، قدرنسبت تصاعد هندسی است). به‌دست می‌آید: $sq = \sum_{k=۱}^{n} a_k u_{k+۱}$ (زیرا $u_k q = u_{k+۱}$).

s را از دو طرف برابری اخیر کم می‌کنیم:

$$sq - s = \sum_{k=۱}^{n} a_k u_{k+۱} - \sum_{k=۱}^{n} a_k u_k$$

سمت راست را به این صورت می‌نویسیم:

$$\sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1}u_k - \sum_{k=2}^{n+1} a_k u_k - a_1u_1 + a_{n+1}u_{n+1} =$$
$$= -\sum_{k=2}^{n+1}(a_k - a_{k-1})u_k - a_1u_1 + a_{n+1}u_{n+1} =$$
$$= -\sum_{k=2}^{n+1} du_k + a_{n+1}u_{n+1} - a_1u_1$$

که در آن، d قدرنسبت تصاعد حسابی است. بنابراین:

$$s(q-1) = -d\sum_{k=2}^{n+1} u_k + a_{n+1}u_{n+1} - a_1u_1;$$
$$s(q-1) = a_{n+1}u_{n+1} - a_1u_1 - d\frac{u_{n+1}q - u_2}{q-1};$$
$$s = \frac{a_{n+1}u_{n+1} - a_1u_1}{q-1} - d\frac{u_{n+1}q - u_2}{(q-1)^2}$$

۲۴. این مجموع را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \ldots + \frac{1}{x^{2n}} + 2n$$

جمله‌های هر تصاعد هندسی را به‌طور جداگانه جمع و مجموع‌های جزیی به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 + \ldots + \left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2 =$$
$$= \frac{(x^{2n+2}+1)(x^{2n}-1)}{(x^2-1)x^{2n}} + 2n$$

۲۵. مجموع s_1 به‌سادگی به‌کمک دستور مجموع در تصاعد حسابی محاسبه می‌شود. اکنون s_2 را محاسبه می‌کنیم. این اتحاد را در نظر می‌گیریم:

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

در این اتحاد، x را به‌ترتیب برابر ۱، ۲، ...، n می‌گیریم و برابری‌های حاصل را با هم جمع می‌کنیم

$$\sum_{x=۱}^{n}(x+۱)^{۳}-\sum_{x=۱}^{n}x^{۳}=۳\sum_{x=۱}^{n}x^{۲}+۳\sum_{x=۱}^{n}x+n;$$
$$\{۲^{۳}+۳^{۳}+\ldots+n^{۳}+(n+۱)^{۳}\}-$$
$$-\{۱^{۳}+۲^{۳}+\ldots+n^{۳}\}=۳s_{۲}+۳s_{۱}+n$$

و بنابراین

$$۳s_{۲}+۳s_{۱}+n=(n+۱)^{۳}-۱$$

ولی می‌دانیم $s_{۱}=\frac{n(n+۱)}{۲}$، درنتیجه

$$s_{۲}=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

دستور مربوط به $s_{۳}$ به‌صورت مشابه به‌دست می‌آید. تنها باید این اتحاد را در نظر گرفت:

$$(x+۱)^{۴}-x^{۴}=۴x^{۳}+۶x^{۲}+۴x+۱$$

و از عبارت‌های مربوط به $s_{۱}$ و $s_{۲}$ که پیدا شده، استفاده کنیم.

۲۶. این اتحاد را داریم:

$$(x+۱)^{k+۱}-x^{k+۱}=(k+۱)x^{k}+\frac{(k+۱)k}{۱\times۲}x^{k-۱}+$$
$$+\frac{(k+۱)k(k-۱)}{۱\times۲\times۳}x^{k-۲}+\ldots+(k+۱)x+۱$$

در این‌جا به‌جای x به‌ترتیب عددهای ۱، ۲، ...، n را قرار دهید و با جمع آن‌ها، دستور مطلوب را به‌دست آورید.

۲۷. این جدول مربعی را در نظر بگیرید:

۱^k	۲^k	۳^k	۴^k	...	n^k
۱^k	۲^k	۳^k	۴^k	...	n^k
۱^k	۲^k	۳^k	۴^k	...	n^k
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
۱^k	۲^k	۳^k	۴^k	...	n^k

مجموع جمله‌های هر سطر برابر است با

$$۱^k + ۲^k + \ldots + n^k = s_k(n)$$

به‌این ترتیب، مجموع همهٔ جمله‌های جدول، برابر است با $ns_k(n)$.
از طرف دیگر، با جمع جمله‌های درون خط‌های شکسته، برای مجموع همهٔ جمله‌ها، به‌دست می‌آید:

$$۱^k + (۱^k + ۲ \times ۲^k) + (۱^k + ۲^k + ۳ \times ۳^k) + (۱^k + ۲^k + ۳^k + ۴ \times ۴^k) + \ldots +$$
$$+(۱^k + ۲^k + ۳^k + \ldots + (n-۱)^k + n \times n^k) = ۱ + [s_k(۱) + ۲^{k+۱}] + [s_k(۲)$$
$$+۳^{k+۱}] + [s_k(۳) + ۴^{k-۱}] + \ldots + [s_k(n-۱) + n^{k+۱}] =$$
$$= s_k(۱) + s_k(۲) + \ldots + s_k(n-۱) + (۱^{k+۱} + ۲^{k+۱} + ۳^{k+۱} + \ldots + n^{k+۱})$$

و به‌این ترتیب:

$$ns_k(n) = s_{k+۱}(n) + s_k(n-۱) + s_k(n-۲) + \ldots + s_k(۲) + s_k(۱)$$

۲۸. الف و ب را می‌توان از دستور مساله ۲۶ به‌دست آورد. آن را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$s_k = -\frac{k}{۲}s_{k-۱} - \frac{k(k-۱)}{۱ \times ۲ \times ۳}s_{k-۲} - \ldots - s_۱ - \frac{s_۰}{k+۱} + \frac{(n+۱)^{k+۱} - ۱}{k+۱} \quad (*)$$

به‌ازای $k = ۱$ داریم:

$$۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n = \frac{n^۲ + n}{۲} = \frac{۱}{۲}n^۲ + \frac{۱}{۲}n$$

به‌این ترتیب، به‌ازای $k = ۱$ هردو بخش الف و ب درست است. فرض کنید که به‌ازای هر مقدار اندیس کوچکتر از k برابری برقرار باشد، ثابت می‌کنیم، در این صورت، این برابری‌ها، به‌ازای اندیس k نیز درست است. از آن‌جا که، بنابه فرض، $s_{k-۱}$ یک چندجمله‌ای برحسب n و از درجهٔ k است، $s_{k-۲}$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $k-۱$ است و تا آخر. به‌سادگی از $(*)$ ملاحظه می‌شود که s_k یک چندجمله‌ای از درجهٔ $k+۱$ است. علاوه بر این، اگر

s_{k-1}، s_{k-2}، ...، s_0 شامل جملهٔ مستقل از n نیست. روشن است که s_k نیز شامل چنین جمله‌ای نیست (هرگاه $\frac{(n+1)^k-1}{k+1}$ برحسب توان‌های n بسط داده شود، شامل جملهٔ ثابت نیست). همان‌طور که از دستور (*) پیدا است، ضریب جملهٔ بزرگترین درجه در بسط s_k برحسب توان‌های n، برابر $\frac{1}{k+1}$ است. تنها باقی می‌ماند اثبات این مطلب که ضریب جملهٔ دوم، یعنی B برابر $\frac{1}{2}$ است. در بسط (*) تنها دو جمله وجود دارد که شامل n^k است. یکی از آن‌ها، به‌صورت $\frac{-k}{2}s_{k-1}$ و دیگری به‌صورت $\frac{(n+1)^{k+1}-1}{k+1}$ است. از آنچه ثابت کرده‌ایم، نتیجه می‌شود:

$$-\frac{k}{2}s_{k-1}=-\frac{k}{2}\left\{\frac{1}{k}n^k+\ldots\right\}=-\frac{1}{2}n^k+\ldots$$

علاوه بر این:

$$\frac{(n+1)^{k+1}-1}{k+1}=\frac{1}{k+1}n^{k+1}+n^k+\ldots$$

از این‌رو روشن است که $B=\frac{1}{2}$.

باتوجه به ساختار بقیهٔ ضریب‌ها (c، ...، l) می‌توان ادعا کرد که: ضریب n^{k+1-l} برابر است با:

$$c_{k+1}^{l}\frac{A}{k+1}$$

که در آن A مستقل از k است. این مطلب را می‌توان به‌کمک دستور (*) با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کرد.

۲۹. s_4 را می‌توان، مثلاً، با استفاده از دستور مساله ۲۶ محاسبه کرد. علاوه بر این، می‌توان به این صورت نیز عمل کرد. از نتیجهٔ مسالهٔ قبل روشن است که:

$$s_4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+Cn^3+Dn^2+En$$

تنها تعیین C و D و E باقی می‌ماند. از آن‌جا که این برابری، یک اتحاد است، به‌ازای تمام مقدارهای n برقرار است. در این‌جا به‌ترتیب n را برابر ۱، ۲ و ۳ قرار می‌دهیم. به یک

دستگاه با سه مجهول C، D و E می‌رسیم:

$$C+D+E=\frac{۳}{۱۰}$$

$$۸C+۴D+۲E=\frac{۱۳}{۵}$$

$$۲۷+C+۹D+۳E=\frac{۸۹}{۱۰}$$

که از آن به‌دست می‌آید:

$$C=\frac{۱}{۳},\quad D=۰,\quad E=-\frac{۱}{۳۰}$$

اکنون، با تجزیهٔ عبارت $\frac{n^۵}{۵}+\frac{n^۴}{۲}+\frac{n^۳}{۳}-\frac{n}{۱۰}$، می‌توان نتیجهٔ مطلوب را به‌دست آورد. سه دستور دیگر، با روش مشابه ثابت می‌شود.

۳۰. درستی اتحادها را می‌توان با بررسی مستقیم و با استفاده از عبارت مربوط s_n مانند قبل به‌دست آورد.

۳۱. قرار دهید $k=۱$. به‌دست می‌آید:

$$(B+۱)^۲-B^۲=۲$$

یا $B_۲-۲B_۱-B_۲=۲$، یعنی $B_۱=\frac{۱}{۲}$ و اگر $k=۲$ بگیریم:

$$(B+۱)^۳-B^۳=۳;$$
$$B_۳+۳B_۲+۳B_۱+۱-B_۳=۳\Rightarrow B_۲=\frac{۱}{۶}$$

به‌همین ترتیب به‌دست می‌آید:

$$B_۱=\frac{۱}{۲},\quad B_۶=\frac{۱}{۴۲},\quad B_{۱۱}=۰,\quad B_{۱۶}=-\frac{۳۶۱۷}{۵۱۰}=$$
$$B_۲=\frac{۱}{۶},\quad B_۷=۰,\quad B_{۱۲}=-\frac{۶۹۱}{۲۷۳۰},\quad B_{۱۷}=۰$$
$$B_۳=۰,\quad B_۸=-\frac{۱}{۳۰},\quad B_{۱۳}=۰,\quad B_{۱۸}=\frac{۴۳۸۶۷}{۷۹۸}$$

$$B_۴ = -\frac{۱}{۳۰}, \quad B_۹ = ۰, \quad B_{۱۲} = \frac{۷}{۶}, \quad B_{۱۹} = ۰$$

$$B_۵ = ۰, \quad B_{۱۰} = \frac{۵}{۶۵}, \quad B_{۱۵} = ۰$$

با دانستن این آگاهی‌ها، به‌آسانی می‌توان مساله ۲۹ را حل کرد، یعنی $s_۴$ و $s_۵$ و $s_۶$ و $s_۷$ را برحسب توان‌های n مرتب کرد. این عددها، نقش بسیار قابل‌توجهی در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات بازی می‌کند و دارای ویژگی جالبی هستند. این عددها به عددهای برنولی معروف‌اند. اکنون نشان می‌دهیم، برای kهای فرد بزرگتر از واحد، B_k برابر صفر است و عددهای برنولی که اندیس زوج دارند با سرعت بیشتری صعود می‌کنند. حال مقدار $B_{۱۹۶}$ را در نظر می‌گیریم. اگر قرار دهیم $B_{۱۹۶} = -\frac{z}{N}$، آن‌گاه محاسبه شده است که:

$$z = ۶۲۷۵۳ \quad ۱۳۵۱۱ \quad ۹۳۶۷۲ \quad ۵۵۳۱۰ \quad ۶۶۹۹۸$$
$$۹۳۷۱۳ \quad ۶۰۳۱۵\ldots$$

به‌این ترتیب، صورت این عدد شامل ۲۱۵ رقم است (د.هـ لمر ۱۹۳۵). اکنون رابطه ب را ثابت می‌کنیم.

باتوجه به نتیجه مساله ۲۸، می‌توان قرار داد:

$$(k+۱)(۱^k+۲^k+۳^k+\ldots+n^k) = n^{k+۱}+\frac{k+۱}{۲}n^k+cn^{k-۱}+Dn^{k-۲}+\ldots+Ln$$

که در آن C و D و ...، L مستقل از n و بی‌شک وابسته به k هستند. قرار دهید:

$$(k+۱)(۱^k+۲^k+۳^k+\ldots+n^k) = n^{k+۱}+c_{k+۱}^{۱}\alpha_۱ n^k+c_{k+۱}^{۲}\alpha_۲ n^{k-۱}+$$
$$+\ldots+c_{k+۱}^{k-۱}\alpha_{k-۱}n^۲+c_{k+۱}^{k}\alpha_k n$$

در این صورت، می‌توان برابری نمادهای زیر را نوشت:

$$(k+۱)(۲^k+۲^k+\ldots+n^k) = (n+\alpha)^{k+۱}-\alpha^{k+۱}$$

با حذف پرانتزهای طرف راست و با تبدیل α^s به α_s $(s = ۰, ۱, ۲, \ldots)$، از برابری نمادی به برابری معمولی می‌رسیم.

از آن‌جا که این برابریِ نسبت به n یک اتحاد است، می‌توان در آن n را به $n+۱$ تبدیل کرد و به‌دست آورد:

$$(k+۱)[۱^k+۲^k+\ldots+(n+۱)^k]=(n+۱+\alpha)^{k+۱}-\alpha^{k+۱}$$

از این برابری، برابری قبل را کم می‌کنیم، حاصل می‌شود:

$$(k+۱)(n+۱)^k=(n+۱+\alpha)^{k+۱}-(n+\alpha)^{k+۱}$$

در این‌جا قرار می‌دهیم $n=۰$:

$$(\alpha+۱)^{k+۱}-\alpha^{k+۱}=k+۱$$

علاوه بر این، باید به یاد داشت (جواب مساله ۲۸ را ببینید) که αها مستقل از k هستند و $\alpha_۱=\frac{۱}{۲}$.

بنابراین، عددهای α_k و β_k، تنها از یک رابطه به‌دست می‌آیند و $\beta_۱=\alpha_۱$. بنابراین، به‌ازای هر k: $\alpha_k=\beta_k$.

۳۲. فرض کنید d قدرنسبت این تصاعد باشد. آن‌گاه

$$x_k=x_۱+d(k-۱)$$

از برابری اول داریم:

$$\frac{x_۱+x_۲}{۲}n=a,\quad nx_۱+d\frac{n(n-۱)}{۱\times۲}=a \qquad (*)$$

از طرف دیگر،

$$x_k^۲=x_۱^۲+۲x_۱d(k-۱)+d^۲(k-۱)^۲$$

بنابراین، از رابطهٔ دوم حاصل می‌شود:

$$\sum_{k=۱}^{n}x_k^۲=nx_۱^۲+۲x_۱d\sum_{k=۱}^{n}(k-۱)+d^۲\sum_{k=۱}^{n}(k-۱)=b^۲;$$

$$nx_۱^۲+۲x_۱d\frac{n(n-۱)}{۱\times۲}+d^۲\frac{(n-۱)n(۲n-۱)}{۶}=b^۲ \qquad (۱)$$

(مساله ۲۵ را ببینید)

دو طرف برابری (*) رابه توان دو می‌رسانیم و بر n تقسیم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$nx_1^2 + 2x_1 d\frac{n(n-1)}{1\times 2} + d^2\frac{n(n-1)^2}{4} = \frac{a^2}{n} \qquad (2)$$

(۲) را از (۱) کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{d^2 n(n^2-1)}{12} = \frac{b^2 n - \alpha^2}{n} \Rightarrow d = \pm\frac{2\sqrt{3(b^2 n - a^2)}}{n\sqrt{n^2-1}}$$

d را از برابری (*) کم می‌کنیم، x_1 به‌دست می‌آید، درنتیجه، می‌توان تصاعد حسابی را به‌طور کامل تشکیل داد.

۳۳. الف) قرار دهید: $s = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1}$. درنتیجه $x \cdot s = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^k$.

برابری اول را از برابری دوم کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$s(x-1) = \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)^2 x^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1};$$

$$s(x-1) = \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 x^{k-1} + n^2 x^n - \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1};$$

$$s(x-1) = n^2 x^n - \sum_{k=1}^{n}(2k-1)x^{k-1} = n^2 x^n - 2\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$$

$$= n^2 x^n - 2\frac{1}{(x-1)^2}\{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1\} + \frac{x^n - 1}{x-1}$$

(مساله ۲۲ را ببینید). سرانجام

$$1+4x+9x^2+\ldots+n^2 x^{n-1} = \frac{n^2 x^n (x-1)^2 - 2nx^n(x-1) + (x^n-1)(x+1)}{(x-1)^3}$$

ب) مانند حالت قبل عمل کنید. قرار دهید:

$$s = 1^3 + 2^3 x + 3^3 x^2 + \ldots + n^3 x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k^3 x^{k-1}$$

تفاضل زیر را تشکیل دهید:

$$sx - s = n^۳x^n - ۳\sum_{k=۱}^{n} k^۲x^{k-۱} + ۳\sum_{k=۱}^{n} kx^{k-۱} - \sum_{k=۱}^{n} x^{k-۱}$$

عبارت‌های به‌دست آمده را به‌جای مجموع طرف راست قرار دهید، داریم:

$$s(x-۱) = n^۳x^n - ۳\frac{n^۲x^n(x-۱)^۲ - ۲nx^n(x-۱) + (x^n-۱)(x+۱)}{(x-۱)^۳} +$$

$$+۳\frac{nx^{n+۱} - (n+۱)x^n + ۱}{(x-۱)^۲} - \frac{x^n-۱}{x-۱}$$

سرانجام

$$s(x-۱)^۴ = n^۳x^n(x-۱)^۳ - ۳n^۲x^n(x-۱)^۲ + ۳nx^n(x^۲-۱) - (x^n-۱)(x^۲+۴x+۱)$$

۳۴. برای به‌دست آوردن مجموع‌های مورد نظر، نخست این مجموع را محاسبه می‌کنیم:

$$۱ + ۳x + ۵x^۲ + \ldots (۲n-۱)x^{n-۱} = \sum_{k=۱}^{n}(۲k-۱)x^{k-۱} =$$

$$= ۲\sum_{k=۱}^{n} kx^{k-۱} - \sum_{k=۱}^{n} x^{k-۱} = \frac{۲nx^n(x-۱) - (x+۱)(x^n-۱)}{(x-۱)^۲}$$

برای محاسبهٔ مجموع اول، در دستور به‌دست آمده $x = \frac{۱}{۲}$ قرار دهید. حاصل می‌شود:

$$۱ + \frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۴} + \frac{۷}{۸} + \ldots + \frac{۲n-۱}{۲^{n-۱}} = \frac{۱}{۲^{n-۱}}\{۳(۲^n-۱) - ۲n\}$$

و با فرض $x = -\frac{۱}{۲}$، به‌دست می‌آید:

$$۱ - \frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۴} - \frac{۷}{۸} + \ldots + (-۱)^{n-۱}\frac{۲n-۱}{۲^{n-۱}} = \frac{۲^n + (-۱)^{n+۱}(۶n+۱)}{۹ \times ۲^{n-۱}}$$

۳۵. الف) نخست فرض کنید n زوج باشد. قرار دهید $n = 2m$. در آن صورت:

$$1-2+3-4+\ldots+(-1)^{n-1}n = 1-2+3-4+\ldots+(2m-1)-2m = (1+3+\ldots+2m-1)-(2+4+\ldots+2m) = -m = -\frac{n}{2}$$

اکنون، فرض کنید n فرد باشد و قرار دهید $n = 2m-1$. آن‌گاه مجموع به‌این صورت درمی‌آید:

$$\begin{aligned}&[1-2+3-4+\ldots-(2m-2)]+(2m-1) = \\ &= -(m-1)+2m-1 = m = \frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

به این ترتیب، اگر فرض کنیم:

$$1-2+3-4+\ldots+(-1)^{n-1}n = s$$

آن‌وقت، اگر n زوج باشد، $s = -\frac{n}{2}$ و اگر n فرد باشد $s = \frac{n+1}{2}$.

باوجود این: این نتیجه را می‌توان با روش ساده‌تری به‌دست آورد. درواقع، اگر n باوجود این: این نتیجه را می‌توان با روش ساده‌تری به‌دست آورد. درواقع، اگر n زوج باشد، داریم:

$$\begin{aligned}&s = [1-2]+[3-4]+[5-6]+\ldots+[(2m-1)-2m] = \\ &= -1\times m = -m = -\frac{n}{2}\end{aligned}$$

برای n فرد هم، همان نتیجه به‌دست می‌آید.

ب) نخست فرض کنید n زوج باشد و قرار دهید $n = 2m$، داریم:

$$\begin{aligned}&1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}n^2 = \\ &= (1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\ldots+[(2m-1)^2-(2m)^2] = \\ &= -(1+2)-(3+4)-\ldots-(2m-1+2m) = -[1+2+3+4+\ldots+ \\ &+2m-1+2m] = -\frac{(2m+1)2m}{2} = -\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

و به‌این ترتیب، اگر n زوج باشد، آن‌گاه

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = -\frac{n(n+1)}{1 \times 2}$$

اگر $n = 2m + 1$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
&1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = \\
&= 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 - \ldots - (2m)^2 + (2m+1)^2 = \\
&= \frac{-2m(2m+1)}{2} + (2m+1)^2 = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{1 \times 2}
\end{aligned}$$

ج) این مجموع برابر است با $-8n^2$. نتیجه مانند حالت قبل به‌دست می‌آید.

د) مجموع را، به این صورت می‌نویسیم:

$$\sum_{k=1}^{n}(k^3 + k^2) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(3n^2 + 7n + 2)}{12}$$

(مساله ۲۵ را ببینید).

۳۶. این مجموع را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\frac{10 - 1}{9} + \frac{10^2 - 1}{9} + \frac{10^3 - 1}{9} + \ldots + \frac{10^n - 1}{9}$$

که از آن به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{9}\left\{10\frac{10^n - 1}{9} - n\right\}$$

۳۷. عبارت داخل آکولاد سمت راست در نظر می‌گیریم و آن را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
&2x^{2n+1} - 2x^{2n-1}y^2 + 2x^{2n-3}y^4 - \ldots \pm 2xy^{2n} - x^{2n+1} = \\
&= 2x\frac{x^{2n+2} + y^{2n+2}}{x^2 + y^2} - x^{2n+1}
\end{aligned}$$

عبارت داخل آکولاد و دوم در نتیجهٔ تبدیل حرف‌های x و y از عبارت اول به‌دست می‌آید و بنابراین برابر $2y\frac{x^{2n+2}+y^{2n+2}}{x^2+y^2}-y^{2n+1}$ است. هر دو عبارت را به توان دو می‌رسانیم و نتیجه‌ها را جمع می‌کنیم، به‌سادگی درستی اتحاد ثابت می‌شود.

۳۸. حاصل‌ضرب برابر است با:

$$(1\times a+1\times a^2+\ldots+1\times a^{n-1})+(a\times a^2+\ldots+aa^{n-1})+(a^2a^3+\ldots$$
$$+a^2a^{n-1})+\ldots+a^{n-2}\times a^{n-1}=a(1+a+\ldots+a^{n-2})+a^3(1+a+\ldots$$
$$\ldots+a^{n-3})+a^5(1+a+\ldots+a^{n-4})+\ldots+a^{2n-5}(1+a)+a^{2n-3}=$$
$$=a\frac{a^{n-1}-1}{a-1}+a^3\frac{a^{n-2}-1}{a-1}+a^5\frac{a^{n-3}-1}{a-1}+\ldots+a^{2n-5}\frac{a^2-1}{a-1}+$$
$$+a^{2n-3}\frac{a-1}{a-1}=\frac{1}{a-1}\{(a^n+a^{n+1}+a^{n+2}+\ldots+a^{2n-3}+a^{2n-2})-$$
$$-(a+a^3+a^5+\ldots+a^{2n-5}+a^{2n-3})\}=\frac{(a^n-1)(a^n-a)}{(a-1)(a^2-1)}$$

۳۹. مجموع سمت چپ را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$\left(\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{2}{x^{n-2}}+\ldots+\frac{n-1}{x}\right)+[x^{n-1}+2x^{n-2}+\ldots+(n-1)x]+n$$

عبارت داخل پرانتز اول برابر است با:

$$\frac{1}{x^n}[x+2x^2+\ldots+(n-1)x^{n-1}]=\frac{x[(n-1)x^n-nx^{n-1}+1]}{x^n(x-1)^2}$$

(مساله ۲۲ را ببینید) عبارت داخل کروشهٔ دوم از عبارت اول و با تبدیل x به $\frac{1}{x}$ به‌دست می‌آید. بنابراین، به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

۴۰. الف) داریم:

$$\frac{1}{1\times 2}=1-\frac{1}{2}$$

$$\frac{۱}{۲\times ۳}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}$$
$$\frac{۱}{۳\times ۴}=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{۱}{n(n+۱)}=\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}$$

و از مجموع این برابری‌ها، به جواب مطلوب دست می‌یابیم.

ب) مجموع مطلوب را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$s=\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k(k+۱)(k+۲)}$$

اما:

$$\frac{۱}{k(k+۱)(k+۲)}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{k+۲}$$

بنابراین:

$$s=\frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\ldots+\frac{۱}{n}\right)+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\ldots+\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}\right)-$$
$$\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\ldots\ldots+\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n+۱}\right)=\frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\ldots+\frac{۱}{n}\right)+$$
$$+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}\right)-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{n+۱}-\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\ldots+\frac{۱}{n}\right)=$$
$$=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{n+۲}-\frac{۱}{۲}\frac{۱}{n+۱}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{(n+۱)(n+۲)}\right)$$

ج) مانند مسالهٔ قبل حل می‌شود.

۴۱. این مجموع برابر است با:

$$s=\sum_{k=۱}^{n}\frac{k^{۲}}{۴k^{۲}-۱};$$

$$۱۶s=\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱۶k^{۴}-۱+۱}{۴k^{۲}-۱}=\sum_{k=۱}^{n}(۴k^{۲}+۱)+\frac{۱}{۲}\sum_{k=۱}^{n}\frac{(۲k+۱)-(۲k-۱)}{(۲k-۱)(۲k+۱)};$$

$$۱۶s = ۴\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} + n + \frac{۱}{۲}\sum_{k=۱}^{n}\left(\frac{۱}{۲k-۱} - \frac{۱}{۲k+۱}\right)$$

$$۱۶s = \frac{۲n(n+۱)(۲n+۱)}{۳} + n + \frac{۱}{۲}\{۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۵} + \ldots +$$

$$+\frac{۱}{۲n-۱} - \frac{۱}{۲n+۱}\}, \quad ۱۶s = \frac{۲n(n+۱)(۲n+۱)}{۳} + n + \frac{n}{۲n+۱}$$

و سرانجام،

$$۱۶s = \frac{m(m^۲+۲)}{۶} - \frac{۱}{۲m}$$

که در آن $m = ۲n+۱$.

۴۲. داریم:

$$\frac{۱}{a_۱a_n} = \frac{۱}{a_۱+a_n}\cdot\frac{a_۱+a_n}{a_۱a_n} = \frac{۱}{a_۱+a_n}\left(\frac{۱}{a_n}+\frac{۱}{a_n}\right);$$

$$\frac{۱}{a_۲a_{n-۱}} = \frac{۱}{a_۲+a_{n-۱}}\frac{a_۲+a_{n-۱}}{a_۲a_{n-۱}} = \frac{۱}{a_۲+a_{n-۱}}\left(\frac{۱}{a_۲}+\frac{۱}{a_{n-۱}}\right);$$

. . . .

$$\frac{۱}{a_na_۱} = \frac{۱}{a_۱+a_n}\frac{a_۱+a_n}{a_۱a_n} = \frac{۱}{a_۱+a_n}\left(\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_n}\right)$$

ولی میدانیم: $a_۱+a_n = a_۲+a_{n-۱} = a_۳+a_{n-۲} = \ldots$

بنابراین، از مجموع برابریها، بهدست میآید:

$$\frac{۱}{a_۱a_n} + \frac{۱}{a_۲a_{n-۱}} + \ldots + \frac{۱}{a_na_۱} = \frac{۲}{a_۱+a_n}\left(\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\ldots+\frac{۱}{a_n}\right)$$

۴۳. الف) روشن است که این اتحاد برقرار است:

$$\frac{۱}{(n+k-۱)!} - \frac{۱}{(n+k)!} = \frac{n+k-۱}{(n+k)!}$$

در این برابری k را، بهترتیب، برابر ۱، ۲، ...، $p+۱$ قرار میدهیم و برابریهای حاصل را با هم جمع میکنیم:

$$\frac{n}{(n+۱)!} + \frac{n+۱}{(n+۲)!} + \ldots + \frac{n+p}{(n+p+۱)!} = \frac{۱}{n!} - \frac{۱}{(n+p+۱)!}$$

ب) داریم:

$$\frac{n}{(n+۱)!}+\frac{n}{(n+۲)!}+\ldots+\frac{n}{(n+p+۱)!}<\frac{n}{(n+۱)!}+\frac{n+۱}{(n+۲)!}+$$
$$+\ldots+\frac{n+p}{(n+p+۱)!}=\frac{۱}{n!}-\frac{۱}{(n+p+۱)!}$$

(بخش الف را ببینید). بنابراین

$$\frac{۱}{(n+۱)!}+\frac{۱}{(n+۲)!}+\ldots+\frac{۱}{(n+p+۱)!}<\frac{۱}{n}\left\{\frac{۱}{n!}-\frac{۱}{(n+p+۱)!}\right\}$$

۴۴. این اتحاد برقرار است:

$$\frac{۱}{z-۱}-\frac{۱}{z+۱}=\frac{۲}{z^۲-۱}$$

در حالت داده شده داریم:

$$\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x+۱}=\frac{۲}{x^۲-۱} \qquad (۱)$$

$$\frac{۱}{x^۲-۱}-\frac{۱}{x^۲+۱}=\frac{۲}{x^۴-۱} \qquad (۲)$$

$$\frac{۱}{x^۴-۱}-\frac{۱}{x^۴+۱}=\frac{۲}{x^۸-۱} \qquad (۳)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{۱}{x^{۲^n}-۱}-\frac{۱}{x^{۲^n}+۱}=\frac{۲}{x^{۲^{n+۱}}-۱} \qquad (n+۱)$$

دو طرف برابری (۱) را در یک، برابری (۲) را در ۲، برابری (۳) را در $۲^۲$، ... و سرانجام دو طرف برابری $(n+۱)$ را در ۲^n ضرب می‌کنیم. با جمع نتیجه‌های به‌دست آمده، حاصل می‌شود:

$$\frac{۱}{x+۱}+\frac{۲}{x^۲+۱}+\ldots+\frac{۲^n}{x^{۲^n}+۱}=\frac{۱}{x-۱}-\frac{۲^{n+۱}}{x^{۲^{n+۱}}-۱}$$

۴۵. داریم:

$$\frac{n+p+1}{n-p+1}\sum_{k=1}^{n-p}\frac{n-p-k+1}{(p+k)(n-k+1)}=$$
$$=\frac{1}{n-p+1}\sum_{k=1}^{n-p}\left(\frac{1}{p+k}+\frac{1}{n-k+1}\right)(n-p-k+1)=$$
$$=\frac{1}{n-p+1}\sum_{k=1}^{n-p}\left(\frac{n+1}{p+k}-\frac{p}{n-k+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{n-p+1}[(n+1)(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{n})-p(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\dots+\frac{1}{p+1})]=$$
$$=\frac{1}{n-p+1}(\frac{1}{p+1}+\dots+\frac{1}{n})(n+1-$$
$$-p)=\frac{1}{p+1}+\dots+\frac{1}{n}=(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})-$$
$$-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p})=s_n-s_p$$

۴۶. داریم:

$$s_n^1=\frac{n+1}{2}-\{\frac{1}{n(n-1)}+\frac{2}{(n-1)(n-2)}+\dots+\frac{n-2}{2\times 3}\}=$$
$$=\frac{n+1}{2}-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k}{(n-k+1)(n-k)}=\frac{n+1}{2}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{-k}{(n-k+1)(n-k)}$$

اکنون کسر $\frac{-k}{(n-k+1)(n-k)}$ را به دو کسر جزیی تفکیک میکنیم. یعنی قرار میدهیم:

$$\frac{-k}{(n-k+1)(n-k)}=\frac{A}{n-k+1}+\frac{B}{n-k}$$
$$-k=A(n-k)+B(n-k+1)$$

از اینرو، نخست قرار دهید $k=n$ و آنگاه قرار دهید $k=n+1$، بهدست میآید:

$$A=n+1,\quad B=-n$$

بنابراین:

$$s=\frac{n+۱}{۲}+(n+۱)\sum_{k=۱}^{n-۲}\frac{۱}{n-k+۱}-n\sum_{k=۲}^{n-۲}\frac{۱}{n-k}=$$
$$=\frac{n+۱}{۲}+(n+۱)(\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n-۱}+$$
$$+\ldots+\frac{۱}{۳})-n(\frac{۱}{n-۱}+\frac{۱}{n-۲}+\ldots+\frac{۱}{۲})=$$
$$=\frac{n+۱}{۲}+n(\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n-۱}+\ldots+\frac{۱}{۳})+$$
$$+(\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n-۱}+\ldots+\frac{۱}{۳})-n[(\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n-۱}+\ldots+\frac{۱}{۳})-\frac{۱}{n}+\frac{۱}{۲}]=$$
$$=\frac{n+۱}{۲}+(\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n-۱}+\ldots+\frac{۱}{۳})+۱-\frac{n}{۲}=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\ldots+\frac{۱}{n}$$

۴۷. فرض کنید جملهٔ nام تصاعد مطلوب a_n و قدرنسبت آن d باشد، آن‌گاه

$$s_x=\frac{a_۱+a_x}{۲}x,\quad s_{kx}=\frac{a_۱+a_{kx}}{۲}kx$$

از این‌رو

$$\frac{s_{kx}}{s_x}=\frac{a_۱+a_{kx}}{a_۱+a_x}\cdot k=\frac{۲a_۱+d(kx-۱)}{۲a_۱+d(x-۱)}k=\frac{۲a_۱-d+kxd}{۲a_۱-d+dx}\cdot k$$

برای این‌که رابطهٔ اخیر مقداری مستقل از x داشته باشد، لازم و کافی است که

$$۲a_۱-d=۰$$

یعنی قدرنسبت تصاعد مطلوب باید دوبرابر جملهٔ اول آن باشد.

۴۸. می‌توان این رابطه را با شرط $k+l=k'+l'$، ثابت کرد:

$$a_k+a_l=a_{k'}+a_{l'}$$

درواقع

$$a_k=a_۱+(k-۱)d,\quad a_l=a_۱+(l-۱)d,$$

$$a_{k'} = a_۱ + (k' - ۱)d, \quad a_{l'} = a_۱ + (l' - ۱)d;$$
$$a_k + a_l = ۲a_۱ + (k + l - ۲)d;$$
$$a_{k'} + a_{l'} = ۲a_۱ + (k' + l' - ۲)d$$

اما از آن‌جاکه بنابه فرض: $k + l = k' + l'$، نتیجه می‌شود:

$$a_k + a_l = a_{k'} + a_{l'}$$

و از این‌جا داریم:

$$a_i + a_{i+۲} = a_{i+۱} + a_{i+۱} = ۲a_{i+۱}$$

بنابراین جمع داده شده به‌این صورت تبدیل می‌شود:

$$s = \sum_{i=۱}^{n} \frac{a_i a_{i+۱} a_{i+۲}}{a_i + a_{i+۲}} = \frac{۱}{۲} \sum_{i=۱}^{n} a_i a_{i+۲}$$

اما:

$$a_i = a_{i+۱} - d, \quad a_{i+۲} = a_{i+۱} + d$$

بنابراین:

$$s = \frac{۱}{۲} \sum_{i=۱}^{n} (a_{i+۱}^۲ - d^۲) = \frac{۱}{۲} \sum_{i=۱}^{n} [a_۱^۲ + ۲a_۱ d_i + (i^۲ - ۱)d^۲] =$$
$$= \frac{۱}{۲}\{a_۱^۲ n + ۲a_۱ d \frac{n(n+۱)}{۲} - nd^۲ + \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} d^۲\} =$$
$$= \frac{۱}{۲} n\{a_۱^۲ + a_۱ d(n+۱) + \frac{(n-۱)(۲n+۵)}{۶} d^۲\}$$

۴۹. همان‌گونه که می‌دانیم:

$$\tan(\alpha + k\beta) - \tan[\alpha + (k-۱)\beta] = \frac{\sin\beta}{\cos(\alpha + k\beta)\cos[\alpha + (k-۱)\beta]}$$

بنابراین:

$$\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{\cos(\alpha+k\beta)\cos[\alpha+(k-۱)\beta]}=\frac{۱}{\sin\beta}\sum_{k=۱}^{n}\{\tan(\alpha+k\beta)-\tan(\alpha+$$
$$+(k-۱)\beta]\}=\frac{۱}{\sin\beta}\{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha+\tan(\alpha+۲\beta)-\tan(\alpha+\beta)+..$$
$$\ldots+\tan(\alpha+n\beta)-\tan(\alpha+(n-۱)\beta\}=\frac{\tan(\alpha+n\beta)-\tan\alpha}{\sin\beta}$$

۵۰. داریم:

$$۲\cot ۲\alpha-\cot\alpha=-\tan\alpha,$$
$$۲\cot\alpha-\cot\frac{\alpha}{۲}=-\tan\frac{\alpha}{۲},$$
$$۲\cot\frac{\alpha}{۲}-\cot\frac{\alpha}{۴}=-\tan\frac{\alpha}{۴},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$۲\cot\frac{\alpha}{۲^{n-۲}}-\cot\frac{\alpha}{۲^{n-۱}}=-\tan\frac{\alpha}{۲^{n-۱}}$$

این برابری‌ها را به‌ترتیب در ۱ و $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۴}$ و ... و $\frac{۱}{۲^{n-۱}}$ ضرب باهم جمع می‌کنیم، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

۵۱. این دستور را در نظر بگیرید:

$$\cos[\alpha+(k-۲)h]-\cos[a+kh]=۲\sin h\sin[a+(k-۱)h]$$

و در آن، k را از ۱ تا n قرار دهید، به‌دست می‌آید:

$$۲\,\mathrm{sinh}\sin a=\cos(a-h)-\cos(a+h),$$
$$۲\sin h\sin(a+h)=\cos a-\cos(a+۲h),$$
$$۲\sin h\sin(a+۲h)=\cos(a+h)-\cos(a+۳h),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$۲\sin h\sin[a+(n-۲)h]=\cos[a+(n-۳)h]-\cos[a+(n-۱)h],$$
$$۲\sin h\sin[a+(n-۱)h]=\cos[a+(n-۲)h]-\cos[a+nh]$$

از مجموع این برابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$۲\sin h\{\sin a+\sin(a+h)+\sin(a+۲h)+\ldots+\sin[a+(n-۱)h]\}=$$
$$=\cos a+\cos(a-h)-\cos(a+nh)-\cos[a+(n-۱)h]=\{\cos a-$$
$$-\cos[a+(n-۱)h]\}+\{\cos(a-h)-\cos(a+nh)\}=$$
$$=۲\sin\frac{n-۱}{۲}h\sin(a+\frac{n-۱}{۲}h)+۲\sin(a+\frac{n-۱}{۲}h)\sin\frac{n+۱}{۲}h=$$
$$=۲\sin(a+\frac{n-۱}{۲}h)\times ۲\sin\frac{nh}{۲}\cos\frac{h}{۲}$$

از آن‌جا

$$\sin a+\sin(a+h)+\sin(a+۲h)+\ldots+\sin[a+(n-۱)h]=$$
$$=\frac{\sin(a+\frac{n-۱}{۲}h)\sin\frac{nh}{۲}}{\sin\frac{h}{۲}}$$

دستور دوم، به‌صورت مشابه به‌دست می‌آید. آن را می‌توان به‌سادگی با تبدیل a به $a-\frac{\pi}{۲}$ از دستور بالا به‌دست آورد.

۵۲. در دستورهای قبل، قرار دهید: $a=۰$ و $h=\frac{\pi}{n}$، به‌دست می‌آید:

$$s=\cot\frac{\pi}{۲n},\quad s'=۰$$

۵۳. با استفاده از نتیجه‌های مساله ۵۱، داریم:

$$\sin\alpha+\sin ۴\alpha+\ldots+\sin[(۲n-۱)\alpha]=\frac{\sin n\alpha\sin n\alpha}{\sin\alpha};$$
$$\cos\alpha+\cos ۳\alpha+\ldots+\cos[(۲n-۱)\alpha]=\frac{\sin n\alpha\cos n\alpha}{\sin\alpha}$$

اثبات بقیه ساده است.

۵۴. این مجموع را می‌توان، مثلاً به‌صورت زیر محاسبه کرد. مجهول‌های s'_n و s''_n را تشکیل دهید. به‌سادگی دیده می‌شود که:

$$s'_n+s''_n=۲n$$

از طرف دیگر:

$$s'_n - s''_n = \cos ۲x + \cos ۴x + \ldots + \cos ۴nx$$

با استفاده از دستور دوم مساله ۵۱، به‌دست می‌آید:

$$\cos ۲x + \cos ۴x + \ldots + \cos ۴nx = \frac{\sin ۲nx \cos(۲n+۱)x}{\sin x}$$

و بنابراین:

$$s'_n - s''_n = \frac{\sin ۲nx \cos(۲n+۱)x}{\sin x},$$
$$s'_n + s''_n = ۲n$$

درنتیجه:

$$s'_n = n + \frac{\sin ۲nx \cos(۲n+۱)x}{۲\sin x},$$
$$s''_n = n - \frac{\sin ۲nx \cos(۲n+۱)x}{۲\sin x}$$

۵۵. اگر از این دستور استفاده کنیم:

$$\sin A \sin B = \frac{۱}{۲}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

در آن صورت:

$$s = \sum_{i=۱}^{p} \sin\frac{m\pi i}{p+۱} \cdot \sin\frac{n\pi i}{p+۱} =$$
$$= \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{p} \cos\frac{(m-n)\pi i}{p+۱} - \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{p} \cos\frac{(m+n)\pi i}{p+۱}$$

اما اگر $m+n$ بر $۲(p+۱)$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه $\cos\frac{(m+n)\pi i}{p+۱} = ۱$ و

$$s = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{p} \cos\frac{(m-n)\pi i}{p+۱} - \frac{۱}{۲}p$$

با استفاده از دستور ب مساله ۵۱، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{p} \cos \frac{(m-n)\pi i}{p+1} = -1$$

از آن‌جا $s = -\frac{p+1}{2}$.

تمام حالت‌های باقی‌مانده به‌صورت مشابه اثبات می‌شود.

۵۶. داریم:

$$\operatorname{arctg}(k+1)x + \operatorname{arctg}(-kx) = \operatorname{arctg}\frac{kx + x - kx}{1-(k+1)x(-kx)} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{x}{1+k(k+1)x^2}$$

از آن‌جا که $(k+1)x(-kx) < 1$ (مساله ۲۵ از فصل ۳ را ببینید)

$$\operatorname{arctg}2x - \operatorname{arctg}x = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+1\times 2x^2},$$

$$\operatorname{arctg}3x - \operatorname{arctg}2x = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+2\times 3x^2},$$

....

$$\operatorname{arctg}(n+1)x - \operatorname{arctg}nx = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+n(n+1)x^2}$$

با جمع این برابری‌ها، به این نتیجه می‌رسیم که مجموع مطلوب برابر است با:

$$\operatorname{arctg}(n+1)x - \operatorname{arctg}x = \operatorname{arctg}\frac{nx}{1+(n+1)x}$$

۵۷. روشن است که:

$$\operatorname{arctg}a_k + \operatorname{arctg}(-a_{k-1}) = \operatorname{arctg}\frac{a_k - a_{k-1}}{1+a_k a_{k-1}} = \operatorname{arctg}\frac{r}{1+a_k a_{k-1}}$$

اکنون، به‌سادگی نتیجه می‌شود که مجموع مطلوب برابر است با:

$$\operatorname{arctg}\frac{a_{n+1} - a_1}{1+a_1 a_{n+1}}$$

۵۸. قرار دهید:

$$۱ + k^{۲} + k^{۴} = -xy, \quad x + y = ۲k$$

(با استفاده از دستور

$$\text{arctg}\frac{x+y}{۱-xy} = \text{arctg}x + \text{arctg}y$$

با شرط $xy < ۱$)

آنگاه:

$$\text{arctg}\frac{۲k}{۲ + k^{۲} + k^{۴}} = \text{arctg}(k^{۲} + k + ۱) - \text{arctg}(k^{۲} - k + ۱)$$

بنابراین:

$$\sum_{k=۱}^{n} \text{arctg}\frac{۲k}{۲ + k^{۲} + k^{۴}} = \text{arctg}۳ - \text{arctg}\,۱ + \text{arctg}۷ -$$
$$-\text{arctg}۳ + \ldots + \text{arctg}(n^{۲} + n + ۱) - \text{arctg}(n^{۲} - n + ۱) =$$
$$= \text{arctg}(n^{۲} + n + ۱) - \frac{\pi}{۴}$$

۵۹. فرض کنید k یکی از عددهای $۱, ۲, \ldots, n-۱$ باشد، با ضرب معادلهٔ اول در $\sin\frac{k\pi}{n}$، معادله دوم در $\sin k\frac{۲\pi}{n}$، معادله سوم در $\sin k\frac{۳\pi}{n}$ و سرانجام، معادله آخر در $\sin k\frac{(n-۱)\pi}{n}$ و با جمع جمله به جملهٔ حاصل‌ضرب‌های به‌دست آمده، حاصل می‌شود:

$$A_۱x_۱ + A_۲x_۲ + \ldots + A_{n-۱}x_{n-۱} =$$
$$= a_۱ \sin k\frac{\pi}{n} + a_۲ \sin k\frac{۲\pi}{n} + \ldots + a_{n-۱} \sin k\frac{(n-۱)\pi}{n}$$

و با استفاده از دستور ب مسالهٔ ۵۱، ثابت می‌شود که:

$$A_l = ۰ \text{ اگر } l = k$$

$$A_l = \frac{n}{۲} \text{ اگر } l = k$$

از آنجا

$$x_k = \frac{۲}{n}\left(a_۱ \sin k\frac{\pi}{n} + a_۲ \cos k\frac{۲\pi}{n} + \ldots + a_n \sin k\frac{(n-۱)\pi}{n}\right)$$
$$(k = ۱, ۲, ۳, \ldots, n-۱)$$

فصل ۸

۱. داریم:

$$\frac{۱}{۲n} = \frac{۱}{۲n}, \frac{۱}{۲n-۱} > \frac{۱}{۲n}, \ldots, \frac{۱}{n+۲} > \frac{۱}{۲n}, \frac{۱}{n+۱} > \frac{۱}{۲n}$$

که از مجموع آنها، بهدست میآید:

$$\frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \ldots + \frac{۱}{۲n} > \frac{۱}{۲n} + \ldots + \frac{۱}{۲n} = \frac{n}{۲n} = \frac{۱}{۲}$$

۲. روشن است که:

$$\frac{۱}{(n+k+۱)(n+k)} < \frac{۱}{(n+k)^۲} < \frac{۱}{(n+k-۱)(n+k)}$$

از طرف دیگر

$$\frac{۱}{(n+k+۱)(n+k)} = \frac{۱}{n+k} - \frac{۱}{n+k+۱},$$
$$\frac{۱}{(n+k-۱)(n+k)} = \frac{۱}{n+k-۱} - \frac{۱}{n+k}$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{n+k} - \frac{۱}{n+k+۱} < \frac{۱}{(n+k)^۲} < \frac{۱}{n+k-۱} - \frac{۱}{n+k}$$

با جمع نابرابری‌هایی که از این نابرابری با قرار دادن k از ۱ تا p به‌دست می‌آید، به رابطهٔ مطلوب می‌رسیم.

۳. فرض کنید n کسر $(n \geq ۱)$ داریم:

$$\frac{۱}{a}, \frac{۱}{b}, \frac{۱}{c}, \frac{۱}{d}, \ldots, \frac{۱}{k}, \frac{۱}{l}$$

با شرط $۲ \leq a < b < c < d < \ldots < k < l$

در این صورت

$$b \geq a + ۱,\ c \geq b + ۱,\ d \geq c + ۱, \ldots,\ l \geq k + ۱$$

و درنتیجه:

$$b \geq a + ۱,\ c \geq a + ۲,\ d \geq a + ۳, \ldots,\ l \geq a + n - ۱$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\ldots+\frac{۱}{l^۲} \leq \frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{(a+۱)^۲}+\ldots+\frac{۱}{(a+n-۱)^۲} < \frac{۱}{a-۱}-\frac{۱}{a+n-۱}$$

از این‌رو

$$\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\ldots+\frac{۱}{l^۲} \leq \frac{n}{(a-۱)(a+n-۱)}$$

اما: $a - ۱ \geq ۱,\ a + n - ۱ \geq n + ۱,\ (a-۱)(a+n-۱) \geq n + ۱$ و

$$\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\ldots+\frac{۱}{l^۲} \leq \frac{n}{n+۱} < ۱$$

۴. در واقع:

$$(n!)^۲ = (۱ \times n) \times (۲(n-۱)) \ldots (n \times ۱)$$

اما $k(n - k + ۱) \geq n$، زیرا

$$k(n-k+۱) - n = (n-k)(k-۱) \geq ۰$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
&۱ \cdot n = n\\
&۲ \times (n-۱) \geq n\\
&۳ \times (n-۲) \geq n\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&n \times ۱ = n
\end{aligned}$$

از آن‌جا $\sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!}$ و $(n!)^۲ \geq n^n$

۵. از آنجاکه $a < \sqrt{a} < a+۱$، داریم:

$$\sqrt{A}+a < ۲a+۱,\ \frac{\sqrt{A}+a}{۲a+۱} < ۱,\ \sqrt{A}-a > ۰$$

از این رو:

$$\frac{(\sqrt{A}+a)\sqrt{A}-a)}{۲a+۱} < \sqrt{a}-a$$

$$\frac{A-a^۲}{۲a+۱} < \sqrt{A}-a,\ \sqrt{A} > a+\frac{A-a^۲}{۲a+۱}$$

اکنون، نابرابری دوم را ثابت می‌کنیم به‌ازای هر مقدار x، این نابرابری وجود دارد:

$$x(۱-x) = x-x^۲ \leq \frac{۱}{۴}$$

در واقع: $x-x^۲-\frac{۱}{۴} = -\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^۲ \leq ۰$

روشن است که تنها به‌ازای $x = \frac{۱}{۲}$، به برابری می‌رسیم.

از آن‌جا که می‌توان فرض کرد $\sqrt{A}-a \neq \frac{۱}{۲}$، داریم:

$$[۱-(\sqrt{A}-a)](\sqrt{A}-a) < \frac{۱}{۴};$$

$$1-(\sqrt{A}-a)<\frac{1}{4(\sqrt{A}-a)};$$
$$(2a+1)-(\sqrt{A}+a)<\frac{1}{4(\sqrt{A}-a)}$$

دو طرف این نابرابری را در $\sqrt{A}-a>0$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(2a+1)(\sqrt{A}-a)-(A-a^2)<\frac{1}{4}$$

از آن‌جا، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{A}<a+\frac{A-a^2}{2a+1}+\frac{1}{4(2a+1)}$$

۶. داریم: $\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}$

از آن‌جا که $\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$، پس

$$\begin{aligned}
&1>2\sqrt{2}-2\\
&\frac{1}{\sqrt{2}}>2\sqrt{3}-2\sqrt{2}\\
&\frac{1}{\sqrt{3}}>2\sqrt{4}-2\sqrt{3}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}
\end{aligned}$$

با جمع این نابرابری‌ها، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

۷. قرار دهید: $\frac{2s-1}{2s}\times\ldots\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4^s}C_{2s}^s=A$.

در این صورت

$$A<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\ldots\times\frac{2s}{2s+1}=\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\ldots\times\frac{2s}{2s-1}\times\frac{1}{2s+1}$$

یعنی

$$A < \frac{۲}{۳} \times \frac{۴}{۵} \times \ldots \times \frac{۲s}{۲s+۱} = \frac{۲}{۱} \times \frac{۴}{۳} \times \frac{۶}{۵} \times \ldots \times \frac{۲s}{۲s-۱} \times \frac{۱}{۲s+۱};$$

$$A < \frac{۱}{A} \times \frac{۱}{۲s+۱};$$

$$A^{۲} < \frac{۱}{۲s+۱} \Rightarrow A < \frac{۱}{\sqrt{۲s+۱}}$$

اما از سوی دیگر:

$$A > \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۴}{۵} \times \ldots \times \frac{۲s-۲}{۲s-۱}$$

$$A = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۵}{۶} \times \ldots \times \frac{۲s-۱}{۲s}$$

با ضرب این رابطهها، بهدست میآید: $A > \frac{۱}{۲\sqrt{s}}$

۸. از آنجا که $\tan\theta = \dfrac{۲\tan\frac{\theta}{۲}}{۱-\tan^{۲}\frac{\theta}{۲}}$، بهدست میآید

$$\cot\theta = \frac{۱ - \dfrac{۱}{\cot^{۲}\frac{\theta}{۲}}}{۲\dfrac{۱}{\cot\frac{\theta}{۲}}} = \frac{\cot^{۲}\frac{\theta}{۲} - ۱}{۲\cot\frac{\theta}{۲}}$$

در نتیجه:

$$۱ + \cot\theta - \cot\frac{\theta}{۲} = ۱ + \frac{\cot^{۲}\frac{\theta}{۲} - ۱}{۲\cot\frac{\theta}{۲}} - \cot\frac{\theta}{۲} =$$

$$= \frac{-۱}{۲\cot\frac{\theta}{۲}}\{\cot^۲\frac{\theta}{۲} - ۲\cot\frac{\theta}{۲} + ۱\} = -\frac{(۱-\cot\frac{\theta}{۲})^۲}{۲\cot\frac{\theta}{۲}} \leq ۰$$

$$\cot\frac{\theta}{۲} > ۰,\ (۰ < \theta < \pi)$$

۹. داریم:

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{۱ - \tan A\tan B} = \tan(\pi - C) = -\tan C > ۰$$

زیرا C یک زاویهٔ منفرجه است. بنابراین

$$\frac{\tan A + \tan B}{۱ - \tan A\tan B} > ۰$$

اما چون A و B کوچکتر از $\frac{\pi}{۲}$ هستند، بنابراین $\tan A + \tan B > ۰$ و

$$۱ - \tan A\tan B > ۰,\quad \tan A\tan B < ۱$$

۱۰. درواقع

$$\tan(\theta-\varphi) = \frac{\tan\theta - \tan\varphi}{۱ + \tan\theta\tan\varphi} = \frac{(n-۱)\tan\varphi}{۱ + n\tan^۲\varphi}$$

بنابراین:

$$\tan^۲(\theta-\varphi) = \frac{(n-۱)^۲}{(\cos\varphi + n\tan\varphi)^۲} = \frac{(n-۱)^۲}{(\cot\varphi - n\tan\varphi)^۲ + ۴n} \leq \frac{(n-۱)^۲}{۴n}$$

۱۱. $\cos ۲\gamma = \frac{۱-\tan^۲\gamma}{۱+\tan^۲\gamma}$ برای اثبات $\cos ۲\gamma \leq ۰$، کافی است ثابت کنیم $۱ - \tan^۲\gamma \leq ۰$

اما داریم:

$$۱ - \tan^۲\gamma = \frac{\cos^۲\alpha\cos^۲\beta - (۱ + \sin\alpha\sin\beta)^۲}{\cos^۲\alpha\cos^۲\beta}$$

تنها باید ثابت کنیم:

$$\cos^{۲}\alpha\cos^{۲}\beta-(۱+\sin\alpha\sin\beta)^{۲}\leq ۰$$

اما

$$\cos^{۲}\alpha\cos^{۲}\beta-(۱+\sin\alpha\sin\beta)^{۲}=(۱-\sin^{۲}\alpha)(۱-\sin^{۲}l)-$$
$$(۱+\sin\alpha\sin\beta)^{۲}=-(\sin\alpha+\sin\beta)^{۲}\leq ۰$$

۱۲. فرض کنید m کوچکترین و M بزرگترین کسر داده شده باشد. آن‌گاه

$$m\leq\frac{a_i}{b_i}\leq M\quad(i=۱,۲,۳,\ldots,n);$$
$$mb_i\leq a_i\leq Mb_i$$

با جمع تمام این نابرابری‌ها (از $i=۱$ تا $i=n$)، به‌دست می‌آید:

$$m\sum b_i\leq\sum a_i\leq M\sum b_i$$

و از این‌رو، درواقع $m\leq\dfrac{\sum a_i}{\sum b_i}\leq M$ می‌باشند.

۱۳. فرض می‌کنیم تمام کمیت‌های a، b، ...، l مثبت می‌باشند. علاوه بر این، m، n، ...، p عددهای درست و مثبت هستند. لگاریتم ریشه‌ها یعنی کمیت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{۱۰ya}{m},\ \frac{۱۰gb}{n},\ldots,\frac{\log l}{p}$$

فرض کنید μ کوچکترین و M بزرگترین این کسرها باشد، باتوجه به نتیجهٔ مسال ۱۲ داریم:

$$\mu<\frac{\log a+\log b+\ldots+\log l}{m+n+\ldots+p}<M;$$
$$\mu<\log\sqrt[m+n+\ldots+q]{a\cdot b\ldots l}<M$$

که از آن نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

۱۴. مساله ۱۲ را ببینید.

۱۵. داریم:

$$x^\lambda - y^\lambda - z^\lambda = y^۲(x^{\lambda-۲} - y^{\lambda-۲}) + z^۲(x^{\lambda-۲} - x^{\lambda-۲})$$

زیرا $x^۲ = y^۲ + z^۲$.

از همان نامساوی نتیجه می‌شود: $y < x$ و $z < x$. بنابراین، اگر $۰ < ۲ - \lambda$، آن‌گاه

$$x^{\lambda-۲} - y^{\lambda-۲} > ۰, \quad x^{\lambda-۲} - z^{\lambda-۲} > ۰$$

و درنتیجه، به‌ازای $۲ < \lambda$،

$$x^\lambda - y^\lambda - z^\lambda > ۰ \Rightarrow x^\lambda > y^\lambda + z^\lambda$$

به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود که اگر $۲ > \lambda$، آن‌گاه

$$x^\lambda < y^\lambda + z^\lambda$$

۱۶. (مسالهٔ ۷ از فصل ۱ را ببینید). می‌توان، با همین روش ثابت کرد، اگر $a^۲ + b^۲ = ۱$، آن‌گاه، می‌توان زاویهٔ φ را طوری تعیین کرد که: $b = \sin\varphi$ و $a = \cos\varphi$.

به‌همین ترتیب، می‌توان زاویهٔ φ' را طوری تعیین کرد که:

$$m = \cos\varphi', \ n = \sin\varphi'$$

در این صورت داریم:

$$(am + bm) = |\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi') = |\cos(\varphi - \varphi')| \leq ۱$$

۱۷. داریم:

$$a^۲ \geq a^۲ - (b-c)^۲$$
$$b^۲ \geq b^۲ - (c-a)^۲$$
$$c^۲ \geq c^۲ - (a-b)^۲$$

که با ضرب آن‌ها، به‌دست می‌آید:

$$a^۲b^۲c^۲ \geq (a+b-c)^۲(a+c-b)^۲(b+c-a)^۲$$

۱۸. می‌دانیم اگر $A+B+C=\pi$، آن‌گاه

$$\tan\frac{A}{۲}\tan\frac{B}{۲}+\tan\frac{A}{۲}\tan\frac{C}{۲}+\tan\frac{B}{۲}\tan\frac{C}{۲}=۱$$

(مساله ۴۰ـ فصل ۲ را ببینید). فرض می‌کنیم:

$$\tan\frac{A}{۲}=x,\quad \tan\frac{B}{۲}=y,\quad \tan\frac{C}{۲}=z$$

تنها باقی می‌ماند اثبات $x^۲+y^۲+z^۲ \geq ۱$ با شرط

$$xy+xz+yz=۱$$

اما داریم:

$$۲(x^۲+y^۲+z^۲)-۲(xy+xz+yz)=(x-y)^۲+(x-z)^۲+(y-z)^۲ \geq ۰$$

بنابراین:

$$۲(x^۲+y^۲+z^۲)-۲ \geq ۰$$
$$x^۲+y^۲+z^۲ \geq ۱$$

۱۹. داریم:

$$\sin\frac{A}{۲}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\ \sin\frac{B}{۲}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$
$$\sin\frac{C}{۲}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

درنتیجه، کافی ثابت کنیم

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \leq \frac{۱}{۸}$$

اما:

$$p-a=\frac{a+b+c}{۲}-a=\frac{b+c-a}{۲},\ p-b=\frac{a+c-b}{۲}$$
$$p-c=\frac{a+b-c}{۲}$$

بنابراین، باید ثابت کنیم که تنها رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{abc}\leq ۱$$

مشروط بر این‌که $b+c-a>۰$ و $a+c-b>۰$ و $a+b-c>۰$ (مساله ۱۷ را ببینید). این نابرابری را می‌توان با روش دیگری ثابت کرد. قرار دهید:

$$\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}=\xi$$

آن‌گاه به‌ترتیب داریم:

$$\xi=\frac{۱}{۲}\left(\cos\frac{A-B}{۲}-\cos\frac{A+B}{۲}\right)\cos\frac{A+B}{۲};$$
$$\cos^{۲}\frac{A+B}{۲}-\cos\frac{A-B}{۲}\cos\frac{A+B}{۲}+۲\xi=۰;$$
$$\cos\frac{A+B}{۲}=\frac{\cos\frac{A-B}{۲}\pm\sqrt{\cos^{۲}\frac{A-B}{۲}-۸\xi}}{۲}$$

زیرا $\cos\frac{A+B}{۲}$ و $\cos\frac{A-B}{۲}$ حقیقی هستند، باید

$$\cos^{۲}\frac{A-B}{۲}-۸\xi\geq ۰$$
$$۸\xi\leq\cos^{۲}\frac{A-B}{۲}, ۸\xi\leq ۱,\ \xi\leq\frac{۱}{۸}$$

۲۰. الف) این رابطه را داریم (مساله ۴۰ـ ب فصل ۲ را ببینید):

$$\cos A+\cos B+\cos C=۱+۴\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}$$

با استفاده از نتیجهٔ مساله قبل، نابرابری مورد نظر به‌دست می‌آید.

ب) از آن‌جاکه این رابطه وجود دارد:

$$\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲}=\frac{۱}{۴}(\sin A+\sin B+\sin C)$$

مسالهٔ داده شده، حالت خاصی از مسالهٔ ۴۸ از این فصل است.

۲۱. کافی است ثابت کنیم:

$$(a+c)(b+d)\geq ab+cd+۲\sqrt{abcd}$$

یعنی: $cb+ad\geq ۲\sqrt{cbad}$.

اما: $cb+ad-۲\sqrt{cbad}-(\sqrt{cb}-\sqrt{ad})^۲\geq ۰$

۲۲. داریم: $a^۲+b^۲-۲ab=(a-b)^۲\geq ۰$، بنابراین

$$a^۲-ab+b^۲\geq ab;$$
$$a^۳+b^۳\geq ab(a+b)$$

درنتیجه: $۳a^۳+۳b^۳\geq ۳a^۲b+۳ab^۲$

$a^۳+b^۳$ را به دو طرف نابرابری اضافه می‌کنیم:

$$۴a^۳+۴b^۳\geq (a+b)^۳$$

و درنتیجه:

$$\frac{a^۳+b^۳}{۲}\geq\left(\frac{a+b}{۲}\right)^۳$$

۲۳. الف) باید ثابت کنیم، میانگین حسابی دو عدد مثبت کوچکتر از میانگین هندسی آن‌ها نیست. درواقع:

$$\frac{a+b}{۲}-\sqrt{ab}=\frac{۱}{۲}(a+b-۲\sqrt{ab})=\frac{۱}{۲}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲\geq ۰$$

ب) برای اثبات $\frac{a+b}{۲}-\sqrt{ab}\leq\frac{۱}{۸}\cdot\frac{(a-b)^۲}{b}$

درنتیجه، باید نابرابری زیر را ثابت کنیم:

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^۲}{۸b} \geq \frac{۱}{۲}$$

داریم:

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^۲}{۸b} = \frac{۱}{۸}\left(۱+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^۲ \geq \frac{۱}{۲}$$

زیرا $\frac{a}{b} > ۱$.

نابرابری دوم به‌طور مشابه ثابت می‌شود.

۲۴. قرار دهید $a = x^۳$ و $b = y^۳$ و $c = z^۳$. تنها نکته‌ای که باید ثابت کنیم، آن است که به‌ازای تمام مقدارهای غیرصفر x و y و z: $x^۳ + y^۳ + z^۳ - ۳xyz \geq ۰$. اما داریم (مساله ۲۰، فصل ۱ را ببینید):

$$x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz = (x+y+z)(x^۲+y^۲+z^۲-xy-xz-yz)$$

و از این‌رو، تنها باقی می‌ماند اثبات این مطلب که:

$$x^۲+y^۲+z^۲-xy-xz-yz \geq ۰$$

اما داریم (مساله ۱۰، فصل ۵ را ببینید):

$$۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲-۲xy-۲xz-۲yz = (x-y)^۲+(x-z)^۲+(y-z)^۲ \geq ۰$$

۲۵.

$$\sqrt{a_۱a_۲} \leq \frac{a_۱+a_۲}{۲},\ \sqrt{a_۱a_۳} \leq \frac{a_۱+a_۳}{۲}, \dots,\ \sqrt{a_{n-۱}a_{n۱}} < \frac{a_{n-۱}+a_n}{۲}$$

با جمع این نابرابری‌ها، نابرابری مطلوب حاصل می‌شود.

۲۶. داریم:

$$\frac{۱+a_۱}{۲} \geq \sqrt{a_۱},\ \frac{۱+a_۲}{۲} \geq \sqrt{a_۲}, \dots, \frac{۱+a_n}{۲} \geq \sqrt{a_n}$$

این نابرابری‌ها را در هم ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{(۱+a_۱)(۱+a_۲)\dots(۱+a_n)}{۲^n} \geq \sqrt{a_۱a_۲\dots a_n} = ۱$$

و بنابراین:

$$(۱+a_۱)(۱+a_۲)\dots(۱+a_n) \geq ۲^n$$

۲۷. الف) با استفاده از اتحاد

$$(a+b)(a+c)(b+c) = (ab+ac+bc)(a+b+c) - abc$$

اما:

$$\frac{a+b+c}{۳} \geq \sqrt[۳]{abc}, \quad \frac{ab+ac+bc}{۳} \geq \sqrt[۳]{a^۲b^۲c^۲}$$

بنابراین:

$$(a+b+c)(ab+ac+bc) \geq ۹abc$$

و درنتیجه:

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geq ۸abc$$

ب) داریم:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c} - ۱ + \frac{b+a+c}{a+c} - ۱ + \\ + \frac{c+a+b}{a+b} - ۱ = (a+b+c)\left(\frac{۱}{b+c}+\frac{۱}{a+c}+\frac{۱}{a+b}\right) - ۳$$

اما:

$$(b+c)+(a+c)+(c+b) \geq ۳\sqrt[۳]{(b+c)(a+c)(a+b)}$$

یعنی:

$$a+b+c \geq \frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{(b+c)(a+c)(a+b)}$$

علاوه بر این:

$$\frac{۱}{b+c}+\frac{۱}{a+c}+\frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{(b+c)(a+c)(a+b)}\{(b+c)(a+c)+$$
$$+(b+c)(a+b)+(a+b)(a+c)\geq$$
$$\geq\frac{۳}{(b+c)(a+c)(a+b)}\sqrt[۳]{(b+c)^{۲}(a+c)^{۲}(a+b)^{۲}}$$

بنابراین:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{(b+c)(a+c)(a+b)}$$
$$\times\frac{۳}{(b+c)(a+c)(a+b)}\sqrt[۳]{(b+c)^{۲}(a+c)^{۲}(a+b)^{۲}}-۳$$

درنتیجه: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{۳}{۲}$

۲۸. کافی است ثابت کنیم:

$$(a+k)(b+l)(c+m)\geq(\sqrt[۳]{abc}+\sqrt[۳]{klm})$$

داریم:

$$(a+k)(b+l)(c+m)=abc+klm+(alc+kbc+abm)+$$
$$+(klc+alm+kbm),$$
$$(\sqrt[۳]{abc}+\sqrt[۳]{klm})^{۳}=abc+klm+۳\sqrt[۳]{a^{۲}b^{۲}c^{۲}klm}+۳\sqrt[۳]{k^{۲}l^{۲}m^{۲}abc}$$

اما:

$$\frac{alc+kbc+abm}{۳}\geq\sqrt[۳]{a^{۲}b^{۲}c^{۲}klm},\ \frac{klc+alm+kbm}{۳}\geq\sqrt[۳]{k^{۲}l^{۲}m^{۲}abc}$$

از این‌رو، درستی اتحاد داده شده نتیجه می‌شود.

۲۹. داریم:

$$\frac{۱}{b}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\geq۳\sqrt[۳]{\frac{۱}{a}\times\frac{۱}{b}\times\frac{۱}{c}}=\frac{۳}{\sqrt[۳]{abc}}$$

اما $\frac{a+b+c}{۳} \geq \sqrt[۳]{abc}$، یعنی

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{abc}} \leq \frac{۳}{a+b+c}$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c} \geq ۳\frac{۱}{\sqrt[۳]{abc}} \geq \frac{۹}{a+b+c}$$

۳۰. باید ثابت کنیم، میانگین حسابی n عدد مثبت کوچکتر از میانگین هندسی این عددها نیست. با چند روش مختلف این قضیه را ثابت می‌کنیم. اثبات را با جالب‌ترین آن که متعلق به کوشی است آغاز می‌کنیم. باید ثابت کنیم:

$$\frac{x_۱+x_۲+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_۱x_۲\ldots x_n}$$

به‌ازای $n=۱$، درستی این نابرابری روشن است. به‌ازای $n=۲$ و $n=۳$ اثبات آن در مساله ۲۳ و ۲۴ آمده است.

نخست چگونگی اثبات درستی این حکم را به‌ازای $n=۴$ ارائه می‌دهیم. باید ثابت کنیم:

$$\frac{x_۱+x_۲+x_۳+x_۴}{۲} = \frac{\frac{x_۱+x_۲}{۲}+\frac{x_۳+x_۴}{۲}}{۲} \geq \sqrt{\frac{x_۱+x_۲}{۲}\times\frac{x_۳+x_۴}{۲}}$$

ولی می‌دانیم $\sqrt{x_۱x_۲} \leq \frac{x_۱+x_۲}{۲}$ و $\sqrt{x_۳x_۴} \leq \frac{x_۳+x_۴}{۲}$، بنابراین:

$$\frac{x_۱+x_۲+x_۳+x_۴}{۴} \geq \sqrt{\sqrt{x_۱x_۲}\times\sqrt{x_۳x_۴}} = \sqrt[۴]{x_۱x_۲x_۳x_۴}$$

اکنون، در حالت کلی ثابت می‌کنیم، اگر قضیه به‌ازای $n=m$ برقرار باشد، آن‌گاه به‌ازای $n=۲m$ نیز برقرار است. درواقع

$$\frac{x_۱+x_۲+x_۳+\ldots+x_{۲m-۱}+x_{۲m}}{۲m} = \frac{x_۱+x_۲}{۲}+$$

$$+\frac{x_۳+x_۴}{۲}+\ldots+\frac{x_{۲m-۱}+x_{۲m}}{۲}\geq$$

$$\sqrt[m]{\frac{x_۱+x_۲}{۲}\times\frac{x_۳+x_۴}{۲}\times\ldots\times\frac{x_{۲m-۱}+x_{۲m}}{۲}}$$

(زیرا فرض می‌کنیم قضیه به‌ازای $n=m$ برقرار است). به‌جز این

$$\frac{x_۱+x_۲+x_۳+\ldots+x_{۲n}}{۲m}\geq\sqrt[m]{\sqrt{x_۱x_۲}\times\sqrt{x_۳x_۴}\times\ldots\times\sqrt{x_{۲m-۱}x_{۲m}}}=$$
$$=\sqrt[۲m]{x_۱x_۲x_۳\ldots x_{۲m}}$$

و با فرض درستی قضیه به‌ازای $n=m$، ثابت کردیم به‌ازای $n=۲m$ هم درست است. چون درستی قضیه را به‌ازای $n=۲$ ثابت کردیم به‌ازای

$$n=۴,۸,۱۶,\ldots,۲^m,\ldots$$

یعنی به‌ازای هر توان از دو برقرار است. بنابراین، باید ثابت کنیم که قضیه برای هر عدد n درست برقرار است. حال چند مقدار n را در نظر می‌گیریم. اگر A توانی از دو باشد، آن‌گاه برای چنین مقداری از n، قضیه درست است. اگرنه، آن‌گاه همواره می‌توان یک مقدار معینی q به n اضافه کرد تا $n+q$ به‌صورت توانی از دو درآید:

$$n+q=۲^m$$

در آن صورت داریم:

$$\frac{x_۱+x_۲+x_۳+\ldots+x_n+x_{n+۱}+\ldots+x_{n+q}}{n+q}\geq\sqrt[n+q]{x_۱x_۲\ldots x_nx_{n+۱}\ldots x_{n+q}}$$

به‌ازای هر مقدار مثبت x_i $(i=۱,۲,\ldots,n+q)$.

$$x_{n+۱}=x_{n+۲}=\ldots=x_{n+q}=\frac{x_۱+x_۲+\ldots+x_n}{n}$$

حاصل می‌شود:

$$\frac{x_۱+x_۲+\ldots+x_n+\frac{x_۱+x_۲+\ldots+x_n}{n}\times q}{n+q}\geq$$

$$\geq\sqrt[n+q]{x_۱x_۲\ldots x_n(\frac{x_۱+x_۲+\ldots+x_n}{n})^q}$$

درنتیجه:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n+q]{x_1 x_2 \ldots x_n \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^q}$$

یا:

$$\left(\frac{x + 1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^{n+q} \geq x_1 x_2 \ldots x_n \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^q$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^n \geq x_1 x_2 \ldots x_n$$

و نهایتاً:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

و به این ترتیب، قضیه به‌ازای هر مقدار درست n برقرار است. روشن است، اگر

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$

آن‌گاه علامت برابری در قضیه برقرار است. حال ثابت می‌کنیم که علامت تساوی تنها وقتی اتفاق می‌افتد که تمام $x_1, x_2, \ldots, x_n$ با هم برابر باشند. فرض می‌کنیم دست‌کم، دوتا از این متغیرها، مثل x_1 و x_2 برابر نباشند. ثابت می‌کنیم که در این حالت تنها علامت نابرابری امکان‌پذیر است، یعنی داریم:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

در حقیقت:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} =$$

$$\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} + x_3 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 x_3 \ldots x_n}$$

اما اگر x_1 برابر x_2 نباشد، آن‌گاه:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{x_1 x_2}$$

درنتیجه:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{x_۱+x_۲}{۲}\right)^۲ x_۳\dots x_n} > \sqrt[n]{x_۱x_۲x_۳\dots x_n}$$

بنابراین $\frac{x_۱+x_۲+\dots+x_n}{n} > \sqrt[n]{x_۱x_۲\dots x_n}$؛ (اگر دست‌کم دوتا از کمیت‌های $x_۱, x_۲, \dots, x_n$ برابر نباشند).

در زیر چند اثبات دیگر از این قضیه ارائه شده است، فرض کنید n یک عدد مثبت بزرگتر یا برابری واحد $(n \geq ۱)$، a و b را دو عدد مثبت حقیقی می‌گیریم. در آن صورت نابرابری زیر برقرار است:

$$(a^{n-۱}-b^{n-۱})(a-b) \geq ۰$$

از آن‌جا

$$a^n+b^n \geq a^{n-۱}b+b^{n-۱}a$$

n عدد مثبت $a, b, c, d, \dots k, l$ را در نظر بگیرید. حال این نابرابری را برای همهٔ زوج عددهای مثبتی که n عدد داده شده را تشکیل می‌دهند، اعمال می‌کنیم. نابرابری‌هایی را که به این ترتیب به‌دست می‌آید با هم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(a^n+b^n)+(a^n+c^n)+\dots+(a^n+l^n)+(b^n+c^n)+\dots+(b^n+l^n)+\dots+(k^n+l^n) \geq (a^{n-۱}b+b^{n-۱}a)+(a^{n-۱}c+c^{n-۱}a)+\dots+(a^{n-۱}l+l^{n-۱}a)+\dots+(k^{n-۱}l+l^{n-۱}k)$$

بنابراین داریم:

$$(n-۱)(a^n+b^n+\dots+l^n) \geq a(b^{n-۱}+c^{n-۱}+\dots+l^{n-۱})+b(a^{n-۱}+c^{n-۱}+\dots+l^{n-۱})+c(a^{n-۱}+b^{n-۱}+\dots+l^{n-۱})+\dots+l(a^{n-۱}+b^{n-۱}+\dots+k^{n-۱}) \qquad (*)$$

با استفاده از این نابرابری، می‌توان قضیه داده شده براساس رابطهٔ بین میانگین‌های حسابی و هندسی n عدد را با روش استقرای ریاضی ثابت کرد. باید ثابت کنیم که

$$\frac{x_۱+x_۲+\dots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_۱x_۲\dots x_n}$$

فرض می‌کنیم:

$$x_۱ = a^n,\ x_۲ = b^n,\ x_۳ = c^n,\ \ldots,\ x_{n-۱} = k^n,\ x_n = l^n$$

آن‌گاه کافی است ثابت کنیم

$$\frac{a^n + b^n + \ldots + k^n + l^n}{n} \geq ab\ldots kl$$

حال فرض می‌کنیم این نابرابری با توان $n - ۱$ برقرار باشد یعنی

$$b^{n-۱} + \ldots + k^{n-۱} + l^{n-۱} \geq (n-۱)b \times k \ldots l,$$
$$a^{n-۱} + c^{n+۱} + \ldots + l^{n-۱} \geq (n-۱)a \times c \times \ldots \times l$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^{n-۱} + b^{n-۱} + \ldots + k^{n-۱} \geq (n-۱)a \times b \times \ldots \times k$$

با استفاده از نابرابری $(*)$، حاصل می‌شود:

$$(n-۱)(a^n + b^n + \ldots + k^n + l^n) \geq a(n-۱)bk\ldots l + b(n-۱)ac\ldots l + \ldots + l(n-۱)ab\ldots k$$

بنابراین:

$$(n-۱)(a^n + b^n + \ldots + k^n + l^n) \geq (n-۱) \times n \times abc\ldots kl$$

یعنی $\dfrac{a^n + b^n + \ldots + l^n}{n} \geq abc\ldots kl$

به این ترتیب، برای بار دوم، قضیه ثابت شد. حال اثبات سوم این قضیه را می‌آوریم. این کار یک بار دیگر با استفاده از روش استقرای ریاضی انجام می‌شود. فرض کنید n عدد مثبت a و b و $c \ldots ,k ,l$ داده شده است باید ثابت کنیم:

$$a + b + \ldots + k + l \geq n\sqrt[n]{ab\ldots kl}$$

فرض می‌کنیم این قضیه برای $n - ۱$ عدد برقرار باشد:

$$a + b + \ldots + k \geq (n-۱)^{n-۱}\ \sqrt[n-۱]{ab\ldots k} + l$$

و به‌این ترتیب قضیه ثابت خواهد شد اگر نامساوی زیر را ثابت کنیم:

$$(n-1)\sqrt[n-1]{ab\ldots k}+l \geq n\sqrt[n]{ab\ldots k\times l}$$

به این نابرابری می‌رسیم:

$$(n-1)\sqrt[n-1]{\frac{ab\ldots k^l}{l^n}}+1 \geq n\sqrt[n]{\frac{ab\ldots kl}{l^n}}$$

فرض می‌کنیم: $\frac{ab\ldots k^l}{l^n}=\xi^{n(n-1)}$ باید ثابت کنیم که:

$$(n-1)\xi^n+1\geq n\xi^{n-1}$$

و به‌این ترتیب، اثبات قضیه، منجر می‌شود به اثبات نابرابری

$$n\xi^{n-1}(\xi-1)\geq \xi^n-1$$

که در آن ξ هر عدد مثبت و حقیقی می‌تواند باشد و n یک عدد درست و مثبت است. این نابرابری را ثابت می‌کنیم. به‌ازای $\xi=1$ به‌روشنی برابری برقرار است. اکنون فرض کنید $\xi>1$. باید ثابت کنیم:

$$\frac{\xi^n-1}{\xi-1}\leq n\xi^{n-1}$$

داریم: $\frac{\xi^n-1}{\xi-1}=\xi^{n-1}+\xi^{n-2}+\ldots+\xi^2+\xi+1$؛

اما: $1<\xi<\xi^2<\xi^3<\ldots<\xi^{n-2}<\xi^{n-1}$؛

بنابراین: $\xi^{n-1}+\xi^{n-2}+\ldots+\xi+1<n\xi^{n-1}$؛

و درنتیجه، $\frac{\xi^n-1}{\xi-1}<n\xi^{n-1}$

اگر $\xi<1$، باید ثابت کنیم:

$$\frac{\xi^n-1}{\xi-1}>n\xi^{n-1}$$

این نتیجه مانند حالت قبل به‌دست می‌آید و به‌این ترتیب قضیه ثابت می‌شود. همهٔ این اثبات‌ها با استفاده از روشی استقرای ریاضی انجام می‌شود. به اثباتی می‌پردازیم که درستی قضیه را به‌طور مستقیم در اختیار ما قرار دهد. باید ثابت کنیم:

$$\frac{a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_۱ a_۲ \ldots a_n}$$

اگر $a_n, \ldots, a_۲, a_۱$ همه مقدارهای مثبت و دست‌کم دوتا از آن‌ها مخالف هم باشند. فرض می‌کنیم $a_i = x_i^n$. در آن صورت باید ثابت کنیم:

$$\frac{x_۱^n + x_۲^n + \ldots + x_n^n}{n} - x_۱ x_۲ \ldots x_n > ۰$$

یعنی مساله به تعیین تابعی با n متغیر $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n منجر می‌شود که مثبت است. همان‌گونه که می‌دانید n حرف $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n را می‌توان با $n!$ روش جابه‌جا کرد. اگر $f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ تابعی با n متغیر $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n باشد، آن‌گاه نماد $\sum f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ نمایش مجموع $n!$ کمیت به‌دست آمده از $f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ با استفاده از تمام جای‌گشت‌های ممکن است. برای مثال:

$$\sum x_۱ x_۲ \ldots x_n = n! x_۱ x_۲ \ldots x_n$$
$$\sum x_۱^n = (n-۱)!(x_۱^n + x_۲^n + \ldots + x_n^n)$$

این نام‌گذاری را می‌پذیریم:

$$\frac{x_۱^n + x_۲^n + \ldots + x_n}{n} - x_۱ x_۲ \ldots - x_n = \varphi(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$$

به‌سادگی دیده می‌شود که از هر جایگشتی که استفاده شود، تابع $\varphi(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ بدون تغییر باقی می‌ماند. بنابراین داریم:

$$n!\varphi(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = \frac{۱}{n}\sum(x_۱^n + x_۲^n + \ldots + x_n^n) - \sum x_۱ x_۲ \ldots x_n$$

اما:

$$\sum x_۱^n + x_۲^n + \ldots + x_n^n = n!(x_۱^n + x_۲^n + \ldots + x_n^n)$$

ولی $\frac{1}{(n-1)!}\sum x_1^n = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n$، بنابراین

$$n!\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum x_1^n - x\sum x_1 x_2 \ldots x_n \qquad (*)$$

این تابع‌ها را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \sum(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})(x_1 - x_2),\\
\varphi_2 &= \sum(x_1^{n-2} - x_2^{n-2})(x_1 - x_2)x_3,\\
\varphi_3 &= \sum(x_1^{n-2} - x_2^{n-2})(x_1 - x_2)x_3 x_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_{n-1} &= \sum(x_1 - x_2)(x_1 - x_2)x_3 x_4 \ldots x_n
\end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 2\sum x_1^n - 2\sum x_1^{n-1}x_2,\\
\varphi_2 &= 2\sum x_1^{n-1}x_2 - 2\sum x_1^{n-2}x_2 x_3,\\
\varphi_3 &= 2\sum x_1^{n-2}x_2 x_3 - 2\sum x_1^{n-3}x_2 x_3 x_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_{n-1} &= 2\sum x_1^2 x_2 x_3 \ldots x_n - 2\sum x_1 x_2 x_3 \ldots x_n
\end{aligned}$$

از مجموع این برابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_{n-1} = 2\sum x_1^n - 2\sum x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$$

این برابری را با برابری $(*)$ مقایسه می‌کنیم؛ نتیجه می‌دهد:

$$n!\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_{n-1})$$

و بنابراین:

$$\frac{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n}{n} - x_1 x_2 \ldots x_n = \frac{1}{2 \times n!}(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{n-1})$$

اما روشن است که $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ برابر صفر است، اگر و تنها اگر $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. اگر هیچ‌یک از متغیرها به‌طور هم‌زمان برابر هم نباشند آن‌گاه تمام $\varphi_i > 0$. در حقیقت، داریم:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$
$$\varphi_1 = \sum (x_1 - x_2)^2 (x_1^{n-2} + \ldots + x_2^{n-2}) \geq 0$$
$$\varphi_2 = \sum (x_1 - x_2)^2 (x_1^{n-3} + \ldots + x_2^{n-2}) \geq 0$$

....

$$\varphi_{n-1} = \sum (x_1 - x_2)^2 x_3 x_4 \ldots x_n \geq 0$$

بنابراین: $\frac{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n}{n} - x_1 x_2 \ldots x_n \geq 0$.

برابری وقتی پیش می‌آید که $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود. این اثبات توسط «ا. گوروتیس» داده شده است.

۳۱. (با استفاده از مسالهٔ قبل) داریم:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2n} \times n = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

برای اثبات نابرابری دوم، این حاصل‌ضرب را در نظر می‌گیریم:

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^2 = (a_1 a_n)(a_2 a_{n-1}) \ldots (a_n a_1)$$

اما می‌توان ثابت کرد (مساله ۱۹ فصل ۷):

$$a_n a_{n-k+1} \geq a_1 a_n$$

بنابراین: $(a_1 a_2 \ldots a_n)^2 \geq (a_1 a_2)^n$ و

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \sqrt{a_1 a_n}$$

۳۲. برای a عدد برابر $\frac{1}{a}$، b عدد برابر $\frac{1}{b}$ و c عدد برابر $\frac{1}{c}$، میانگین حسابی عبارت است از:

$$\frac{a \times \frac{1}{a} + b \times \frac{1}{b} + c \times \frac{1}{c}}{a + b + c} = \frac{3}{a + b + c}$$

میانگین هندسی $\sqrt[a+b+c]{\frac{۱}{a^a}\cdot\frac{۱}{b^b}\text{e۳۲}cdot\frac{۱}{c^c}}$.

درنتیجه: $\sqrt[a+b+c]{\frac{۱}{a^a}\cdot\frac{۱}{b^b}\cdot\frac{۱}{c^c}} \leq \frac{۳}{a+b+c}$، یعنی

$$\frac{a}{a^{a+b+c}}\frac{b}{b^{a+b+c}}\frac{c}{c^{a+b+c}} \geq \frac{۱}{۳}(a+b+c)$$

۳۳. فرض می‌کنیم:

$$a=\frac{\alpha}{m},\ b=\frac{\beta}{m},\ c=\frac{\gamma}{m}$$

که در آن، α، β، γ و m عددهای درست مثبت هستند. این ضرب را در نظر می‌گیریم:

$$\left(۱+\frac{b-c}{a}\right)^a\left(۱+\frac{c-a}{b}\right)^b\left(۱+\frac{a-b}{c}\right)^c=$$
$$=\sqrt[m]{\left(۱+\frac{b-c}{a}\right)^x\left(۱+\frac{c-b}{b}\right)^\beta\left(۱+\frac{a-b}{c}\right)^\gamma}$$

از آن‌جا که α، β، γ عددهای درست مثبت هستند، عبارت زیر رادیکال را می‌توان به‌صورت ضرب α عامل که هریک برابر $۱+\frac{b-c}{a}$، β عامل که هریک برابر $۱+\frac{c-a}{b}$ و γ عامل که هریک برابر $۱+\frac{a-b}{c}$ است، در نظر گرفت. در آن صورت داریم:

$$\sqrt[\alpha+\beta+\gamma]{(۱+\frac{b-c}{a})^\alpha(۱+\frac{c-a}{b})^\beta(۱+\frac{a-b}{c})^\gamma} \leq$$
$$\leq \frac{\alpha(۱+\frac{b-c}{a})+\beta(۱+\frac{c-a}{b})\,\gamma(۱+\frac{a-b}{c})}{\alpha+\beta+\gamma}=۱$$

دو طرف این نابرابری را به توان $a+b+c$ می‌رسانیم، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

۳۴. داریم:

$$\frac{\frac{s}{s-a}+\frac{s}{s-b}+\ldots+\frac{s}{s-l}}{n} \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{s^n}{(s-a)(s-b)\ldots(s-l)}} = \frac{s}{\sqrt[n]{(s-\alpha)(s-b)(s-l)}}$$

اما

$$\sqrt[n]{(s-a)(s-b)\ldots(s-l)} \leq$$
$$\leq \frac{(s-a)+(s-b)+\ldots+(s-l)}{n} = \frac{n-۱}{n} \times s$$

بنابراین

$$\frac{۱}{\sqrt[n]{(s-a)(s-b)\ldots(s-l)}} \geq \frac{n}{(n-۱)s}$$

ادامهٔ اثبات روشن است.

۳۵. قبل از همه، این نابرابری را می‌توان از اتحاد لاگرانژ (مساله ۵ فصل ۱) نتیجه گرفت. اما، ما با روش اندک متفاوتی آن را اثبات می‌کنیم. این عبارت را در نظر می‌گیریم:

$$(\lambda a_۱+\mu b_۱)^۲+(\lambda a_۲+\mu b_۲)^۲+\ldots+(\lambda a_n+\mu b_n)^۲ = A\lambda^۲+۲B\lambda\mu+C\mu^۲$$

که در آن:

$$A = a_۱^۲ + a^۲ + ۲ + \ldots + a_n^۲, \quad C = b_۱^۲ + b_۲^۲ + \ldots + b_n^۲$$

و

$$B = a_۱ b_۱ + a_۲ b_۲ + \ldots + a_n b_n$$

از آن‌جا که سمت چپ این نابرابری، مجموع مربع‌های چندجمله را نشان می‌دهد، به‌ازای همه مقدارهای λ و μ داریم:

$$A\lambda^۲ + ۲B\mu\lambda + C\mu^۲ \geq ۰$$

درنتیجه سه‌جمله‌ای $Ax^۲ + ۲Bx + C$ به‌ازای تمام مقدارهای x، بزرگتر یا برابر صفر است. بنابراین ریشه‌های این سه‌جمله‌ای حقیقی و برابر است، و مبین آن کوچکتر یا برابر صفر است، یعنی:

$$B^۲ - AC \leq ۰$$

بنابراین:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2-(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\leq 0$$

که از آن نتیجه می‌شود، علامت برابری تنها برای وقتی است که

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$$

۳۶. باتوجه به مساله قبل $b_1=b_2=\ldots=b_n=1$، در این صورت

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2\leq n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)$$

بنابراین:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n\leq\sqrt{n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a^2+n)}$$

۳۷. نتیجه از دستور مساله ۳۵ به‌دست می‌آید اگر قرار دهیم:

$$a_1^2=x_1,\ a_2^2=x_2,\ \ldots,\ a^2+n=x_n$$
$$b_1^2=\frac{1}{x_1},\ b_2^2=\frac{1}{x_2},\ldots,\ b_n^2=\frac{1}{x_n}$$

اما می‌توان از قضیهٔ میانگین‌ها استفاده کرد. در آن صورت داریم:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n\geq\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$$
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\geq n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\ldots\frac{1}{x_n}}$$

با ضرب این نابرابری‌ها، جواب به‌دست می‌آید.

۳۸. نخست ثابت می‌کنیم: $p^3-\frac{2n}{n-1}q\geq 0$. داریم:

$$q=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n,$$
$$0\leq(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+\ldots+(x_{n-1}-x_n)^2$$

و درنتیجه:

$$(n-1)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)-2q\geq 0$$

اما: $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=p^2-2q$ که از آن نتیجه می‌شود: $p^2-\frac{2n}{n-1}q\geq 0$

اکنون به‌جای n مقدار، $n-1$ مقدار $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ را در نظر می‌گیریم که در آن‌ها، x_i از کمیت‌های مورد بررسی حذف شده است و فرض می‌کنیم

$$p-x_i=p'$$

و

$$q-(x_ix_1+x_ix_2+\ldots+x_ix_{i-1}+x_ix_{i+1}+\ldots+x_ix_n)=q'$$

با استفاده از نابرابری به‌دست آمده، می‌توان نتیجه گرفت

$$p'^2-\frac{2(n-1)}{n-1}q'\geq 0$$

اما: $q'=q-x_i(x_1+x_2+\ldots+x_{i-1}+x_{i+1}+\ldots+x_n)=q-x_i(p-x_i)$

بنابراین: $(p-x_i)^2-\frac{2(n-1)}{n-2}(q-px_i+x_i^2)\geq 0$

و درنتیجه: $nx_i^2-2px_i+2(n-1)q-(n-2)p^2\leq 0$

سه‌جمله‌ای درجه دوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$nx^2-2px+2(n-1)q-(n-2)p^2$$

ریشه‌های آن را با α و β نمایش می‌دهیم، در این صورت

$$\alpha=\frac{p}{n}-\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q}$$

$$\beta=\frac{p}{n}+\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q}\qquad(\beta>\alpha)$$

بنابراین، یک اتحاد داریم:

$$nx_i^2-2px_i+2(n-1)q-(n-2)p^2=n(x_i-\alpha)(x_i-\beta)\leq 0$$

که از آن نتیجه می‌شود x_i بین α و β است یعنی

$$\alpha < x_i < \beta$$

۳۹. فرض کنید a و b دو عدد مثبت حقیقی باشند. اگر $p > ۰$، آن‌گاه $a^p - b^p > ۰$ برای $a > b$ و اگر $p < ۰$، برای $a > b$، آن‌گاه $a^p - b^p < ۰$. بنابراین می‌توان ادعا کرد: اگر q, p هم‌علامت باشند $(a^p - b^p)(a^q - b^q) \geq ۰$ و اگر p و q با علامت مخالف باشند، $(a^p - b^p)(a^q - b^q) \leq ۰$. در اینجا a و b هر عدد حقیقی می‌توانند باشند. نخست حالتی را در نظر بگیرید که p و q هم‌علامت هستند، داریم:

$$a^{p+q} + b^{p+q} \geq a^p b^q + a^q b^p$$
$$a^{p+q} + c^{p+q} \geq a^p c^q + a^q c^p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^{p+q} + l^{p+q} \geq a^p l^q + a^q l^p$$
$$b^{p+g} + c^{p+q} \geq b^p c^q + b^q c^p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

از مجموع این نابرابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$(n-۱)(a^{p+q} + b^{p+q} + \ldots + l^{p+q}) \geq \sum a^p b^q$$

که در آن، a و b (در مجموع اخیر) همهٔ مقدارهای سری‌های $l, \ldots, c, b, a$ را اختیار می‌کند. $\sum a^{p+q}$ را به دوطرف این نابرابری اضافه می‌کنیم، حاصل می‌شود:

$$n(a^{p+q} + b^{p+q} + \ldots + l^{p+q}) \geq (a^p + b^p + \ldots + l^p)(a^q + b^q + \ldots + l^q)$$

نابرابری دوم هم، با همین روش به‌دست می‌آید. از این نابرابری‌ها به‌سادگی می‌توان نتیجه‌های مساله‌های ۳۶ و ۳۷ را به‌دست آورد.

۴۰. الف) فرض کنید $\lambda = \frac{m}{n}$ و $m > n$، داریم:

$$\sqrt[m]{(۱+\alpha\frac{m}{n})(۱+\alpha\frac{m}{n})\ldots(۱+\alpha\frac{m}{n}) \times ۱ \times ۱ \ldots ۱} <$$

$$< \frac{(۱+\alpha\frac{m}{n})+(۱+\alpha\frac{m}{n})+\ldots+(۱+\alpha\frac{m}{n})+m-n}{m}$$

عامل $۱+\alpha\frac{m}{n}$ در زیر رادیکال، n بار و عامل یک، $m-n$ بار تکرار شده است. بنابراین

$$\left(۱+\alpha\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} < ۱+\alpha;$$

$$(۱+\lambda)^{\frac{m}{n}} > ۱+\alpha\frac{m}{n}$$

ب) قرار دهید $\lambda = \frac{m}{n}$ و نخست فرض کنید $m > n$ یعنی $۱ < \lambda$. داریم:

$$\sqrt[m]{(۱-\alpha\frac{m}{n})(۱-\alpha\frac{m}{n})\ldots(۱-\alpha\frac{m}{n})\times ۱\times ۱\ldots} < \frac{(۱-\alpha\frac{m}{n})n+m-n}{m}$$

عامل $۱-\alpha\frac{m}{n}$ در زیر رادیکال n بار و عامل یک، $m-n$ بار تکرار شده است بنابراین

$$\left(۱-\alpha\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} < ۱-\alpha < \frac{۱}{۱+\alpha}, \quad ۱-\alpha\frac{m}{n} < \frac{۱}{(۱+\alpha)^{\frac{m}{n}}};$$

$$(۱+\alpha)^{\frac{m}{n}} < \frac{۱}{۱-\alpha\frac{m}{n}}$$

اکنون فرض می‌کنیم $m < n$. داریم:

$$\sqrt[n]{(۱+\alpha)^m} = \sqrt[n]{(۱+\alpha)(۱+\alpha)\ldots(۱+\alpha)\times ۱\times ۱\ldots ۱} <$$

$$< \frac{(۱+\alpha)m+n-m}{n} < \frac{۱}{۱-\alpha\frac{m}{n}}$$

و بنابراین در این حالت نیز:

$$(۱+\alpha)^{\frac{m}{n}} < \frac{۱}{۱-\alpha\frac{m}{n}}$$

بیاد دارید که $\alpha\frac{m}{n} < 1$.

۴۱. الف) اگر در نابرابری الف مساله قبل $\alpha = \frac{1}{n+1}$ و $x = \frac{n+1}{n}$ بگیریم، به‌دست می‌آید

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} > 1+\frac{1}{n} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)n$$

یعنی $u_{n+1} > u_n$.

اکنون اثبات دیگری می‌آوریم: بدون استفاده از قضیهٔ میانگین حسابی، ثابت می‌کنیم:

$$\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{a}{n}\right)^{n}$$

اگر $a > 0$ و n عددی درست و مثبت باشد.

این اتحاد را در نظر بگیرید ($x > 0$):

$$1+nx = \frac{1+nx}{1+(n-1)x}\cdot\frac{1+(n-1)x}{1+(n-2)x}\cdots\frac{1+3x}{1+2x}\cdot\frac{1+2x}{1+x}\cdot\frac{1+x}{1}$$

اما:

$$\frac{1+(k+1)x}{1+kx} = 1+\frac{x}{1+kx} > 1+\frac{x}{1+nx} =$$
$$= \frac{1+(n+1)x}{1+nx} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

بنابراین

$$1+nx > \left[\frac{1+(n+1)x}{1+nx}\right]^{n},\ (1+nx)^{n+1} > [1+(n+1)x]^{n}$$

در اینجا قرار دهید $x = \frac{a}{n(n+1)}$، حاصل می‌شود:

$$\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{a}{n}\right)^{n}$$

در حالت خاص، به‌ازای ۱ $= a$، به‌دست می‌آید:

$$\left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱} > \left(۱+\frac{a}{n}\right)^{n}$$

در حالت خاص، به‌ازای ۱ $= a$، به‌دست می‌آید:

$$\left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱} > \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}$$

ب)

$$u_n = \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n} = \left[\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^{k} < \left(\frac{۱}{۱-\frac{۱}{n}\cdot\frac{n}{k}}\right)^{k} = \frac{۱}{\left(۱-\frac{۱}{k}\right)^{k}}$$

از این‌رو، به‌ازای هر مقدار درست k:

$$u_n < \frac{۱}{\left(۱-\frac{۱}{k}\right)^{k}}$$

اگر ۶ $= k$ باشد، به‌دست می‌آید:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n} < \left(\frac{۶}{۵}\right)^{۶} < ۳$$

۴۲. داریم (مساله ۴۱ را ببینید):

$$\frac{\sqrt[n+۱]{n+۱}}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n(n+۱)]{\frac{(n+۱)^{n}}{n^{n+۱}}} = \sqrt[n(n+۱)]{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}\frac{۱}{n}} < \sqrt[n(n+۱)]{\frac{۳}{n}}$$

اما کسر ۳ $\geq n$، آن‌وقت ۱ $\leq \frac{۳}{n}$ و بنابراین ۳ $\geq n$ اگر ۱ $> \frac{\sqrt[n+۱]{n+۱}}{\sqrt[n]{n}}$.

۴۳. باید ثابت کنیم: $۱ > \frac{\sqrt[n]{n+۱}}{\sqrt[n-۱]{n}}$ $(n \geq ۲)$، داریم:

$$\sqrt[n(n-۱)]{\frac{(n+۱)^{n-۱}}{n^n}} = \sqrt[n(n-۱)]{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n-۱} \times \frac{۱}{n}} =$$
$$= \sqrt[n(n-۱)]{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n} \times \frac{۱}{n+۱}} < \sqrt[n(n-۱)]{\frac{۳}{n+۱}} \leq ۱$$

۴۴. ثابت می‌کنیم $(i \in \mathbf{Z})$:

$$\log y_i \geq a_{i۱} \log x_۱ + a_{i۲} \log x_۲ + \ldots + a_{in} \log x_n$$

برای قسمت اخیر، کافی است ثابت کنیم:

$$\log(ax+by+cz+\ldots+lu) \geq a\log x + b\log y + \ldots + l\log u \quad (*)$$

اگر $a+b+\ldots+l = ۱$ و $a, b, \ldots, l$ اعداد گویای مثبت باشند. قرار دهید: $a = \frac{\alpha}{n}$، $b = \frac{\beta}{N}$، ...، $l = \frac{\lambda}{N}$، در این صورت

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = N$$

برای اثبات نابرابری $(*)$، کافی است ثابت کنیم

$$ax+by+cz+\ldots+lu \geq x^a y^n \ldots u^l$$

اما داریم:

$$x^a y^b \ldots u^l = \sqrt[N]{x^\alpha y^\beta \ldots u^\lambda} =$$
$$= \sqrt[N]{x\ldots xy\ldots y\ldots u\ldots u} \leq \frac{\alpha x + \beta y + \ldots + \lambda u}{N} = ax+by+\ldots+lu$$

بنابراین ثابت می‌شود $(i \in \mathbf{Z})$:

$$\log y_۱ \geq a_{i۱} \log x_i + a_{i۲} \log x_۲ + \ldots + a_{in} \log x_n;$$
$$\sum_{i=۱}^{n} \log y_i \geq (\log x_۱) \sum_{i=۱}^{n} a_{i۱} + (\log x_۲) \sum_{i=۱}^{n} a_{i۲} + \ldots + (\log x_n) \sum_{i=۱}^{n} a_i n$$

یا $\sum_{i=1}^{n} \log y_i \geq \log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_n = \log x_1 x_2 \ldots x_n$
سرانجام $y_1 y_2 \ldots y_n \geq x_1 x_2 \ldots x_n$.

۴۵. قرار دهید $\frac{b_i}{a_i} = x_i$ (که $i = 1, 2, \ldots, n$). آنگاه باید این نابرابری را ثابت کنیم:

$$\sqrt[n]{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n)} \geq 1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

درستی نابرابری به‌ازای $n = 1, 2, 3$ (مساله ۲۱ و ۲۸ را ببینید) برقرار است. فرض کنید به‌ازای $n = m$ نیز برقرار باشد، ثابت می‌کنیم به‌ازای $n = 2m$ نیز برقرار است. داریم:

$$\begin{aligned}
&\sqrt[2m]{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_{2m-1})(1 + x_{2m})} = \\
&= \sqrt[m]{\sqrt{(1 + x_1)(1 + x_2)} \cdot \sqrt{(1 + x_3)(1 + x_4)}} \\
&\ldots \sqrt[m]{\sqrt{(1 + x_{2m-1})(1 + x_{2m})}} \geq \\
&\geq \sqrt[m]{(1 + \sqrt{x_1 x_2})(1 + \sqrt{x_3 x_4})\ldots(1 + \sqrt{x_{2m-1} x_{2m}})} \\
&= 1 + \sqrt[2m]{x_1 x_2 \ldots x_{2m}}
\end{aligned}$$

بنابراین، قضیه برای تمام اندیس‌های برابر با هر توانی از دو برقرار است. حال ثابت می‌کنیم که برای هر $n \in \mathbf{N}$ برقرار است. فرض کنید $n + q = 2^m$ آن‌گاه

$$\begin{aligned}
&\sqrt[n+q]{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n)(1 + y_1)(1 + y_2)\ldots(1 + y_q)} \geq \\
&\geq 1 + \sqrt[n+q]{x_1 x_2 \ldots x_n y_1 y_2 \ldots y_q}
\end{aligned}$$

قرار دهید:

$$1 + y_1 = 1 + y_2 = \ldots = 1 + y_q = \sqrt[n]{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n)} = Y$$

داریم:

$$\sqrt[n+q]{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n)Y^q} \geq 1 + \sqrt[n+q]{x_1 x_2 \ldots x_n (Y - 1)^q}$$

اما: $(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) = Y^n$

بنابراین: $\sqrt[n+q]{Y^nY^q} \geq ۱ + \sqrt[n+q]{x_۱\ldots x_n(Y-۱)^q}$

یعنی: $Y \geq ۱ + \sqrt[n+q]{x_۱x_۲\ldots x_n(Y-۱)^q}$

یا: $Y \geq ۱ + \sqrt[n+q]{x_۱x_۲\ldots x_n(Y-۱)^q}$

$(Y-۱)^{n+q} \geq x_۱x_۲\ldots x_n(Y-۱)^q$

بنابراین:

$$(Y-۱)^n \geq x_۱x_۲\ldots x_n$$

$$Y-۱ \geq \sqrt[n]{x_۱x_۲\ldots x_n}$$

سرانجام: $Y = \sqrt[n]{(۱+x_۱)(۱+x_۲)\ldots(۱+x_n)} \geq ۱ + \sqrt[n]{x_۱x_۲\ldots x_n}$

و قضیه ثابت می‌شود.

علامت برابری تنها وقتی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم: $x_۱ = x_۲ = \ldots = x_n = ۱$.

۴۶. این قضیه مانند قضیهٔ قبل، با استفاده از روش کوشی ثابت می‌شود. به‌ازای $n = ۱$ این قضیه درست است. حال ثابت می‌کنیم که به‌ازای $n = ۲$ نیز درست است یعنی ثابت می‌کنیم به‌ازای هر مقدار درست k:

$$\left(\frac{x_۱+x_۲}{۲}\right)^k \leq \frac{x_۱^k + x_۲^k}{۲}$$

به‌ازای $k = ۱$ نابرابری اخیر برقرار است. فرض می‌کنیم این نابرابری به‌ازای $k = l$ برقرار باشد. حال درستی آن را به‌ازای $k = l + ۱$ ثابت می‌کنیم و به‌این ترتیب (بنا به فرض داریم):

$$\frac{(x_۱+x_۲)^l}{۲^l} \leq \frac{x_۱^l + x_۲^l}{۲}$$

دو طرف این نابرابری را در $\frac{x_۱+x_۲}{۲}$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{(x_۱+x_۲)^{l+۱}}{۲^{l+۱}} \leq \frac{(x_۱^l + x_۲^l)(x_۱+x_۲)}{۴} = \frac{x_۱^{l+۱} + x_۲^{l+۱} + x_۱x_۲^l + x_۲x_۱^l}{۴}$$

اما: $x_۱^lx_۲ + x_۲^lx_۱ \leq x_۱^{l+۱} + x_۲^{l+۱}$

زیرا: $x_۱^{l+۱} + x_۲^{l+۱} - x_۱^lx_۲ - x_۲^lx_۱ = (x_۱ - x_۲)(x_۱^l - x_۲^l) \geq ۰$

بنابراین: $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{l+1} \leq \frac{x_1^{l+1}+x_2^{l+1}}{2}$

و نابرابری $(*)$ به‌ازای هر مقدار درست k ثابت می‌شود و به‌این ترتیب قضیهٔ اصلی به‌ازای $n = 2$ برقرار است. حال ثابت می‌کنیم اگر این قضیه برای $n = m$ برقرار باشد، آن‌گاه به‌ازای $n = 2m$ نیز برقرار است. درحقیقت:

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+\ldots+x_{2m-1}+x_{2m}}{2m}\right)^k =$$

$$= \frac{\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}+\ldots+\frac{x_{2n-1}+x_{2m}}{2}\right)^k}{m}$$

$$\leq \frac{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^k+\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^k+\ldots+\left(\frac{x_{2m-1}+x_{2m}}{2}\right)^k}{m} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{x_1^k+x_2^k}{2}+\frac{x_3^k+x_4^k}{2}+\ldots+\frac{x_{2m-1}^k+x_{2m}^k}{2}}{m} =$$

$$= \frac{x_1^k+x_2^k+x_3^k+x_4^k+\ldots+x_{2m}^k}{2m}$$

به‌این ترتیب نشان داده‌ایم که قضیه برای هر n که توانی از دو باشد، برقرار است. باقی می‌ماند اثبات این مطلب که قضیه برای هر n نیز درست است. قرار دهید $n+p = 2^m$. در آن صورت

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n+y_1+y_2+\ldots+y_p}{n+p}\right)^k \leq$$
$$\leq \frac{x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k+y_1^k+y_2^k+\ldots+y_p^k}{n+p}$$

قرار دهید:

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_p = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

داریم:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n+y_1+y_2+\ldots+y_p = \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)(n+p)}{n}$$

درنتیجه:

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^k \leq \frac{x_1^k+\ldots+x_n^k+\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^k p}{n+p}$$

سرانجام:

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^k \leq \frac{x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k}{n}$$

و قضیه به‌طور کامل ثابت می‌شود. به‌سادگی ثابت می‌شود که علامت برابری وقتی ممکن است که

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$

۴۷. این قضیه تعمیمی از قضیه‌های قبل است (مساله‌های ۳۰ و ۴۵ و ۴۶ را ببینید). اثبات آن همانند همان قضیه‌ها انجام می‌شود. یعنی با فرض درستی قضیه به‌ازای $n = m$، درستی آن را به‌ازای $n = 2m$ ثابت می‌کنیم. داریم

$$\varphi\left(\frac{t+1+t_2+\ldots+t_{2m}}{2m}\right) = \varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}+\ldots+\frac{t2m-1+t2m}{2}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{t_{2m-1}+t_{2m}}{2}\right)}{m} <$$

$$< \frac{\frac{\varphi(t_1+\varphi(t_2)}{2}+\ldots+\frac{\varphi(t_{2m-1})+\varphi(t_{2m})}{2}}{m}$$

$$= \frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)+\ldots+\varphi(t_{2m-1})+\varphi(t_{2m})}{2m}$$

(زیرا بنابه فرض، تمام کمیت‌های $t_1, t_2, \ldots, t_{2m}$ برابر یکدیگر نیستند (به‌عنوان مثال، آن‌ها را می‌توان طوری دسته‌بندی می‌کرد که $t_1 \neq t_2$). به‌این ترتیب قضیه به‌ازای $n = 2^m$ برقرار است. حال قرار دهید $n+p = 2^m$. آن‌گاه

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n+\tau_1+\tau_r+\ldots+\tau_p}{n+p}\right) <$$

$$< \frac{\varphi_۱(t_۱) + \ldots + \varphi(t_n) + \varphi(\tau_۱) + \ldots}{n+p}$$

(در اینجا $t_۱, t_۲, \ldots, t_n$ همگن برابر یکدیگر نیستند). قرار دهید:

$$\tau_۱ = \tau_۲ = \ldots = \tau_p = \frac{t_۱ + t_۲ + \ldots + t_n}{n},$$

$$\tau_۱ + \tau_۲ + \ldots + \tau_p = \frac{t_۱ + t_۲ + \ldots + t_n}{n} p$$

درنتیجه:

$$\varphi\left(\frac{t_۱ + t_۲ + \ldots + t_n + \tau_۱ + \ldots + \tau_p}{n+p}\right) = \varphi\left(\frac{t_۱ + t_۲ + \ldots + t_p}{n}\right)$$

از طرف دیگر:

$$\frac{\varphi(t_۱) + \ldots + \varphi(t_n) + \varphi(\tau_۱) + \ldots + \varphi(\tau_p)}{n+p} =$$

$$= \frac{\varphi(t_۱) + \ldots + \varphi(t_n) + p\varphi\left(\frac{t_۱ + \ldots + t_n}{n}\right)}{n+p}$$

از نابرابری آخر حاصل می‌شود:

$$\varphi\left(\frac{t_۱ + \ldots + t_n}{n}\right) < \frac{\varphi(t_۱) + \ldots + \varphi(t_n)}{n}$$

قضیه‌های بالا (مساله‌های ۳۰ و ۴۵ و ۴۶ را ببینید)، همان‌گونه که قبلاً متذکر شده‌ایم، از قضیهٔ حالت کلی‌تر آن به‌دست می‌آید. حال آن را ثابت می‌کنیم:

الف) اگر $\varphi(t) = -\log(۱ + t)$، آن‌گاه

$$\varphi\left(\frac{t_۱ + t_۲}{۲}\right) = -\log\left(۱ + \frac{t_۱ + t_۲}{۲}\right)$$

علاوه بر این:

$$\frac{\varphi(t_۱) + \varphi(t_۲)}{۲} = -\frac{\log(۱ + t_۱) + \log(۱ + t_۲)}{۲} = -\log\sqrt{(۱ + t_۱)(۱ + t_۲)}$$

اما:

$$\sqrt{(۱+t_۱)(۱+t_۲)} < \frac{۱+t_۱+۱+t_۲}{۲} = ۱+\frac{t_۱+t_۲}{۲} \quad (t_۱ \neq t_۲)$$

علاوه بر این:

$$\log\sqrt{(۱+t_۱)(۱+t_۲)} < \log\left(۱+\frac{t_۱+t_۲}{۲}\right)$$

(پایهٔ لگاریتم‌ها بزرگتر از یک هستند) و

$$-\log\sqrt{(۱+t_۱)(۱+t_۲)} > -\log\left(۱+\frac{t_۱+t_۲}{۲}\right)$$

بنابراین تابع: $\varphi(t) = -\log(۱+t)$، دارای این خاصیت است:

$$\varphi\left(\frac{t_۱+t_۲}{۲}\right) < \frac{\varphi(t_۱)+\varphi(t_۲)}{۲}$$

بنابراین باید:

$$\varphi\left(\frac{t_۱+t_۲+\ldots+t_n}{n}\right) < \frac{\varphi(t_۱)+\varphi(t_۲)+\ldots+\varphi(t_n)}{n}$$

یعنی:

$$-\log\left(۱+\frac{t_۱+t_۲+\ldots+t_n}{n}\right) <$$

$$< -\frac{\log(۱+t_۱)+\log(۱+t_۲)+\ldots+\log(۱+t_n)}{n},$$

$$\log\sqrt[n]{(۱+t_۱)(۱+t_۲)\ldots(۱+t_n)} < \log\left(۱+\frac{t_۱+\ldots+t_n}{n}\right)$$

علاوه بر این:

$$\sqrt[n]{(۱+t_۱)(۱+t_۲)\ldots(۱+t_n)} < ۱+\frac{t_۱+\ldots+t_n}{n} =$$

$$= \frac{(۱+t_۱)+(۱+t_۲)+\ldots+(۱+t_n)}{n}$$

قرار دهید $x_i = t_i + ۱$ ، نهایتاً به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[n]{x_۱ x_۲ \ldots x_n} < \frac{x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n}{n}$$

واضح است که اگر فرض کنیم $x_۱ = x_۲ = \ldots = x_n$ آنگاه داریم:

$$\sqrt[n]{x_۱ x_۲ \ldots x_n} \leq \frac{x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n}{n}$$

ب) اگر قرار دهیم: $\varphi(t) = t^k$، آن‌گاه

$$\varphi\left(\frac{t_۱ + t_۲}{۲}\right) = \left(\frac{t_۱ + t_۲}{۲}\right)^k$$

با فرض برقرار بودن نابرابری

$$\left(\frac{t_۱ + t_۲}{۲}\right)^k < \frac{t_۱^k + t_۲^k}{۲}$$

به نتیجهٔ مسالهٔ ۴۶ می‌رسیم.

ج) قرار دهید: $\varphi(t) = \log(۱ + e^t)$، (لگاریتم در پایهٔ $e > ۱$ اختیار می‌شود)، آن‌گاه

$$\varphi\left(\frac{t_۱ + t_۲}{۲}\right) = \log\left(۱ + e^{\frac{t_۱ + t_۲}{۲}}\right)$$
$$\frac{\varphi(t_۱) + \varphi(t_۲)}{۲} = \log\sqrt{(۱ + e^{t_۱})(۱ + e^{t_۲})}$$

زیرا

$$\sqrt{(۱ + e^{t_۱})(۱ + e^{t_۲})} > ۱ + e^{\frac{t_۱ + t_۲}{۲}}$$

برای تابع $\varphi(t)$ که دارای شرط‌های

$$\varphi\left(\frac{t_۱ + t_۲}{۲}\right) < \frac{\varphi(t_۱) + \varphi(t_۲)}{۲} \quad (t_۱ \neq t_۲)$$

است برقرار است. بنابراین

$$\varphi\left(\frac{t_۱+t_۲+\ldots+t_n}{n}\right)<\frac{\varphi(t_۱)+\ldots+\varphi(t_n)}{n}$$

یعنی

$$\log\left(۱+e^{\frac{t_۱+t_۲+\ldots+t_n}{n}}\right)<\frac{\log(۱+e^{t_۱})+\ldots+\log(۱+e^{t_n})}{n}$$

و

$$۱+e^{\frac{t_۱+t_۲+\ldots+t_n}{۲}}<\sqrt[n]{(۱+e^{t_۱})\ldots(۱+e^{t_n})}$$

قرار دهید: $t=\log e^{\lambda}$ و $e^t=\lambda$، آن‌گاه

$$\sqrt[n]{(۱+e^{t_۱})\ldots(۱+e^{t_n})}=$$
$$=\sqrt[n]{(۱+\lambda_۱)(۱+\lambda_۲)\ldots(۱+\lambda_n)}>۱+e^{\frac{\log\lambda_۱+\ldots+\log\lambda_n}{n}}$$

و سرانجام

$$\sqrt[n]{(۱+\lambda_۱)(۱+\lambda_۲)\ldots(۱+\lambda_n)}>۱+\sqrt[n]{\lambda_۱\lambda_۲\ldots\lambda_n}$$

۴۸. فرض کنید $t_۱,t_۲,\ldots,t_n$ در فاصلهٔ بین صفر و π باشند،

$$(۰<t_i<\pi)$$

حال ثابت می‌کنیم:

$$-\sin\frac{t_۱+t_۲+\ldots+t_n}{n}<-\frac{\sin t_۱+\sin t_۲+\ldots+\sin t_n}{n}$$

برای این منظور کافی است ثابت کنیم (مساله ۴۷ را ببینید)

$$-\sin\frac{t_۱+t_۲}{۲}<-\frac{\sin t_۱+\sin t_۲}{۲}$$

در واقع:

$$\sin\frac{t_1+t_2}{2}-\frac{\sin t_1+\sin t_2}{2}=\sin\frac{t_1+t_2}{2}-\sin\frac{t_1+t_2}{2}\cos\frac{t_1-t_2}{2}$$
$$=\sin\frac{t_1+t_2}{2}\times 2\sin^2\frac{t_1-t_2}{4}>0$$

(در حالت داده شده $\varphi(t)=-\sin t$).

به‌این ترتیب

$$\frac{\sin t_1+\sin t_2+\ldots+\sin t_n}{n}<\sin\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}$$

(اگر $0<t_1<\pi$).

بنابراین اگر $a_1+a_2+\ldots+a_n=\pi$، آن‌گاه

$$\sin a_1+\sin a_2+\ldots+\sin a_n<n\sin\frac{\pi}{n}$$

اگر a_1 و a_2 و ...، a_n برابر یکدیگر نباشند.

از طرف دیگر اگر $a_1=a_2=\ldots=a_n=\frac{\pi}{n}$، در آن صورت مجموع $\sin a_1+\ldots+\sin a_n$ برابر است با: $n\sin\frac{\pi}{n}$

به‌این ترتیب، در واقع، بزرگترین مقدار مجموع

$$\sin a_1+\sin a_2+\ldots+\sin a_n$$

برابر است با

$$n\sin\frac{\pi}{n}$$

مشروط بر این‌که:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\pi\quad(a_i>0)$$

و بزرگترین مقدار به‌ازای

$$a_1=a_2=\ldots=a_n=\frac{\pi}{n}$$

به‌دست می‌آید.

۴۹. ثابت می‌کنیم، تفاضل $\frac{x^q - ۱}{q} = \frac{x^p - ۱}{p}$ (اگر $x \neq ۱$ و $p > q$) بزرگتر از صفر است. برای این منظور کافی است، ثابت کنیم:

$$\Delta = q(x^p - ۱) - p(x^q - ۱) > ۰$$

نخست فرض می‌کنیم $x > ۱$. داریم:

$$\Delta = q(x^p - ۱) - p(x^q - ۱) = (x - ۱)\{q(x^{p-۱} + x^{p-۲} + \ldots + x + ۱) - $$
$$-p(x^{q-۱} + x^{q-۲} + \ldots + x + ۱)\} = (x - ۱)\{q(x^{p-۱} + x^{p-۲} + \ldots + x^q) - $$
$$-(p - q)(x^{q-۱} + x^{q-۲} + \ldots + x + ۱)\}$$

اگر $x > ۱$، آن‌گاه

$$x^{p-۱} + x^{p-۲} + \ldots + x^q > (p - q)x^q$$

بنابراین:

$$\Delta = q(x^p - ۱) - p(x^q - ۱) > (x - ۱)\{q(p - q)x^q - (p - q)qx^{q-۱}\} =$$
$$= qx^{q-۱}(p - q)(x - ۱)^۲ > ۰$$

از این‌جا، اگر $x > ۱$، قضیه اثبات شده است. اکنون فرض می‌کنیم $x < ۱$. در این حالت داریم:

$$x^{p-۱} + x^{p-۲} + \ldots + x^q < (p - q)x^q;$$
$$x^{q-۱} + x^{q-۲} + \ldots + x + ۱ > qx^{q-۱};$$
$$q(x^{p-۱} + \ldots + x^q) - (p - q)(x^{q-۱} + \ldots + x + ۱) < (p - q)qx^q -$$
$$-q(p - q)x^{q-۱} = q(p - q)x^{q-۱}(x - ۱)$$

درنتیجه: $\Delta > q(p - q)x^{q-۱}(x - ۱)^۲ > ۰$.

باوجود این، این قضیه می‌تواند قبل از قضیهٔ میانگین حسابی اثبات شود. این نابرابری را داریم (مساله ۴۰ را ببینید) ($\lambda > ۱$، گویا، $\alpha > ۰$ حقیقی).

$$(۱ + \alpha)^\lambda > ۱ + \alpha\lambda$$

بههمین ترتیب میتوان نامساوی زیر را نتیجه گرفت:

$$(۱-\alpha)^{\lambda} > ۱-\alpha\lambda$$

اگر $۱ > \alpha > ۰$، $۱ < \lambda$، گویا باشد. با استفاده از این نابرابریها، میتوان ثابت کرد

$$\frac{x^p - ۱}{p} > \frac{x^q - ۱}{q} \quad (\alpha \neq ۱)$$

قرار دهید $\xi = x^q$ و $\lambda = \frac{p}{q}$، آنگاه باید ثابت کنیم

$$\xi^{\lambda} - ۱ > \lambda(\xi - ۱)$$

یا

$$\xi^{\lambda} - ۱ - \lambda(\xi - ۱) > ۰$$

نخست فرض کنید $۱ < x$ و $۱ < \xi$. قرار دهید $\xi = ۱ + \alpha$، در آن صورت داریم:

$$\xi^{\lambda} - ۱ - \lambda(\xi - ۱) = (۱+\alpha)^{\lambda} - ۱ - \lambda\alpha > ۰$$

اگر $x < ۱$، آنگاه $\xi < ۱$، در این حالت قرار دهید:

$$\xi = ۱ - \alpha \quad (۰ < \alpha < ۱)$$

بهسادگی بهدست میآید:

$$\xi^{\lambda} - ۱ - \lambda(\xi - ۱) = (۱-\alpha)^{\lambda} - ۱ - \lambda(-\alpha) > ۰$$

۵۰. نخست فرض کنید که $m > ۱$. قرار دهید $m = \frac{p}{q}$ ($p > q$، عدد درست و مثبت است). در آن صورت داریم (مساله ۴۹ را ببینید):

$$\frac{\xi^p - ۱}{p} > \frac{\xi^q - ۱}{q} \quad (\xi \neq ۱)$$

قرار دهید $x = \xi^q$ و حاصل میشود:

$$x^m - ۱ > m(x - ۱)$$

در این نابرابری به‌جای x، $\frac{1}{x}$ قرار دهید. به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{x^m} - 1 > m\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

دو طرف این نابرابری را در $-x^m$ ضرب می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$x^m - 1 < mx^{m-1}(x-1)$$

بنابراین، اگر $m > 1$، آن‌گاه

$$mx^{m-1}(x-1) > x^m - 1 > m(x-1) \qquad (1)$$

حال فرض کنید $0 < m < 1$. قرار دهید $x = \xi^q$، $m = \frac{p}{q}$. حاصل می‌شود:

$$x^{\frac{1}{m}} - 1 > \frac{1}{m}(x-1)$$

در اینجا به‌جای x، x^m قرار دهید، نتیجه می‌شود:

$$x^m - 1 < m(x-1)$$

در نابرابری اخیر، به‌جای x، $\frac{1}{x}$ قرار دهید و تمام تبدیل‌های لازم را انجام دهید حاصل می‌شود:

$$mx^{m-1}(x-1) < x^m - 1 < m(x-1), \quad (0 < m < 1) \qquad (2)$$

حال مقدارهای منفی x را در نظر بگیرید. قرار دهید $m = -n$ که در آن $n > 0$، گویا است. نخست ثابت می‌کنیم اگر m منفی باشد، آن‌گاه

$$x^m - 1 > m(x-1)$$

از آن‌جا که $n > 0$، نتیجه می‌گیریم $n + 1 > 1$ و می‌توانیم از نابرابری (۱) استفاده کنیم یعنی داریم:

$$x^{n+1} - 1 < (n+1)x^n(x-1)$$

از این‌رو $nx^n(x-۱) > x^n - ۱$

در این‌جا به‌جای n، $-m$ را قرار دهید به‌دست می‌آید،

$$-mx^{-m}(x-۱) > x^{-m} - ۱$$

دو طرف این نابرابری را در $-x^m$ ضرب کنید، به‌دست می‌آید:

$$x^m - ۱ > m(x-۱)$$

و اگر در این‌جا به‌جای x، $\frac{۱}{x}$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$x^m - ۱ < mx^{m-۱}(x-۱)$$

بنابراین، درحقیقت:

$$mx^{m-۱}(x-۱) < x^m - ۱ < m(x-۱)$$

اگر $۰ < m < ۱$،

$$m(x-۱) < x^m - ۱ < mx^{m-۱}(x-۱)$$

اگر m یک عدد گویا دلخواه غیرواقع در فاصلهٔ بین صفر و یک و x هر عدد مثبت حقیقی مخالف یک باشد.

۵۱. نابرابری‌های این مساله بلافاصله از نتیجه‌های مساله قبل به‌دست می‌آید.

۵۲. قرار دهید $m = \frac{q}{p}$ و $x_i^p = y_i$. در آن صورت نابرابری داده شده را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$\left(\frac{y_۱ + y_۲ + \ldots + y_n}{n}\right)^m \leq \frac{y_۱^m + y_۲^m + \ldots + y_n^m}{n}$$

که در آن $m \geq ۱$ عددی گویا است. با استفاده از نتیجه‌های مساله ۴۷، کافی است ثابت کنیم:

$$\left(\frac{t_۱ + t_۲}{۲}\right)^m \leq \frac{t_۱^m + t_۲^m}{۲}$$

برای هر عدد گویای $m > ۱$ و برای عدد حقیقی و مثبت $t_۱$ و $t_۲$ برقرار است. به بیان دیگر کافی است ثابت کنیم:

$$\left(\frac{۲t_۱}{t_۱+t_۲}\right)^m + \left(\frac{۲t_۲}{t_۱+t_۲}\right)^m \geq ۲ \qquad (۱)$$

با استفاده از نتیجه‌های مسالهٔ ۵۱:

$$(۱+x)^m \geq ۱+mx$$

اگر $m > ۱$ گویا باشد و $۱ + x > ۰$، این دو نابرابری را داریم:

$$\left(\frac{۲t_۱}{t_۱+t_۲}\right)^m \geq ۱+m\left(\frac{۲t_۱}{t_۱+t_۲}-۱\right);$$
$$\left(\frac{۲t_۲}{t_۱+t_۲}\right)^m \geq ۱+m\left(\frac{۲t_۲}{t_۱+t_۲}-۱\right)$$

با جمع آن‌ها به نابرابری (۱) می‌رسیم که همان نتیجهٔ مطلوب است. جواب مساله داده شده را می‌توان بی‌درنگ از نابرابری‌های مساله ۵۱ به‌دست آورد. اکنون با این روش، نشان می‌دهیم که می‌توان نامساوی کلی‌تری از آن نتیجه گرفت. به‌این ترتیب ثابت می‌کنیم که اگر $۰ < \lambda < ۱$، آن‌گاه

$$\left(\frac{y_۱+y_۲+\ldots+y_n}{n}\right)^\lambda \leq \frac{y_۱^\lambda+y_۲^\lambda+\ldots+y_n^\lambda}{n}$$

برای اثبات نامساوی اول، کافی است ثابت کنیم:

$$\left(\frac{ny_۱}{y_۱+y_۲+\ldots+y_n}\right)^\lambda + \left(\frac{ny_۲}{y_۱+y_۲+\ldots+y_n}\right)^\lambda + \ldots + \left(\frac{ny_n}{y_۱+\ldots+y_n}\right)^\lambda \geq n \qquad (۲)$$

اما داریم (مسالهٔ ۵۱ را ببینید):

$$\left(\frac{ny_۱}{y_۱+y_۲+\ldots+y_n}\right)^\lambda \geq ۱+\lambda\left(\frac{ny_۱}{y_۱+y_۲+\ldots+y_n}-۱\right)$$

در این‌جا قرار دهید: $i = ۱, ۲, ۳, \ldots, n$ و نابرابری‌هایی را که به این ترتیب به‌دست می‌آید جمع کنید، به نابرابری (۲) دست می‌یابید. برای حالت $۰ < \lambda < ۱$، به‌طور مشابه عمل کنید.

۵۳. قرار دهید:

$$x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = p, \quad x_۱^۲ + x_۲^۲ + \ldots + x_n^۲ = p'$$

داریم:

$$(x - x_۱)^۲ + (x - x_۲) + \ldots + (x - x_n)^۲ = nx^۲ - ۲px + p'$$
$$= n\left[x^۲ - \frac{۲p}{n}x + \frac{p'}{n}\right] = n\left[\left(x - \frac{p}{n}\right)^۲ + \frac{p'}{n} - \frac{p^۲}{n^۲}\right]$$

عبارت داده شده تنها می‌تواند با $\left(x - \frac{p}{n}\right)^۲$ کوچکترین مقدار را به‌دست دهد (زیرا $\frac{p'}{n} - \frac{p^۲}{n^۲}$ مستقل از x است). اما $\left(x - \frac{p}{n}\right)^۲$ نمی‌تواند منفی باشد بنابراین کمترین مقدار آن برابر صفر است. از این‌رو:

$$x = \frac{p}{n} = \frac{x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n}{n}$$

بنابراین، مجموع

$$(x - x_۱)^۲ + (x - x_۲)^۲ + \ldots + (x - x_n)^۲$$

کمترین مقدار را به‌ازای $x = \frac{x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n}{n}$ اختیار کند.

۵۴. قرار دهید: $x_۱^۲ + x_۲^۲ + \ldots + x_n^۲ = s_۲$، آن‌گاه

$$(x_۱-x_۲)^۲+(x_۱-x_۳)^۲+\ldots+(x_۲-x_۳)^۲+\ldots+(x_{n-۱}-x_n)^۲ = (n-۱)s_۲-۲q$$

که در آن: $q = x_۱x_۲ + x_۱x_۳ + \ldots + x_۱x_n + x_۲x_۳ + \ldots + x_{n-۱}x_n$.

علاوه بر این $(x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n)^۲ = s_۲ + ۲q$ و به‌این ترتیب:

$$(n - ۱)s_۲ = ۲q + \sum_{j>i}(x_i - x_j)^۲$$
$$c^۲ = s_۲ + ۲q$$

که از آن به‌دست می‌آید:

$$ns_۲ = c^۲ + \sum_{j>i}(x_i - x_j)^۲$$

برابری اخیر نشان می‌دهد، وقتی کوچکترین مقدار $\sum_{j>i}(x_i - x_j)^۲$ به‌دست می‌آید، $s_۲$ کوچکترین مقدار را اختیار می‌کند. کوچکترین مقدار این جمع برابر صفر است و به‌ازای

$$x_۱ = x_۲ = \ldots = x_n$$

به این مقدار می‌رسد. اما چون

$$x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = c$$

نتیجه می‌گیریم که: $x_۱^۲ + \ldots + x_n^۲$، به کوچکترین مقدار خود وقتی می‌رسد که داشته باشیم:

$$x_۱ = x_۲ = \ldots = x_n = \frac{c}{n}$$

۵۵. نخست فرض می‌کنیم، λ در فاصلهٔ بین صفر و یک نباشد. در آن صورت، داریم:

$$\frac{x_۱^\lambda + x_۲^\lambda + \ldots + x_n^\lambda}{n} \geq \left(\frac{x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n}{x}\right)^\lambda$$

علامت برابری تنها وقتی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم:

$$x_۱ = x_۲ = \ldots = x_n$$

می‌دانیم که $x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = c$. در آن صورت، به‌ازای تمام مقدارهای $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ داریم:

$$x_۱^\lambda + x_۲^\lambda + \ldots + x_n^\lambda \geq n\left(\frac{c}{n}\right)^\lambda$$

که از آن دیده می‌شود کوچکترین مقدار عبارت

$$x_۱^\lambda + x_۲^\lambda + \ldots + x_n^\lambda$$

برابر $n\left(\frac{c}{n}\right)^{\lambda}$ است که در $x_۱ = x_۲ = \ldots = x_n = \frac{c}{n}$ به این مقدار میرسد. اما اگر $۰ < \lambda < ۱$، آنگاه به این نابرابری زیر میرسیم:

$$\frac{x_۱^{\lambda} + x_۲^{\lambda} + \ldots + x_n^{\lambda}}{n} \leq \left(\frac{x_۱ + \ldots + x_n}{n}\right)^{\lambda}$$

در آن صورت بهازای $x_۱ = x_۲ = \ldots = x_n$، کوچکترین مقدار کمیت $x_۱^{\lambda} + x_۲^{\lambda} + \ldots + x_n^{\lambda}$ بهدست میآید.

۵۶. این نابرابری را داریم (مساله ۳۰ را ببینید):

$$\sqrt[n]{x_۱ x_۲ \ldots x_n} \leq \frac{x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n}{n} = \frac{c}{n}$$

از اینرو: $x_۱ x_۲ \ldots x_n \leq \left(\frac{c}{n}\right)^{n}$

بهاین ترتیب، حاصلضرب $x_۱ x_۲ \ldots x_n$ بزرگتر از $\left(\frac{c}{n}\right)^{n}$ نیست و تنها در حالت

$$x_۱ = x_۲ = \ldots = x_n = \frac{c}{n}$$

به این مقدار میرسد (مساله ۳۰ را ببینید). بنابراین بزرگترین مقدار حاصلضرب

$$x_۱ x_۲ \ldots x_n$$

در حالت $x_۱ = x_۲ = \ldots = x_n = \frac{c}{n}$ بهدست میآید.

۵۷. داریم:

$$\frac{x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_۱ x_۲ \ldots x_n}$$

درنتیجه: $x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n \geq n\sqrt[n]{c}$

علامت برابری در صورتی ممکن است که $x_۱ = x_۲ = \ldots = x_n$. از اینرو روشن است که مجموع $x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n$ در صورتی به کوچکترین مقدار خود میرسد که $x_۱ = x_۲ = \ldots = x_n = \sqrt[n]{c}$.

۵۸. نخست فرض می‌کنیم که μ_i $(i = ۱, ۲, ۳, \ldots, n)$ نمایندهٔ عددهایی درست باشد. داریم:

$$\sqrt[\mu_۱+\mu_۲+\mu_۳+\ldots+\mu_n]{(\frac{x_۱}{\mu_۱})^{\mu_۱}(\frac{x_۲}{\mu_۲})^{\mu_۲}\ldots(\frac{x_n}{\mu_n})^{x_n}}$$

$$= \sqrt[\mu_۱+\ldots+\mu_n]{\frac{x_۱}{\mu_۱}\cdot\frac{x_۱}{\mu_۱}\ldots\frac{x_۱}{\mu_۱}\cdot\frac{x_۲}{\mu_۲}\ldots\frac{x_۲}{\mu_۲}\ldots\frac{x_n}{\mu_n}\ldots\frac{x_n}{\mu_n}\ldots\frac{x_n}{\mu_n}} \leq$$

$$\leq \frac{\mu_۱\frac{x_۱}{\mu_۱}+\mu_۲\frac{x_۲}{\mu_۲}+\ldots+\mu_n\frac{x_n}{\mu_n}}{\mu_۱+\mu_۲+\ldots+\mu_n} = \frac{c}{\mu_۱+\ldots+\mu_n}$$

در نتیجه:

$$x_۱^{\mu_۱}x_۲^{\mu_۲}\ldots x_n^{\mu_n} \leq \left(\frac{c}{\mu_۱+\ldots+\mu_n}\right)^{\mu_۱+\mu_۲+\ldots+\mu_n} \cdot \mu_۱^{\mu_۱}\cdot\mu_۲^{\mu_۲}\ldots\mu_n^{\mu_n}$$

و علامت برابری در صورتی حاصل می‌شود که داشته باشیم:

$$\frac{x_۱}{\mu_۱} = \frac{x_۲}{\mu_۲} = \ldots = \frac{x_n}{\mu_n}$$

اکنون فرض کنید μ_i عددی کسری باشد. آن‌ها را با مخرج مشترک می‌نویسیم، قرار دهید

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{\mu}$$

که در آن λ_i و μ عددهایی درست و مثبت هستند، از آن‌جا که

$$x_۱^{\mu_۱}x_۲^{\mu_۲}\ldots x_{x_n}^{\mu_n} = \sqrt[\mu]{x_۱^{\lambda_۱}x_۲^{\lambda_۲}\ldots x_n^{\lambda_n}}$$

حاصل‌ضرب $x_۱^{\mu_۱}x_۲^{\mu_۲}\ldots x_n^{\mu_n}$ به‌طور هم‌زمان با حاصل‌ضرب $x_۱^{\lambda_۱}x_۲^{\lambda_۲}\ldots x_n^{\lambda_n}$ به بزرگترین مقدار خود می‌رسد که در آن λ_i نمایندهٔ عددی درست است. همان‌گونه که از اثبات بالا استنباط می‌شود، این حالت وقتی اتفاق می‌افتد که

$$\frac{x_۱}{\lambda_۱} = \frac{x_۲}{\lambda_۲} = \ldots = \frac{x_n}{\lambda_n}$$

صورت کسر را بر μ تقسیم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{x_1}{\mu_1}=\frac{x_2}{\mu_2}=\ldots=\frac{x_n}{\mu_1}$$

به‌این ترتیب، اگر $x_i>0$ و $x_1+x_2+\ldots+x_n=c$، آن‌گاه حاصل‌ضرب $x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\ldots x_n^{\mu_n}$ ($\mu_i>0$، گویا) به بزرگترین مقدار خود می‌رسد اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\frac{x_1}{\mu_1}=\frac{x_2}{\mu_2}=\ldots=\frac{x_n}{\mu_n}$$

۵۹. داریم:

$$\sqrt[n]{a_1x_1\cdot a_2x_2\ldots a_nx_n}\leq\frac{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n}{n}=\frac{c}{n}$$

که از آن نتیجه می‌گیریم حاصل‌ضرب

$$a_1x_1\cdot a_2x_2\ldots a_nx_n$$

تنها در صورتی به بزرگترین مقدار خود می‌رسد که داشته باشیم:

$$a_1x_1=a_2x_2=\ldots=a_nx_n$$

اما از آن‌جاکه:

$$a_1x_1\cdot a_2x_2\ldots a_nx_n=(a_1a_2\ldots a_n)(x_1x_2\ldots x_n)$$

حاصل‌ضرب $x_1x_2\ldots x_n$ در حقیقت، به بزرگترین مقدار خود می‌رسد اگر و تنها اگر

$$a_1x_1=a_2x_2=\ldots=a_nx_n=\frac{c}{n}$$

۶۰. قرار دهید: $a_ix_i^{\lambda_i}=y_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$، آن‌گاه

$$x_i=\left(\frac{y_i}{a_i}\right)^{\frac{1}{\lambda_i}};$$
$$y_1+y_2+\ldots+y_n=c$$

علاوه بر این

$$x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n} = \left(\frac{y_1}{a_1}\right)^{\frac{\mu_1}{\lambda_1}} \left(\frac{y_2}{a_2}\right)^{\frac{\mu_2}{\lambda_2}} \ldots \left(\frac{y_n}{a_n}\right)^{\frac{\mu_n}{\lambda_n}}$$

مساله به این‌جا می‌رسد که چه‌وقت حاصل‌ضرب

$$y^{\frac{\mu_1}{\lambda_1}} \cdot y_2^{\frac{\mu_2}{\lambda_2}} \ldots y_n^{\frac{\mu_n}{\lambda_n}}$$

با شرط $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = c$، بزرگترین مقدار خود را اختیار می‌کند. با مراجعه به نتیجه‌های مساله ۵۸، ملاحظه می‌کنیم که اگر داشته باشیم:

$$\frac{y_1}{\frac{\mu_1}{\lambda_1}} = \frac{y_2}{\frac{\mu_2}{\lambda_2}} = \ldots = \frac{y_n}{\frac{\mu_n}{\lambda_n}}$$

آن‌وقت، بزرگترین مقدار به‌دست می‌آید.

به این ترتیب اگر،

$$a_1 x_1^{\lambda_1} + a_2 x_2^{\lambda_2} + \ldots + a_n x_n^{\lambda_n} = c$$

آن‌گاه حاصل‌ضرب $x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}$ به بزرگترین مقدار خود می‌رسد مشروط بر این‌که:

$$\frac{\lambda_1 a_1 x_1^{\lambda_1}}{\mu_1} = \frac{\lambda_2 a_2 x_2^{\lambda_2}}{\mu_2} = \ldots = \frac{\lambda_n a_n x_n^{\lambda_n}}{\mu_n}$$

۶۱. قرار دهید:

$$a_1 x_1^{\mu_1} = y_1,\ a_2 x_2^{\mu_2} = y_2, \ldots, a_n x_n^{\mu_n} = y_n$$

از آن‌جا

$$x_1 = \left(\frac{y_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{\mu_1}},\ x_2 = \left(\frac{y_2}{a_2}\right)^{\frac{1}{\mu_2}}, \ldots, x_n = \left(\frac{y_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{\mu_n}}$$

و مساله به‌این صورت درمی‌آید. با چه شرط‌هایی، مجموع

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$

کوچکترین مقدار خود را اختیار می‌کند اگر داشته باشیم.

$$y_1^{\frac{\lambda_1}{\mu_1}} \cdot y_2^{\frac{\lambda_2}{\mu_2}} \dots y_n^{\frac{\lambda_n}{\mu_n}} = c_1$$

که در آن c_1 یک ثابت جدید است؟

از آنجاکه $\frac{\lambda_1}{\mu_1}, \dots, \frac{\lambda_n}{\mu_n}$ گویا هستند، قرار می‌دهیم:

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\alpha_1}{N},\ \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{\alpha_2}{N},\ \dots,\ \frac{\lambda_n}{\mu_n} = \frac{\alpha_n}{N}$$

آن‌گاه مساله به‌این صورت تبدیل می‌شود اگر

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n} = c_2$$

تعیین کنید چه‌وقت $y_1 + y_2 + \dots + y_n$، به کوچکترین مقدار خود می‌رسد؟ سرانجام قرار دهید: $y_1 = \alpha_1 u_1$، $y_2 = \alpha_2 u_2$، ...، $y_n = \alpha_n u_n$، به این مساله می‌رسیم. با چه شرط‌هایی

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

به کوچکترین مقدار خود می‌رسد اگر

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_n^{\alpha_n} = c_3$$

اما

$$\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n} \geq \sqrt[\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n]{u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_n^{\alpha_n}} = \sqrt[\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n]{c_3}$$

از این‌رو $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$ به کوچکترین مقدار خود می‌رسد به‌این ترتیب اگر $u_1 = u_2 = \dots = u_n$ و اگر

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} = c$$

آن‌گاه $a_1 x_1^{\mu_1} + a_2 x_2^{\mu_2} + \dots + a_n x_n^{\mu_n}$، به کوچکترین مقدار خود می‌رسد وقتی که

$$\frac{x_1^{\mu_1}}{\frac{\lambda_1}{a_1\mu_1}} = \frac{x_2^{\mu_2}}{\frac{\lambda_2}{a_2\mu_2}} = \dots = \frac{x_n^{\mu_n}}{\frac{\lambda_n}{a_n\mu_n}}$$

۶۲. با استفاده از فرمول لاگرانژ (مساله ۵ فصل ۱ را ببینید)، داریم:

$$(x^۲ + y^۲ + z^۲ + \ldots + t^۲)(a^۲ + b^۲ + c^۲ + \ldots + k^۲) =$$
$$= (ax + by + \ldots + kt)^۲ + (xb - ya)^۲ + (xc - za)^۲ + \ldots$$

از آن‌جاکه $a^۲ + b^۲ + c^۲ + \ldots + k^۲$ مقدارهای ثابت و

$$ax + by + \ldots + kt = A$$

(بنابه فرض)، درنتیجه، این عبارت نیز مقداری ثابت است، بنابراین مجموع

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ + \ldots + t^۲$$

به‌طور هم‌زمان با مجموع

$$(xb - ya)^۲ + (xc - za)^۲ + \ldots$$

به حداقل مقدار خود می‌رسد. اما کوچکترین مقدار مجموع اخیر صفر است وقتی که

$$xb - ya = \circ, \quad xc - za = \circ$$

یعنی وقتی که

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \ldots = \frac{t}{k}$$

حال این نسبت عمومی را برابر λ قرار می‌دهیم طوری‌که:

$$x = a\lambda,\ y = b\lambda,\ z = c\lambda,\ \ldots,\ t = k\lambda$$

این مقدارها را به‌جای $t, \ldots, z, y, x$ در این برابری قرار دهید:

$$ax + by + \ldots + kt = A$$

حاصل می‌شود:

$$\lambda = \frac{A}{a^۲ + b^۲ + \ldots + k^۲}$$

و درنتیجه، مقدارهای مطلوب $x, y, z, \ldots, t$ که بهازای آنها عبارت

$$x^۲ + y^۲ + \ldots + z^۲$$

کوچکترین مقدار خود را اختیار میکند، عبارت است از:

$$x = \frac{aA}{a^۲ + b^۲ + \ldots + k^۲},\ y = \frac{bA}{a^۲ + b^۲ + \ldots + k^۲}, \ldots, t = \frac{kA}{a^۲ + b^۲ + \ldots + k^۲}$$

۶۳. داریم: $u = Ax^۲ + ۲Bxy + Cy^۲ + ۲Dx + ۲EY + F$، که در آن

$$\begin{array}{ll} A = a_۱^۲ + a_۲^۲ + \ldots + a_n^۲ & B = a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + \ldots + a_nb_n \\ C = b_۱^۲ + b_۲^۲ + \ldots + b_n^۲ & D = a_۱c_۱ + a_۲c_۲ + \ldots + a_nc_n \\ E = b_۱c_۱ + b_۲c_۲ + \ldots + b_nc_n & F = c_۱^۲ + c_۲^۲ + \ldots + c_n^۲ \end{array}$$

قرار دهید:

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta$$

در آن صورت، بهدست میآید:

$$u = A(x' + \alpha)^۲ + ۲B(x' + \alpha)(y' + \beta) + C(y' + \beta)^۲ +$$
$$+ ۲D(x' + \alpha) + ۲E(y' + \beta) + F$$

با بسط این عبارت برحسب توانهای x' و y'، حاصل میشود:

$$u = Ax'^۲ + ۲Bx'y' + Cy'^۲ + ۲(A\alpha + B\beta + D)x' +$$
$$+ ۲(B\alpha + C\beta + E)y' + f'$$

حال α و β را طوری انتخاب میکنیم که ضریبهای x' و y' در عبارت اخیر برابر صفر شود. برای این منظور تنها لازم است α و β را بهعنوان جواب دستگاه زیر انتخاب کنیم:

$$A\alpha + B\beta + D = ۰$$
$$B\alpha + C\beta + E = ۰$$

در این صورت داریم:

$$u = Ax'^{۲} + ۲Bx'y' + Cy'^{۲} + F'$$

علاوه بر این:

$$u = \frac{۱}{A}\{A^{۲}x'^{۲} + ۲BAx'y' + ACy'^{۲}\} + F' =$$
$$= \frac{۱}{A}\{(Ax' + By')^{۲} + (AC - B^{۲})y'^{۲}\} + F'$$

اما

$$AC - B^{۲} = (a_{۱}^{۲} + a_{۲}^{۲} + \ldots + a_{n}^{۲})(b_{۱}^{۲} + \ldots + b_{n}^{۲}) -$$
$$-(a_{۱}b_{۱} + a_{۲}b_{۲} + \ldots + a_{n}b_{n})^{۲} \geq ۰ \quad A > ۰$$

به‌این ترتیب، u کوچکترین مقدار خود را وقتی اختیار می‌کند که:

$$Ax' + By' = ۰, \quad y' = ۰$$

از این رو:

$$x' = y' = ۰, \quad x = \alpha, \quad y = \beta$$

و بنابراین، مقدارهای x و y که به‌ازای آن u کوچکترین مقدار خود را اختیار می‌کند، جواب این دستگاه معادله‌ها است:

$$Ax + By + D = ۰, \quad Bx + Cy + E = ۰$$

باوجود این، این نتیجه را می‌توان با روش اندک متفاوت دیگری به‌دست آورد:

قرار دهید:

$$a_{۱}x + b_{۱}y + c_{۱} = X_{۱}, \quad a_{۲}x + b_{۲}y + c_{۲} = X_{۲}, \ldots, a_{n}x + b_{n}y + c_{n} = X_{n}$$

فرض کنید $\lambda_{۱}, \lambda_{۲}, \ldots, \lambda_{n}$ مقدارهایی ثابت باشند که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} a_{۱}\lambda_{۱} + a_{۲}\lambda_{۲} + \ldots + a_{n}\lambda_{n} &= ۰ \\ b_{۱}\lambda_{۱} + b_{۲}\lambda_{۲} + \ldots + b_{n}\lambda_{n} &= ۰ \qquad (*) \\ c_{۱}\lambda_{۱} + c_{۲}\lambda_{۲} + \ldots + c_{n}\lambda_{n} &= k \end{aligned}$$

که در آن k یک عدد دلخواه است. به‌دست می‌آید:

$$\lambda_۱ X_۱ + \lambda_۲ X_۲ + \ldots + \lambda_n X_n = k$$

و از این‌رو، باید کوچکترین مقدار عبارت

$$X_۱^۲ + X_۲^۲ + \ldots + X_n^۲$$

را به‌دست آوریم، به‌شرط آن‌که:

$$\lambda_۱ X_۱ + \lambda_۲ X_۲ + \ldots + \lambda_n X_n = k \ (\text{ثابت})$$

از نتیجه مساله ۶۲، کوچکترین مقدر آن به‌دست می‌آید اگر:

$$\frac{X_۱}{\lambda_۱} = \frac{X_۲}{\lambda_۲} = \ldots = \frac{x_n}{\lambda_n}$$

یا $\lambda_n = X_n\mu$ و ... و $\lambda_۲ = X_۲\mu$ و $\lambda_۱ = X_۱\mu$ با قرار دادن این عبارت‌ها، در دو برابری اول (*)، به‌دست می‌آید:

$$a_۱ X_۱ + a_۲ X_۲ + \ldots + a_n X_n = ۰$$
$$b_۱ X_۱ + b_۲ X_۲ + \ldots + b_n X_n = ۰$$

که از این دستگاه، جواب‌ها با روش قبل به‌دست می‌آید.

۶۴. همان‌گونه که می‌دانیم، اتحاد زیر وجود دارد (مساله ۷۷، فصل ۶ را ببینید):

$$f(x) = f(x_۰)\frac{(x-x_۱)(x-x_۲)\ldots(x-x_n)}{(x_۰-x_۱)(x_۰-x_۲)\ldots(x_۰-x_n)} +$$
$$+f(x_۱)\frac{(x-x_۰)(x-x_۲)\ldots(x-x_n)}{(x_۱-x_۰)(x_۱-x_۲)\ldots(x_۱-x_n)}$$
$$+\ldots+f(x_n)\frac{(x-x_۰)(x-x_۱)\ldots(x-x_{n-۱})}{(x_n-x_۰)(x_n-x_۱)\ldots(x_n-x_{n-۱})}$$

که در آن $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n است. ضریب‌های x^n را در دو طرف این برابری، را برابر قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$۱ = \frac{f(x_۰)}{(x_۰-x_۱)(x_۰-x_۲)\ldots(x_۰-x_n)}$$

$$+\dots\frac{f(x_۱)}{(x_۱-x_۰)(x_۱-x_۲)\dots(x_۱-x_n)}+\dots+$$
$$+\frac{f(x_n)}{(x_n-x_۰)(x_n-x_۱)\dots(x_n-x_{n-۱})}$$

فرض کنید M بزرگترین مقدار در بین کمیت‌های

$$|f(x_۰)|,\ |f(x_۱)|,\dots,|f(x_n)|$$

باشد، در آن صورت:

$$۱\le M\left\{\frac{۱}{|(x_۰-x_۱)(x_۰-x_۲)\dots(x_۰-x_n)|}+\right.$$
$$\left.+\frac{۱}{|(x_۱-x_۰)(x_۰-x_۲)\dots(x_۰-x_n)|}+\dots+\frac{۱}{|(x_n-x_۰)\dots(x_n-x_{n-۱})|}\right\}$$

همان‌طور که به‌سادگی دیده می‌شود، باتوجه به شرایط داده شده داریم:

$$|(x_k-x_۰)(x_k-x_۱)\dots(x_k-x_{k-۱})\dots(x_k-x_n)|\ge k!(n-k)!$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{|(x_k-x_۰)(x_k-x_۱)\dots(x_k-x_n)|}\le\frac{۱}{k!(n-k)!}$$

درنتیجه:

$$۱\le M\sum_{k=۰}^{n}\frac{۱}{k!(n-k)!}=\frac{M}{n!}\sum_{k=۰}^{n}C_n^k=M\frac{۲^n}{n!}$$

سرانجام: $M\ge\frac{n!}{۲^n}$

۶۵. از آن‌جا که $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$، یعنی مجموع دو کمیت $\sin^۲ x$ و $\cos^۲ x$ برابر یک مقدار ثابت است. حاصل‌ضرب $\sin^۲ x\times\cos^۲ x$ وقتی به بزرگترین مقدار خود می‌رسد که این کمیت‌ها برابر یکدیگر باشند. این وضع وقتی اتفاق می‌افتد که $x=\frac{\pi}{۴}$. عین همین مطلب را می‌توان از اتحاد

$$\sin x\times\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

مشاهده کرد.

۶۶. می‌دانیم اگر $x+y+z=\frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه

$$\tan x\tan y+\tan x\tan z+\tan y\tan z=۱$$

(مساله ۴۰، فصل ۲ را ببینید). بنابراین، مجموع این سه کمیت

$$\tan x\tan y,\ \tan x\tan z,\ \tan y\tan z$$

ثابت است. بنابراین حاصل‌ضرب این کمیت‌ها، یعنی

$$\tan^{۲} x\tan^{۲} y\tan^{۲} z$$

درصورتی به بزرگترین مقدار خود می‌رسد که داشته باشیم:

$$\tan x\tan y=\tan x\tan z=\tan y\tan z$$

از آن‌جا $\tan x=\tan y=\tan z$ و درنتیجه

$$x=y=z=\frac{\pi}{۶}$$

۶۷. داریم:

$$\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\ldots+\frac{۱}{۳n}+\frac{۱}{۳n+۱}=\left(\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{۳n+۱}\right)+$$
$$+\left(\frac{۱}{n+۲}+\frac{۱}{۳n}\right)+\ldots+\frac{۱}{۲n+۱}=$$
$$=\frac{۴x+۲}{(n+۱)(۳n+۱)}+\frac{۴n+۲}{(n+۲)۳n}+\ldots+\frac{۴n+۲}{۲(۲n+۱)^{۲}}>$$
$$>(۴n+۲)\left\{\frac{n}{(۲n+۱)^{۲}}+\frac{۱}{۲(۲n+۱)^{۲}}\right\}=۱$$

۶۸. قرار دهید: $a=\alpha^{۲}$. باید ثابت کنیم:

$$\alpha^{۲n}-۱\geq n(\alpha^{n+۱}-\alpha^{n-۱});$$

یا

$$\alpha^{۲n} - ۱ \geq n\alpha^{n-۱}(\alpha^۲ - ۱),\ \frac{\alpha^{۲n} - ۱}{\alpha^۲ - ۱} \geq n\alpha^{n-۱}$$

اما:

$$\frac{\alpha^{۲n} - ۱}{\alpha^۲ - ۱} = \alpha^{۲(n-۱)} + \alpha^{۲(n-۲)} + \ldots + \alpha^۲ + ۱ \geq n\sqrt[n]{\alpha^۲ \cdot \alpha^۴ \ldots \alpha^{۲n-۲}}$$

(با استفاده از قضیهٔ مربوط به میانگین حسابی و هندسی چند عدد). از آن‌جا که

$$۲ + ۴ + \ldots + (۲n - ۲) = n(n - ۱)$$

به‌دست می‌آید:

$$\frac{\alpha^{۲n-۱}}{\alpha^۲ - ۱} \geq n\alpha^{n-۱}$$

۶۹. مجموع داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \left(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲^۲}\right) + \left(\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۲^۳}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{۱}{۲^{n-۲} + ۱} + \ldots + \frac{۱}{۲^{n-۱}}\right) + \frac{۱}{۲^{n-۱} + ۱} + \ldots + \frac{۱}{۲^n - ۱}$$

هریک از عبارت‌های داخل پرانتز بزرگتر از $\frac{۱}{۲}$ است درنتیجه، مجموع کل بیشتر از $\frac{n}{۲}$ است. از سوی دیگر، این مجموع را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$۱ + \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}\right) + \left(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷}\right) + \ldots + \left(\frac{۱}{۲^{n-۱}} + \frac{۱}{۲^{n-۱} + ۱} + \ldots + \frac{۱}{۲^n - ۱}\right)$$

اما هریک از عبارت‌های داخل پرانتز کوچکتر از واحد است و درنتیجه مجموع کل کوچکتر از n است.

۷۰. با انجام عمل‌های لازم، این نابرابری به‌دست می‌آید:

$$(a + c)(a + b)(b + d)(c + d) - (a + b + c + d)(c + d)ab -$$
$$-(a + b + c + d)cd(a + b) \geq ۰$$

و یا این نابرابری $(ad-bc)^{۲} \geq ۰$

فصل ۹

۱. در دستور اصلی $n = ۱$ قرار دهید، حاصل می‌شود:

$$v_{۲} = ۳v_{۱} - ۲v_{۰} = ۳ \times ۳ - ۲ \times ۲ = ۵ = ۲^{۲} + ۱$$

فرض کنید $v_k = ۲^k + ۱$ $(k = ۱, ۲, \dots, n)$، ثابت می‌کنیم:

$$v_{n+۱} = ۲^{n+۱} + ۱$$

درحقیقت:

$$\begin{aligned} v_{n+۱} &= ۳v_n - ۲v_{n-۱} = ۳(۲^n + ۱) - ۲(۲^{n-۱} + ۱) = \\ &= ۳ \times ۲^n + ۳ - ۲^n - ۲ = ۲^n(۳ - ۱) + ۱ = ۲^{n+۱} + ۱ \end{aligned}$$

۲. مانند مسالهٔ قبل حل می‌شود.

۳. همان‌گونه که دیده می‌شود، این رابطه برای $n = ۱$ برقرار است. فرض می‌کنیم به‌ازای اندیس n رابطه درست باشد. آن‌وقت

$$\frac{a_{n+۱} - \sqrt{A}}{a_{n+۱} + \sqrt{A}} = \frac{\frac{۱}{۲}(a_n + \frac{A}{a_n}) - \sqrt{A}}{\frac{۱}{۲}(a_n + \frac{A}{a_n}) + \sqrt{A}} = \frac{a_n^{۲} - ۲\sqrt{A}a_n + A}{a_n^{۲} + ۲\sqrt{A}a_n + A} = \frac{(a_n - \sqrt{A})^{۲}}{(a_n + \sqrt{A})^{۲}}$$

اما بنا به‌فرض $\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_{۱} - \sqrt{A}}{a_{۱} + \sqrt{A}}\right)^{۲^{n-۱}}$ ، بنابراین

$$\frac{a_{n+۱} - \sqrt{A}}{a_{n+۱} + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}}\right)^{۲} = \left(\frac{a_{۱} - \sqrt{A}}{a_{۱} + \sqrt{A}}\right)^{۲ \times ۲^{n-۱}} = \left(\frac{a_{۱} - \sqrt{A}}{a_{۱} + \sqrt{A}}\right)^{۲^n}$$

۴. داریم:

$$a_۲ = \frac{a_۰ + a_۱}{۲},\ a_۳ = \frac{a_۱ + a_۲}{۲},\ a_۴ = \frac{a_۲ + a_۳}{۲},\ a_۵ = \frac{a_۳ + a_۴}{۲},\dots$$

از این‌رو:

$$a_۲ - a_۱ = \frac{a_۰ - a_۱}{۲},\ a_۳ - a_۲ = \frac{a_۱ - a_۲}{۲},\ a_۴ - a_۳ = \frac{a_۲ - a_۳}{۲},\dots$$

درنتیجه:

$$a_۲ - a_۱ = -\frac{a_۱ - a_۰}{۲},$$

$$a_۳ - a_۲ = \frac{a_۱ - a_۲}{۲} = \frac{a_۱ - a_۰}{۲^۲}$$

$$a_۴ - a_۳ = -\frac{a_۱ - a_۰}{۲^۳}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

به‌سادگی دیده می‌شود که این دستور عمومی وجود دارد:

$$a_n - a_{n-۱} = (-۱)^{n-۱}\frac{a_۱ - a_۰}{۲^{n-۱}}$$

جمله به جملهٔ تمام دستورهای اخیر را با هم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$a_n - a_۱ = -\frac{a_۱ - a_۰}{۲} + \frac{a_۱ - a_۰}{۲^۲} - \frac{a_۱ - a_۰}{۲^۳} + \dots + (-۱)^{n-۱}\frac{a_۱ - a_۰}{۲^{n-۱}} =$$

$$= -\frac{a_۱ - a_۰}{۲}\left(۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \dots + (-۱)^{n-۲}\frac{۱}{۲^{n-۲}}\right) =$$

$$= \frac{a_۱ - a_۰}{۳}\left\{(-۱)^{n-۱}\frac{۱}{۲^{n-۱}} - ۱\right\}$$

از این‌جا، سرانجام:

$$a_n = \frac{۲a_۱ + a_۰}{۲} + (-۱)^{n-۱}\frac{a_۱ - a_۰}{۳ \times ۲^{n-۱}}$$

۵. این رابطه را در نظر بگیرید:

$$a_k = ۳a_{k-۱} + ۱$$

در این‌جا به‌جای k، مقدارهای ۲، ۳، ۴، ...، n را قرار دهید، حاصل می‌شود:

$$\sum_{k=۲}^{n} a_k = ۳\sum_{k=۲}^{n} a_{k-۱} + n - ۱$$

با فرض $S = a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n$، به‌دست می‌آید:

$$S - a_۱ = ۳(S - a_n) + n - ۱$$

درنتیجه: $S = \frac{۱}{۲}\{۳a_n - a_۱ - n + ۱\}$

اکنون a_n را برحسب $a_۱$ بیان می‌کنیم. داریم:

$$a_n = ۳a_{n-۱} + ۱, \quad a_{n-۱} = ۳a_{n-۲} + ۱$$

از این‌رو: $a_n - a_{n-۱} = ۳(a_{n-۱} - a_{n-۲})$؛ بنابراین:

$$a_n - a_{n-۱} = ۳(a_{n-۱} - a_{n-۲}) = ۳^۲(a_{n-۲} - a_{n-۳}) =$$
$$= ۳^۳(a_{n-۳} - a_{n-۴}) = \ldots = ۳^{n-۲}(a_۲ - a_۱)$$

اما $a_۲ = ۳a_۱ + ۱ = ۷$، بنابراین

$$a_n - a_{n-۱} = ۵ \times ۳^{n-۲}$$

در این‌جا به‌جای n، مقدارهای ۲، ۳، ۴، ...، n قرار دهید، داریم:

$$a_۲ - a_۱ = ۵ \times ۱$$

$$a_۳ - a_۲ = ۵ \times ۳$$

$$a_۴ - a_۳ = ۵ \times ۳^۲$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n - a_{n-۱} = ۵ \times ۳^{n-۲}$$

از مجموع این برابری‌ها، حاصل می‌شود

$$a_n - a_1 = 5(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-2}) = \frac{5}{2}(3^{n-1} - 1)$$

عبارت مربوط به S را به این صورت می‌نویسیم:

$$S = \frac{1}{2}\{3(a_n - a_1) + 2a_1 - n + 1\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{15}{2}(3^{n-1} - 1) + 4 - n + 1\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\{5(3^n - 2) - 2n\}$$

۶. داریم، $a_n = ka_{n-1} + l,\ a_{n-1} = ka_{n-2} + l$
درنتیجه:

$$a_n - a_{n-1} = k(a_{n-1} - a_{n-2}) = k^2(a_{n-2} - a_{n-3}) = \ldots =$$
$$= k^{n-2}(a_2 - a_1)$$

از این‌جا:

$$a_2 - a_1 = (a_2 - a_1)$$
$$a_3 - a_2 = k_2(a_2 - a_1)$$
$$a_4 - a_3 = k^2(a_2 - a_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n - a_{n-1} = k^{n-2}(a_2 - a_1)$$

این برابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$a_n = k^{n-1}a_1 + \frac{k^{n-1} - 1}{k - 1}l$$

۷. رابطهٔ داده شده را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$a_{n+1} - a_n - (a_n - a_{n-1}) = 1$$

و قرار دهید: $(n = ۲, ۳, ۴, \ldots)$ $.a_n - a_{n-۱} = x_n$

در آن صورت داریم: $.x_{n+۱} - x_n = ۱$

در این‌جا به‌جای n، عددهای ۲, ۳, ۴, ..., $n - ۱$ را قرار دهید و آن‌ها را با هم جمع کنید، به‌دست می‌آید:

$$x_n - x_۲ = n - ۲$$

که اگر در نابرابری $a_n - a_{n-۱} = x$ به‌جای n، عددهای طبیعی از ۲ تا n را قرار دهیم، به‌دست می‌آید

$$a_n - a_۲ = x_۳ + x_۴ + \ldots + x_n$$

و بنابراین:

$$a_n = a_۲ + x_۳ + x_۴ + \ldots + x_n$$

اما:

$$\sum_{k=۳}^{n} x_k = \sum_{k=۳}^{n} (x_۲ + k - ۲) = (n-۲)x_۲ + (n-۲) + (n-۳) + \ldots + ۱$$
$$= (n-۲)x_۲ + \frac{(n-۱)(n-۲)}{۲}$$

از این‌رو:

$$a_n = a_۲ + (n-۲)x_۲ + \frac{(n-۱)(n-۲)}{۲} = a_۲ + (n-۲)(a_۲ - a_۱) +$$
$$+\frac{(n-۱)(n-۲)}{۲} = \frac{(n-۱)(n-۲)}{۲} + (n-۱)a_۲ - (n-۲)a_۱$$

۸. قرار دهید: $.a_{n+۲} - a_{n+۱} = x_n$ در آن صورت رابطهٔ زیر برقرار است:

$$x_{n+۱} - ۲x_n + x_{n-۱} = ۱$$

با استفاده از نتیجهٔ مسالهٔ قبل داریم:

$$x_n = \frac{(n-۱)(n-۲)}{۲} + (n-۱)x_۲ - (n-۲)x_۱$$

اما روشن است که:

$$a_n - a_۲ = x_۱ + x_۲ + \ldots + x_{n-۲} = \sum_{k=۱}^{n-۲} x_k$$

درنتیجه:

$$a_n - a_۲ = \frac{۱}{۲}\sum_{k=۱}^{n-۲}(k-۱)(k-۲) + x_۲\sum_{k=۱}^{n-۲}(k-۱) - x_۱\sum_{k=۱}^{n-۲}(k-۲)$$

و سرانجام

$$a_n = \frac{(n-۱)(n-۲)}{۲}a_۳ - (n-۳)(n-۱)a_۲ + \frac{(n-۲)(n-۳)}{۲}a_۱ + \\ + \frac{(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۶}$$

۹. این دستور را می‌توان با روش استقرای ریاضی نتیجه گرفت. روشن است که این دستور به‌ازای $n = ۱$ برقرار است، از آن‌جاکه

$$a_n = \frac{a_{n-۱} + b_{n-۱}}{۲}$$

روشن است که این فرمول‌ها به‌ازای $n - ۱$ برقرار است، حال درستی آن را به‌ازای n ثابت می‌کنیم. بنابه فرض، داریم:

$$a_{n-۱} = a + \frac{۲}{۳}(b-a)\left(۱ - \frac{۱}{۴^{n-۱}}\right),$$

$$b_{n-۱} = a + \frac{۲}{۳}(b-a)\left(۱ + \frac{۱}{۲ \times ۴^{n-۱}}\right)$$

اما: $a_n = \frac{a_{n-۱} + b_{n-۱}}{۴} = a + \frac{۲}{۳}(b-a)\left(۱ - \frac{۱}{۴^n}\right)$ و درنتیجه این دستور به‌ازای هر عدد درست و مثبت n برقرار است. تنها باقی می‌ماند اثبات این مطلب که دستور b_n هم، برای هر عدد درست و مثبت n درست است. داریم:

$$b_n = \frac{a_n + b_{n-۱}}{۲} = a + \frac{۲}{۳}(b-a)\left(۱ + \frac{۱}{۲ \times ۴^n}\right)$$

و اثبات کامل می‌شود.

باوجود این، این مساله را می‌توان با روش اندک متفاوت دیگری حل کرد. روشن است که:

$$a_n = \frac{a_{n-۱} + b_{n-۱}}{۲}, \quad b_n = \frac{a_{n-۱} + ۳b_{n-۱}}{۴}$$

دو طرف این نابرابری‌ها را در ضریب λ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$a_n + \lambda b_n = \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}\lambda\right) \alpha_{n-۱} + \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۳\lambda}{۴}\right) b_{n-۱}$$

λ را طوری انتخاب می‌کنیم که:

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴}\lambda = \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}\lambda\right)\lambda$$

دو مقدار مطلوب برای λ وجود دارد که ریشه‌های معادله

$$\lambda^۲ - \lambda - ۲ = ۰$$

هستند، یعنی $۲ = \lambda_۱$ و $۱- = \lambda_۲$. به‌این ترتیب، به‌ازای این مقدارهای λ، برابری

$$a_n + \lambda b_n = \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}\lambda\right)(a_{n-۱} + \lambda b_{n-۱})$$

که به‌ازای تمام مقدارهای مثبت n برقرار است. در این‌جا به‌ترتیب به‌جای n مقدارهای ۱، ۲، ۳، ... و n را قرار دهید حاصل می‌شود:

$$a_۱ + \lambda b_۱ = \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}\lambda\right)(a + \lambda b)$$

$$a_۲ + \lambda b_۲ = \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}\lambda\right)(a_۱ + \lambda b_۱)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n + \lambda b_n = \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}\lambda\right)(a_{n-۱} + \lambda b_{n-۱})$$

با ضرب جمله‌به‌جملهٔ این برابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$a_n + \lambda b_n = \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}\lambda\right)^n (a + \lambda b)$$

که به‌ازای هر عدد درست و مثبت n و $\lambda = ۲$ و $\lambda = -۱$ برقرار است. با قرار دادن این مقدارها به‌جای λ، به‌دست می‌آید:

$$a_n + ۲b_n = a + ۲b,$$
$$a_n - b_n = \frac{۱}{۴^n}(a - b)$$

که از آن داریم:

$$a_n = a + \frac{۲}{۳}(b - a)\left(۱ - \frac{۱}{۴^n}\right),$$
$$b_n = a + \frac{۲}{۳}(b - a)\left(۱ + \frac{۱}{۲ \times ۴^n}\right)$$

۱۰. داریم:

$$x_n = x_{n-۱} + ۲\sin^۲ \alpha y_{n-۱},$$
$$y_n = ۲\cos^۲ \alpha x_{n-۱} + y_{n-۱}$$

برابری دوم را در λ ضرب و با برابری ول جمع می‌کنیم، حاصل می‌شود:

$$x_n + \lambda y_n = (۱ + ۲\lambda \cos^۲ \alpha)x_{n-۱} + (۲\sin^۲ \alpha + \lambda)y_{n-۱}$$

λ را طوری انتخاب می‌کنیم که این برابری برقرار باشد:

$$(۲\sin^۲ \alpha + \lambda) = \lambda(۱ + ۲\lambda \cos^۲ \alpha)$$

از این‌جا $\lambda = \pm \tan \alpha$ و به‌دست می‌آید:

$$(x_n + \lambda y_n) = (۱ + ۲\lambda \cos^۲ \alpha)(x_{n-۱} + \lambda y_{n-۱})$$

یا

$$(x_n + \lambda y_n) = (۱ + ۲\lambda \cos^۲ \alpha)^n(x_۰ + \lambda y_۰)$$

با قرار دادن مقدارهای $x_\circ$ و $y_\circ$ و جای‌گزینی $\lambda = \tan\alpha$ و $\lambda = -\tan\alpha$ به‌ترتیب، به دو برابری زیر دست می‌یابیم:

$$x_n + y_n \tan\alpha = (۱ + \sin ۲\alpha)^n \sin\alpha$$
$$x_n - y_n \tan\alpha = -(۱ - \sin ۲\alpha)^n \sin\alpha$$

از این‌رو:

$$x_n = \frac{۱}{۲}\sin\alpha\{(۱+\sin ۲\alpha)^n - (۱-\sin ۲\alpha)^n\}$$
$$y_n = \frac{۱}{۲}\cos\{(۱+\sin ۲\alpha)^n + (۱-\sin ۲\alpha)^n\}$$

۱۱. مانند دو مسالهٔ قبل، داریم:

$$x_n + \lambda_۱ y_n = \mu_۱^n(x_\circ + \lambda_۱ y_\circ)$$
$$x_n + \lambda_۲ y_n = \mu_۲^n(x_\circ + \lambda_۲ y_\circ)$$

که در آن $\mu_۱ = \alpha + \lambda_۱\gamma$ و $\mu_۲ = \alpha + \lambda_۲\gamma$ و $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ ریشه‌های معادله درجه دوم $(\beta + \lambda\delta) = \lambda(\alpha + \lambda\gamma)$ هستند.

اگر $\lambda_۲ \neq \lambda_۱$، آن‌گاه دو معادله برای تعیین دو مجهول x_n و y_n داریم و معادله حل شده است.

حال فرض می‌کنیم که $\lambda_۲ = \lambda_۱$. آن‌گاه $\mu_۲ = \mu_۱$ و دو معادله یکی هستند. برای تعیین x_n و y_n به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$x_n = -\lambda_۱ y_n + \mu_۱^n(x_\circ + \lambda_۱ y_\circ) \qquad (*)$$

مقدار x_n را در دومین برابری اصلی قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$y_n = \gamma[-\lambda_۱ y_{n-۱} + \mu_۱^{n-۱}(x_\circ + \lambda_۱ y_\circ)] + \delta y_{n-۱}$$

از آنجا $y_n + (\gamma\lambda_۱ - \delta)y_{n-۱} = \gamma\mu_۱^{n-۱}(x_\circ + \lambda_۱ y_\circ)$ قرار دهید:

$y_n = \mu_۱^n z_n$ آن‌گاه برای z_n رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu_۱ z_n + (\gamma\lambda_۱ - \delta)z_{n-۱} = \gamma(x_\circ + \lambda_۱ y_\circ)$$

یا

$$z_n = \frac{\delta - \gamma\lambda_1}{\mu_1} z_{n-1} + \frac{\gamma}{\mu_1}(x_0 + \lambda_1 y_0)$$

که از آن z_n (مساله ۶ را ببینید) و آن‌گاه y_n به‌دست می‌آید. x_n از دستور $(*)$ محاسبه می‌شود.

۱۲. رابطهٔ داده شده را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$x_n - \alpha x_{n-1} - \beta x_{n-2} = 0$$

قرار دهید: $\alpha = a + b$ و $\beta = -ab$ (یعنی a و b ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $s^2 - \alpha s - \beta = 0$ است). آن‌گاه داریم:

$$x_n - ax_{n-1} - bx_{n-1} + abx_{n-2} = 0,$$

$$x_n - ax_{n-1} - b(x_{n-1} - ax_{n-2}) = 0$$

قرار دهید: $y_n = x_n - ax_{n-1}$، رابطهٔ داده شده به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$y_n - by_{n-1} = 0$$

از این‌رو:

$$y_n = by_{n-1}$$

$$y_{n-1} = by_{n-2}$$

$$y_2 = by_1$$

درنتیجه: $y_n = b^{n-1}y_1$

برای تعیین x_n، داریم: $x_n - ax_{n-1} = b^{n-1}y_1$ قرار دهید $x_n = b^n z_n$، آن‌گاه

$$bz_n - az_{n-1} = y_1$$

یا $z_n = \frac{a}{b}z_{n-1} + \frac{y_1}{b}$. با استفاده از نتیجهٔ مسالهٔ ۶، حاصل می‌شود:

$$z_n = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} z_1 + \frac{(\frac{a}{b})^{n-1} - 1}{\frac{a}{b} - 1}\frac{y_1}{b}$$

با انجام تبدیل‌های ساده، به‌دست می‌آید:

$$x_n = \frac{a^n - b^n}{a-b}x_1 - ab\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b}x.$$

بنابراین، این مساله را می‌توان با استفاده از روش مساله قبل حل کرد، به‌شرطی که دو دنباله x_n و y_n را با رابطه‌های تعریف شده زیر در نظر بگیریم:

$$x_n = \alpha x_{n-1} + \beta y_{n-1}, \quad y_n = 1 \times x_{n-1} + 0 \times xy_{n-1}$$

۱۳. مانند مسالهٔ قبل حل می‌شود. در این حالت

$$a = 1, \quad b = -\frac{q}{p+q}$$

۱۴. دو متغیر y_n و z_n را که با رابطهٔ زیر تعیین می‌شوند در نظر بگیرید:

$$y_n = \alpha y_{n-2} + \beta z_{n-1}, \quad z_n = \gamma y_{n-1} + \delta z_{n-1}$$

قرار دهید: $x_n = \frac{y_n}{z_n}$، آن‌گاه متغیر x_n در رابطهٔ داده شده صدق می‌کند:

$$x_n = \frac{\alpha x_{n-1} + \beta}{\gamma x_{n-1} + \delta}$$

و حل مساله به حل مساله ۱۱ منتهی می‌شود. برای مثال، در حالت خاص داده شده:

$$x_n = \frac{x_{n-1} + 1}{x_{n-2} + 3}$$

داریم: $z_n = y_{n-1} + 3z_{n-1}$ و $y_n = y_{n-1} + z_{n-1}$، تا آخر. حالت خاص دوم، یعنی $x_n = \frac{x_{n-1}}{2x_{n-1} + 1}$ را به‌سادگی می‌توان به این صورت بررسی کرد: رابطه مفروض را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{1}{x_n} = \frac{2x_{n-1} + 1}{x_{n-1}} = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}$$

در این صورت $2 \neq \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}$.

اگر به‌جای n، مقدارهای از ۱ تا n را قرار دهیم و، سپس، برابری‌های حاصل را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{x_n} - \frac{۱}{x_۰} = ۲n, \quad x_n = \frac{x_۰}{۲nx_۰ + ۱}$$

۱۵. به‌سادگی دیده می‌شود: $a_{n+۱}b_{n+۱} = a_n b_n$ و درنتیجه به‌ازای هر مقدار درست n، $a_n b_n = a_۰ b_۰$، اما

$$\frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} = \frac{a_n - \sqrt{a_n b_n}}{a_n + \sqrt{a_n b_n}} = \frac{a_n - \sqrt{a_{n-۱} b_{n-۱}}}{a + m + \sqrt{a_{n-۱} b_{n-۱}}} =$$

$$= \frac{\frac{a_{n-۱} + b_{n-۱}}{۲} - \sqrt{a_{n-۱} b_{n-۱}}}{\frac{a_{n-۱} + b_{n-۱}}{۲} + \sqrt{a_{n-۱} b_{n-۱}}} = \left(\frac{\sqrt{a_{n-۱}} - \sqrt{b_{n-۱}}}{\sqrt{a_{n-۱}} + \sqrt{b_{n-۱}}}\right)^۲$$

قرار دهید: $\frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} = u_n$، به‌دست می‌آید:

$$u_{n-۱} = u_{n-۲}^۲$$
$$u_{n-۲} = u_n^۲ - ۳$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u^۲ = u_۱^۲$$
$$u_۱ = u_۰^۲$$

این برابری‌ها را به‌ترتیب به توان‌های $۱, ۲, ۲^۲, \ldots, ۲^{n-۲}$ می‌رسانیم، به‌دست می‌آید:

$$u_{n-۱} = u_۰^{۲^{n-۱}}$$

اما:

$$u_{n-۱} = \frac{\sqrt{a_{n-۱}} - \sqrt{b_{n-۱}}}{\sqrt{a_{n-۱}} + \sqrt{b_{n-۱}}} = \frac{a_{n-۱} - \sqrt{a_۰ b_۰}}{a_{n-۱} + \sqrt{a_۰ b_۰}},$$

$$u_۰ = \frac{\sqrt{a_۰} - \sqrt{b_۰}}{\sqrt{a_۰} + \sqrt{b_۰}} = \frac{a_۰ - \sqrt{a_۰ b_۰}}{a_۰ + \sqrt{a_۰ b_۰}}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{a_{n-۱}-\sqrt{a_۰ b_۰}}{a_{n-۱}+\sqrt{a_۰ b_۰}}=\left(\frac{a_۰-\sqrt{a_۰ b_۰}}{a_۰+\sqrt{a_۰ b_۰}}\right)^{۲^{n-۱}}$$

۱۶. داریم:

$$\frac{۱}{(۲k)^۳-۲k}=\frac{۱}{۲k}\cdot\frac{۱}{(۲k)^۲-۱}=\frac{۱}{۴k}\left[\frac{۱}{۲k-۱}-\frac{۱}{۲k+۱}\right]=$$
$$=\frac{۱}{۲}\left\{\frac{۲k-(۲k-۱)}{۲k(۲k-۱)}-\frac{(۲k+۱)-۲k}{۲k(۲k+۱)}\right\}=$$
$$=\frac{۱}{۲}\left\{\frac{۱}{۲k-۱}-\frac{۱}{۲k}-\frac{۱}{۲k}+\frac{۱}{۲k+۱}\right\}$$

بنابراین:

$$\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{(۲k)^۳-۲k}=\frac{۱}{۲}\left\{\left(۱+\frac{۱}{۳}+\ldots+\frac{۱}{۲n-۱}\right)+\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\ldots+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{۱}{۲n-۱}\right)+\frac{۱}{۲n+۱}-۲\left.\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\ldots+\frac{۱}{۲n}\right)\right\}=\frac{۱}{۲}\left\{۲\left(۱+\frac{۱}{۳}+\ldots+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{۱}{۲n-۱}\right)-۱+\frac{۱}{۲n+۱}-۲\left.\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\ldots+\frac{۱}{۲n}\right)\right\}=\left(۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{۱}{۲n-۱}\right)-\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\ldots+\frac{۱}{۲n}\right)-\frac{n}{۲n+۱}$$

از اینرو:

$$\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{(۲k)^۳-۲k}+\frac{n}{۲n+۱}=۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\ldots+\frac{۱}{۲n-۱}-$$
$$-\frac{۱}{۲n}=\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\ldots+\frac{۱}{۲n}$$

(مساله ۳۳ فصل ۱ را ببینید.)

۱۷. عبارت داده شده را با $\varphi_n(x)$ نشان می‌دهیم. داریم:

$$\varphi_1(x) = (1-x)+1$$
$$\varphi_2(x) = (1-x)(1-x^2)+x(1-x^2)+x^2 = 1$$

که از آن می‌توان فرض کرد به‌ازای هر مقدار n، $\varphi_n(x) = 1$، به‌سادگی دیده می‌شود که رابطهٔ زیر صادق است:

$$\varphi_{n+1}(x) = (1-x^{n+1})\varphi_n(x) + x^{n+1}$$

فرض می‌کنیم $\varphi_n(x) = 1$، از رابطهٔ آخر، $\varphi_{n+1}(x) = 1$ به‌دست می‌آید. اما چون $\varphi_1(x) = 1$، به‌ازای هر عدد درست n، $\varphi_n(x) = 1$.

۱۸. قرار دهید: $\varphi_n(x) = \frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\ldots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}$

در آن صورت: $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) + \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$

حال به‌سادگی و با استفاده از روش استقرای ریاضی دستور مطلوب ثابت می‌شود.

۱۹. قرار دهید: $X = (1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})\ldots(1+x^{2^{n-1}})$

دو طرف برابری را در $1-x$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$X(1-x) = [(1-x)(1+x)](1+x^2)(1+x^{2^2})\ldots(1+x^{2^{n-1}}) =$$
$$= [(1-x^2)(1+x^2)](1+x^{2^2})\ldots(1+x^{2^{n-1}}) =$$
$$= [(1-x^4)(1+x^4)](1+x^8)\ldots(1+x^{2^{n-1}}) = \ldots = 1-x^{2^n}$$

از این‌رو: $X = \frac{1-x^{2^n}}{1-x} = 1+x_0+x^2+x^3+\ldots+x^{2^n-1}$

۲۰. داریم:

$$1+\frac{1}{a} = \frac{a+1}{a};$$
$$1+\frac{1}{a}+\frac{a+1}{ab} = \frac{a+1}{a}+\frac{a+1}{ab} = \frac{(a+1)(b+1)}{ab}$$

فرض می‌کنیم که:

$$۱+\frac{۱}{a}+\frac{a+۱}{ab}+\ldots+\frac{(a+۱)(b+۱)\ldots(s+۱)}{abc\ldots sk}=$$
$$=\frac{(a+۱)(b+۱)\ldots(s+۱)(k+۱)}{abc\ldots sk}$$

به دو طرف برابری $\frac{(a+۱)(b+۱)\ldots(s+۱)(k+۱)}{abc\ldots skl}$ را اضافه می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{(a+۱)(b+۱)\ldots(s+۱)(k+۱)}{abc\ldots sk}+\frac{(a+۱)(b+۱)\ldots(s+۱)(k+۱)}{abc\ldots skl}$$
$$=\frac{(a+۱)(b+۱)\ldots(k+۱)(l+۱)}{abc\ldots skl}$$

و دستور لازم، با روش استقرای ریاضی ثابت می‌شود.

۲۱. داریم:

$$\frac{b}{a(a+b)}=\frac{(a+b)-a}{a(a+b)}=\frac{۱}{a}-\frac{۱}{a+b},$$
$$\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}=\frac{(a+b+c)-(a+b)}{(a+b)(a+b+c)}=\frac{۱}{a+b}-\frac{۱}{a+b+c},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{l}{(a+b+c+\ldots+k)(a+b+\ldots+k+l)}=$$
$$=\frac{۱}{a+b+\ldots+k}-\frac{۱}{a+b+\ldots+k+l}$$

با جمع جمله‌به‌جملهٔ این برابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\ldots+$$
$$+\frac{l}{(a+b+\ldots+k)(a+b+\ldots+k+l)}=$$
$$=\frac{۱}{a}-\frac{۱}{a+b+\ldots+k+l}=\frac{b+c+\ldots+k+l}{a(a+b+c+\ldots+k+l)}$$

و درستی اتحاد ثابت می‌شود.

۲۲. داریم: $F_{۱}(z) = \frac{q}{۱ - q}(۱ - z)$,

از این‌رو:

$$F_{۱}(qz) = \frac{q}{۱ - q}(۱ - qz)$$

$$۱ + F_{۱}(z) - F_{۱}(qz) = ۱ + \frac{q}{۱ - q}(۱ - z) - \frac{q}{۱ - q}(۱ - qz) = ۱ - qz$$

یعنی اتحاد به‌ازای $n = ۱$ برقرار است. اما

$$F_n(z) = F_{n-۱}(z) + \frac{q^n}{۱ - q^n}(۱ - z)(۱ - qz)\dots(۱ - q^{n-۱}z),$$

$$F_n(qz) = F_{n-۱}(qz) + \frac{q^n}{۱ - q^n}(۱ - qz)(۱ - q^۲z)\dots(۱ - q^nz)$$

فرض می‌کنیم، اتحاد به‌ازای $n - ۱$ برقرار باشد یعنی داشته باشیم:

$$۱ + F_{n-۱}(z) - F_{n-۱}(qz) = (۱ - qz)(۱ - q^۲z)\dots(۱ - q^{n-۱}x)$$

آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned}
&۱ + F_n(z) - F_n(qz) = (۱ - qz)(۱ - q^۲z)\dots(۱ - q^{n-۱}z) + \\
&+\frac{q^n}{۱ - q^n}(۱ - z)(۱ - qz)\dots(۱ - q^{n-۱}z) - \\
&-\frac{q^n}{۱ - q^n}(۱ - qz)(۱ - q^۲z)\dots(۱ - q^nz) = \\
&= (۱ - qz)(۱ - q^۲z)\dots(۱ - q^{n-۱}z) \times \\
&\times \left\{۱ + \frac{q^n}{۱ - q^n}(۱ - z) - \frac{q^n}{۱ - q^n}(۱ - q^nz)\right\} = \\
&= (۱ - qz)(۱ - q^۲z)\dots(۱ - q^{n-۱}z)(۱ - q^nz)
\end{aligned}$$

که به‌ازای هر n، درستی اتحاد را نشان می‌دهد.

۲۳. مانند مساله قبل قرار دهید:

$$F_n(z) = \frac{q}{۱ - q}(۱ - z) + \frac{q^۲}{۱ - q^۲}(۱ - z)(۱ - qz) + \dots +$$

$$+\frac{q^n}{1-q^n}(1-z)(1-qz)\dots(1-q^{n-1}z)$$

از این‌رو:

$$F_n(q^{-n})=\sum_{k=1}^{n}\frac{q^k}{1-q^k}\left(1-\frac{1}{q^n}\right)\left(1-\frac{q}{q^n}\right)\dots\left(1-\frac{q^{k-1}}{q^n}\right)$$

اکنون ثابت می‌کنیم: $F_n(q^{-n})=-n$. باتوجه به مسالهٔ قبل داریم:

$$1+F_n(q^{-1})-F_n(1)=0$$

اما: $F_n(1)=0$، درنتیجه $F_n(q^{-1})=-1$. فرض کنید:

$$F_n(q^{-n+1})=-(n-1)$$

داریم: $1+F_n(q^{-n})-F_n(q^{-n+1})=0$ و از آن‌جا

$$F_n(q^{-n})=F_n(q^{-n+1})-1=-(n-1)-1=-n$$

و درواقع:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{q^k}{1-q^k}\left(1-\frac{1}{q^n}\right)\left(1-\frac{q}{q^n}\right)\left(1-\frac{q^{k-1}}{q^n}\right)=-n$$

در این‌جا $a=q^{-1}$ قرار دهید، اتحاد مطلوب حاصل می‌شود.

۲۴. قرار دهید:

$$u_k=\frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{b(b-1)\dots(b-k+1)}$$
$$u_{k+1}=\frac{a(a-1)\dots(a-k+1)(a-k)}{b(b-1)\dots(b-k+1)(b-k)}$$

از این‌رو: $(b-k)u_{k+1}=(a-k)u_k \quad \dfrac{u_{k+1}}{u_k}=\dfrac{a-k}{b-k}$

درنتیجه: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k(a-k)=\sum_{k=1}^{n}u_{k+1}(b+1-k-1)$

اما: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k=s_n$

بنابراین:

$$as_n - \sum_{k=1}^{n} ku_k = (b+1)\sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n}(k+1)u_{k+1}$$

$$as_n - \sum_{k=1}^{n} ku_k = (b+1)(s_n + u_{n+1} - u_1) - \sum_{k=2}^{n+1} ku_k$$

از این‌رو:

$$(a-b-1)s_n = (b+1)(u_{n+1} - u_1) + u_1 - (n+1)u_{n+1}$$
$$= (b-n)u_{n+1} - bu_1$$

و s_n به‌سادگی به‌دست می‌آید.

۲۵. با روش استقرای ریاضی به‌سادگی ثابت می‌شود.

۲۶. هر دو اتحاد به‌سادگی با روش استقرای ریاضی ثابت می‌شود.

۲۷. سمت چپ برابر است با:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

۲۸. اگر x_n یک دنباله از به‌کمک رابطهٔ زیر تعیین شود:

$$x_n = \alpha x_{n-1} + \beta x_{n-2}$$

به‌ازای مقدارهای نخستینِ داده شدهٔ x_0 و x_1، آن‌گاه این عبارت کلی برای x_n وجود دارد:

$$x_n = \frac{a^n - b^n}{a-b}x_1 - ab\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b}x_0$$

که در آن a و b ریشه‌های معادله درجه دوم

$$s^2 - \alpha s - \beta = 0$$

است (مساله ۱۲ را ببینید). در این حالت، این رابطه را داریم:

$$u_n = u_{n-۱} + u_{n-۲}$$

یعنی $۱ = \beta = \alpha$ و $u_۰ = ۰$، $u_۱ = ۱$. بنابراین:

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

که در آن، a و b ریشه‌های معادله $s^۲ - s - ۱ = ۰$ است. از این‌رو می‌توان قرار داد:

$$a = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}, \quad b = \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}$$

و سرانجام

$$u_n = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\left\{\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n - \left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^n\right\}$$

با استفاده از این عبارت برای u_n، به‌سادگی می‌توان درستی تمام رابطه‌های داده شده (مساله ۶ فصل ۳ را ببینید.) را بررسی و ثابت کرد. با وجود این، عبارت اخیر برای u_n را می‌توان با روش دیگر به‌دست آورد.

کمیت‌های $u_۰, u_۱, u_۲, u_۳, \ldots$ را به‌عنوان ضریب‌های این رشتهٔ بی‌پایان در نظر بگیرید:

$$\varphi(x) = u_۱ + u_۲ x + u_۳ x^۲ + \ldots + u_{n-۱} x^{n-۲} + u_n x^{n-۱} + \ldots$$

یا

$$\varphi(x) = \sum_{k=۰}^{\infty} u_{k+۱} x^k$$

علاوه بر این:

$$x\varphi(x) = \sum_{k=۰}^{\infty} u_{k+۱} x^{k+۱} = \sum_{k=۱}^{\infty} u_k x^k,$$

$$x^۲\varphi(x) = \sum_{k=۰}^{\infty} u_{k+۱} x^{k+۲} = \sum_{k=۲}^{\infty} u_{k-۱} x^k$$

بنابراین:

$$\varphi(x) - x\varphi(x) - x^{۲}\varphi(x) = \sum_{k=۲}^{\infty}(u_{k+۱} - u_k - u_{k-۱})x^k +$$
$$+u_۱ + u_۲x - u_۱x = ۱$$

از این‌رو (چون $u_{k+۱} - u_k - u_{k-۱} = ۰$)،

$$\varphi(x)(۱ - x - x^{۲}) = ۱,$$
$$\varphi(x) = \frac{۱}{۱ - x - x^{۲}}$$

اما عبارت $\frac{۱}{۱ - x - x^{۲}}$ را می‌توان به‌صورت زیر (باتجزیه به کسرهای جزیی) نوشت:

$$\frac{۱}{۱ - x - x^{۲}} = \frac{۱}{\alpha - \beta}\left\{\frac{\alpha}{۱ + \alpha x} - \frac{\beta}{۱ + \beta x}\right\}$$

که در آن: $\beta = -\frac{\sqrt{۵} + ۱}{۲}$ و $\alpha = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$

از طرف دیگر:

$$\frac{۱}{۱ + \alpha x} = ۱ - \alpha x + \alpha^{۲}x^{۲} + \dots,$$
$$\frac{۱}{۱ + \beta x} = ۱ - \beta x + \beta^{۲}x^{۲} + \dots$$

با جای‌گزینی این عبارت‌ها و برابریِ (*)، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۱ - x - x^{۲}} = \sum_{k=۰}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left\{\left(\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}\right)^{k+۱} - \left(\frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}\right)^{k+۱}\right\}x^k$$

بنابراین: $u_{k+۱} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\left\{\left(\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}\right)^{k+۱} - \left(\frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}\right)^{k+۱}\right\}$ درضمن، تمام ده اتحاد این مساله را می‌توان با روش استقرای ریاضی حل کرد.

برای مثال، اتحادهای (ز) و (ی) را ثابت می‌کنیم.
به‌ازای $n = 1$ داریم: $u_2^2 = u_1u_2$؛ که درست است.
اکنون فرض می‌کنیم:

$$u_1u_2 + u_2u_3 + \ldots + u_{2n-3}u_{2n-2} = u_{2n-2}^2$$

و ثابت می‌کنیم:

$$u_1u_2 + u_2u_3 + \ldots + u_{2n-3}u_{2n-2} +$$
$$+u_{2n-2}u_{2n-1} + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2$$

در واقع، بنا به‌فرض داریم:

$$(u_1u_2 + \ldots + u_{2n-3}u_{2n-2}) + u_{2n-2}u_{2n-1} + u_{2n-1}u_{2n} =$$
$$= u_{2n-2}^2 + u_{2n-2}u_{2n-1} + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n-2}(u_{2n-2} + u_{2n-1}) +$$
$$+u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n-2}u_{2n} + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}(u_{2n-2} + u_{2n-1}) = u_{2n}^2$$

اکنون، با بررسی اتحاد (ی)، می‌توان به‌سادگی ثابت کرد که به‌ازای $n = 1$ برقرار است.
حال فرض می‌کنیم: $u_{n-1}^4 - u_{n-3}u_{n-2}u_nu_{n+1} = 1$ و ثابت می‌کنیم:

$$u_n^4 - u_{n-2}u_{n-1}u_{n+1}u_{n+2} = 1$$

برای این منظور، کافی است ثابت کنیم:

$$u_n^4 - u_{n-1}^4 + u_{n-3}u_n + u_nu_{n+1} - u_{n-2}u_{n-1}u_{n+1}u_{n+2} = 0$$

اما داریم:

$$n^4 - u_{n-1}^4 + u_{n-3}u_{n-2}u_nu_{n_1} - u_{n-2}u_{n-1}u_{n+1}u_{n_2} =$$
$$(u_n^2 + u_{n-1}^2)(u_n + u_{n-1})(u_n - u_{n-1}) + u_{n-2}u_{n+1}(u_{n-3}u_n - u_{n-1}u_{n+2})$$
$$u_{n+1}u_{n-2}\{u_n^2 + u_{n-1}^2 + u_{n-3}u_n - u_{n-1}u_{n+2}\} =$$
$$= u_{n+1}u_{n-2}\{u_{n-1}^2 - u_{n-1}u_{n+2} + u_n(u_m + u_{n-3})\}$$
$$= u_{n+1}u_{n-2}\{u_{n-1}^2 - u_{n-1}u_{n+2} + 2u_nu_{n-1}\} =$$
$$= u_{n+1}u_{n-2}u_{n-1}\{u_{n-1} - u_{n+2} + 2u_n\} = 0$$

زیرا $u_{n-1} - u_{n+2} + 2u_n = 0$.

۲۹. داریم:

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{2}{1\times 3} + \ldots + \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}u_{n+3}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}u_{k+3}} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{k+3} - u_{k+1}}{u_{k+1}u_{k+3}} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_{k+3}}\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \ldots + \frac{1}{u_{n+3}}\right) =$$
$$= \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_{n+2}} - \frac{1}{u_{n+3}} = \frac{u_1 + u_2}{u_1u_2} - \frac{u_{n+2} + u_{n+3}}{u_{n+2}u_{n+3}} =$$
$$= \frac{u_3}{u_1u_2} - \frac{u_{n+4}}{u_{n+2}u_{n+3}}$$

۳۰. این دنباله را در نظر می‌گیریم:

$$v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots,$$

که با رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$$

آن‌گاه داریم:

$$v_2 = v_0 + v_1,$$
$$v_3 = v_2 + v_1 = v_0 + 2v_1,$$
$$v_4 = v_3 + v_2 = 2v_0 + 3v_1,$$
$$v_5 = v_4 + v_3 = 3v_0 + 5v_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

با استفاده از روش استقرا، به‌سادگی این دستور کلی به‌دست می‌آید:

$$v_n = v_{n-1} \cdot v_0 + v_n v_1$$

اکنون این دنباله را در نظر می‌گیریم:

$$v_0 = v_{p-1},\ v_1 = v_p, \ldots,\ v_n = v_{p+n-1}$$

آن‌گاه داریم:

$$v_n = v_{p+n-1} = u_{n-1}u_{p-1} + u_n v_p$$

و فرمول (الف) ثابت می‌شود.

به‌ازای $p = n$ از دستور (الف) و دستور (ب) نتیجه می‌شود. اثبات دستور (ج) منتهی به اثبات این برابری می‌شود:

$$u_n^2 + u_{n-1}^2 = u_n u_{n+1} - u_{n-2}u_{n-1}$$

۳۱. باتوجه به دستور (الف) مساله قبل داریم:

$$u_{3n} = u_{n-1}u_{2n} + u_n u_{2n+1}$$

به‌این ترتیب، لازم است ثابت کنیم:

$$u_{n-1} \cdot u_{2n} + u_n \cdot u_{2n+1} = u_n^3 + u_{n+1}^3 - u_{n-1}^3$$

با در نظر گرفتن رابطه‌های

$$u_{2n+1} = u_{n+1}^2 + u_n^2$$
$$u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1}$$

اثبات ساده‌تر خواهد شد.

۳۲. قرار دهید: $\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} C_{n-k-1}^k = v_n$ باید ثابت کنیم $v_n = u_n$ (که در آن u_n جملهٔ nام رشته فیبوناچی است). حال ثابت می‌کنیم، برای هر مقدار n، داریم:

$$v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$$

نخست فرض می‌کنیم n عددی زوج باشد، قرار دهید $n = ۲l$. داریم:

$$v_{n+۱} = \sum_{k=۰}^{[\frac{n}{۲}]} C_{n-k}^k, \quad v_n = \sum_{k=۰}^{[\frac{n-۱}{۲}]} C_{n-k-۱}^k, \quad v_{n-۱} = \sum_{k=۰}^{[\frac{n-۲}{۲}]} C_{n-k-۲}^k$$

از آن‌جاکه $n = ۲l$،

$$\left[\frac{n}{۲}\right] = l, \quad \left[\frac{n-۱}{۲}\right] = l-۱, \quad \left[\frac{n-۲}{۲}\right] = l-۱$$

بنابراین داریم:

$$v_n + v_{n-۱} = \sum_{k=۰}^{l-۱} C_{n-k-۱}^k + \sum_{k=۰}^{l-۱} C_{n-k-۲}^k$$

در مجموع دوم قرار دهید $k = k' - ۱$، آن‌گاه

$$v_n + v_{n-۱} = ۱ + \sum_{k=۰}^{l-۱} C_{n-k-۱}^k + \sum_{k'=۱}^{l} C_{n-k'-۱}^{k'-۱} =$$
$$= ۱ + \sum_{k=۱}^{l-۱} (C_{n-k-۱}^k + C_{n-k-۱}^{k-۱}) + C_{n-l-۱}^{l-۱}$$

اما می‌دانیم:

$$C_{n-k-۱}^k + C_{n-k-۱}^{k-۱} = C_{n-k}^k$$

بنابراین:

$$v_n + v_{n-۱} = ۱ + \sum_{k=۱}^{l-۱} C_{n-k}^k + C_{l-۱}^{l-۱} = \sum_{k=۰}^{l} C_{n-k}^k = v_{n+۱}$$

زیرا $C_{l-۱}^{l-۱} = ۱ = C_l^l$

به‌همین ترتیب ثابت می‌کنیم که به‌ازای nهای فرد، $v_{n+۱} = v_n + v_{n-۱}$.
اما به‌سادگی ثابت می‌شود که

$$v_۱ = u_۱, \quad v_۲ = u_۲$$

بنابراین روشن است که به‌ازای هر مقدار n،

$$v_n = u_n$$

۳۳. تعداد جواب‌های درست و مثبت معادله داده شده را با $N_n(m)$ نشان می‌دهیم. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود $N_۱(m) = ۱$، $N_۲(m)$ را محاسبه کنید یعنی تعداد جواب‌های معادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ = m$$

را تعیین کنید. در این معادله $x_۱$ می‌تواند مقدارهای ۱، ۲، ۳ و ... و $m - ۱$ را اختیار کند و درنتیجه معادله دارای دسته جواب

$$(۱, m - ۱), \quad (۲, m - ۲), \quad \ldots, \quad (m - ۱, ۱)$$

یعنی $N_۲(m) = m - ۱$.

حال $N_۳(m)$ را محاسبه می‌کنیم. برای تعیین تعداد جواب‌های معادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = m$$

اگر $x_۳$ مقدارهای $۱, ۲, ۳, \ldots, m - ۲$ را اختیار کند، روشن است که

$$N_۳(m) = N_۲(m - ۱) + N_۲(m - ۲) + \ldots + N_۲(۲) =$$
$$= (m - ۲) + (m - ۳) + \ldots + ۱ = \frac{(m - ۱)(m - ۲)}{۱ \times ۲} = C_{m-۱}^{۲}$$

با استفاده از روش استقرای ریاضی، ثابت می‌کنیم:

$$N_n(m) = C_{m-۱}^{n-۱} = \frac{(m - ۱)(m - ۲)\ldots(m - n + ۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times (n - ۱)}$$

واضح است که

$$N_n(m) = N_{n-۱}(m - ۱) + N_{n-۱}(m - ۲) + \ldots + N_{n-۱}(n - ۱)$$

فرض می‌کنیم: $N_{n-۱}(M) = C_{m-۱}^{n-۲}$؛ داریم

$$N_n(m) = C_{m-۲}^{n-۲} + C_{m-۳}^{n-۲} + \ldots + C_{n-۲}^{n-۲} = C_{m-۱}^{n-۱}$$

(مساله ۷۰ فصل ۶ را ببینید.)

۳۴. صورت کلی معادله‌ها عبارت است از:

$$kx + (k+)y = n - k + ۱ \quad (k = ۱, ۲, \ldots, n + ۱) \qquad (*)$$

این معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$k(x + y + ۱) + y = n + ۱$$

و قرار دهید: $x + y + ۱ = z$

$$y = n + ۱ - kz$$
$$x = (k + ۱)z - (n + ۲)$$

z هر مقداری باشد، این عبارت‌ها، جواب‌های معادله $(*)$ را به‌دست می‌دهد. حال باید ببینیم z چه مقداری باید باشد تا x و y عددهای درست و نامنفی باشند و درنتیجه، نابرابری‌های زیر وجود دارد: $(k + ۱)z - (n + ۲) \geq ۰$ و $(n + ۱) - kz \geq ۰$

از این‌رو: $\dfrac{n + ۲}{k + ۱} \leq z \leq \dfrac{n + ۱}{k}$ و z باید یک عدد درست باشد. اگر $n + ۲$ بر $k + ۱$ بخش‌پذیر نباشد، آن‌گاه z این مقدارها را به خود می‌گیرد:

$$\left[\frac{n + ۲}{k + ۱}\right] + ۱, \quad \left[\frac{n + ۲}{k + ۱}\right] + ۲, \quad \ldots, \quad \left[\frac{n + ۱}{k}\right]$$

حال تعداد جواب‌های معادلهٔ $(*)$ را با N_k نشان می‌دهیم. در این حالت داریم:

$$N_k = \left[\frac{n + ۱}{k}\right] - \left[\frac{n + ۲}{k + ۱}\right]$$

اگر $n + ۲$ بر $k + ۱$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$N_k = \left[\frac{n + ۱}{k}\right] - \frac{n + ۲}{k + ۱} + ۱$$

اما اگر $n + ۲$ بر $k + ۱$ بخش‌پذیر نباشد، آن‌گاه

$$\left[\frac{n + ۲}{k + ۱}\right] = \left[\frac{n + ۱}{k + ۱}\right]$$

و اگر $n+۲$ بر $k+۱$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$\frac{n+۲}{k+۱}-۱=\left[\frac{n+۱}{k+۱}\right]$$

به‌این ترتیب در تمام حالت‌ها:

$$N_k=\left[\frac{n+۱}{k}\right]-\left[\frac{n+۱}{k+۱}\right]$$

و درنتیجهٔ آن، تعداد جواب‌ها برابر است با:

$$N_۱+N_۲+\ldots+N_{n+۱}=\left[\frac{n+۱}{۱}\right]-\left[\frac{n+۱}{۲}\right]+\left[\frac{n+۱}{۲}\right]-\left[\frac{n+۱}{۳}\right]+\ldots$$
$$+\left[\frac{n+۱}{n}\right]-\left[\frac{n+۱}{n+۱}\right]+\left[\frac{n+۱}{n+۱}\right]-\left[\frac{n+۱}{n+۲}\right]=\left[\frac{n+۱}{۱}\right]-\left[\frac{n+۱}{n+۲}\right]=n+۱$$

باوجود این، این نتیجه را می‌توان به روش دیگری به‌دست آورد. داریم:

$$\frac{۱}{۱-q^k}=\sum_{x=۰}^{\infty}q^{kx},\quad \frac{۱}{۱-q^{k+۱}}=\sum_{y=۰}^{\infty}q^{(k+۱)y}$$

بنابراین:

$$\frac{q^{k-۱}}{(۱-q^k)(۱-q^{k+۱})}=\sum_{x=۰}^{\infty}\sum_{y=۰}^{\infty}q^{kx+(k+۱)y+k-۱}$$

اگر طرف راست این برابری را برحسب توان‌های q بسط دهیم، آن‌گاه به‌سادگی دیده می‌شود که ضریب q^n، در این بسط برابر N_k است، یعنی برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ

$$kx+(k+۱)y=n-k+۱$$

به‌این ترتیب، عبارت

$$N_۱+N_۲+\ldots+N_{n+۱}$$

ضریب q^n در عبارت زیر است:

$$\frac{۱}{(۱-q)(۱-q^۲)}+\frac{q}{(۱-q^۲)(۱-q^۳)}+\frac{q^۲}{(۱-q^۳)(۱-q^۴)}+\ldots+$$
$$+\frac{q^n}{(۱-q^{n+۱})(۱-q^{n+۲})}+\frac{q^{n+۱}}{(۱-q^{n+۲})(۱-q^{n+۳})}+\ldots$$

اما به‌سادگی دیده می‌شود که این بسط برابر است با:

$$\frac{۱}{q(۱-q)}\sum_{k=۰}^{\infty}\left(\frac{۱}{۱-q^{k+۱}}-\frac{۱}{۱-q^{k+۲}}\right)=\frac{۱}{q(۱-q)}\left(\frac{۱}{۱-q}-۱\right)=$$
$$=\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)q^n$$

از این‌رو

$$N_۱+N_۲+\ldots+N_{n_۱}=n+۱$$

۳۵. صورت کلی معادله‌ها، چنین است:

$$k^۲x+(k+۱)^۲y=[(k+۱)^۲-k^۲]n-k^۲;\ (k=۱,۲,\ldots,n)$$

یک جای‌گزینی مستقیم، نشان می‌دهد که یکی از جواب‌ها عبارت است از:

$$x=-(n+۱),\quad y=n$$

آن‌گاه، همان‌طور که می‌دانیم، تمام جواب‌ها از عبارت‌های

$$x=-(n+۱)+(p+۱)^۲t,\quad y=n-p^۲t$$

به‌دست می‌آید که در آن، p یکی از مقدارهای k است.

برای این‌که x و y نامنفی باشند، لازم و کافی است که t عددی درست باشد و در نامساوی

$$\frac{n+۱}{(p+۱)^۲}\leq t\leq\frac{n}{p^۲}$$

صدق می‌کند. به‌طور مستقل دو حالت را در نظر می‌گیریم (حالتی که $n+۱$ بر $(p+۱)^۲$ بخش‌پذیر است و حالتی که $n+۱$ بر $(p+۱)^۲$ بخش‌پذیر نیست)، که به جواب موردنظر دست می‌یابیم.

۳۶. بنابه فرض توپ‌های سیاه با توپ‌های سفید قابل تعویض هستند. بنابراین، دو فرض امکان‌پذیر است:

۱) توپ‌های سفید در مکان‌های فرد قرار گیرند، یعنی مکان‌های اول، سوم و ... و توپ‌های سیاه در مکان‌های زوج.

۲) توپ‌های سفید در مکان‌های زوج قرار گیرند و توپ‌های سیاه در مکان‌های فرد.

و روشن است که توپ‌های سفید با شماره‌های ۱ و ۲ و ...، n می‌توانند مکان‌های زوج را با $n!$ طریق اشغال کنند، به‌همین ترتیب توپ‌های سیاه نیز می‌توانند مکان‌های فرد را با $n!$ طریق اشغال کنند و درنتیجه، بنابه فرض اول $(n!)^۲$ طریق برای مرتب کردن تمام توپ‌ها داریم.

فرض دوم همان تعداد از ترتیب‌ها را نتیجه می‌دهد. از این‌رو، تعداد کل ترتیب‌های توپ‌ها برابر $۲(n!)^۲$ است.

۳۷. فرض کنید L_{nk}^k تعداد طریق‌ها می‌باشد که آن nk شی متمایز می‌توانند به k گره n شئ توزیع شوند. به چند طریق می‌توان اولین گروه را با n شی تشکیل داد؟ روشن است که تعداد کل ترکیب‌های متمایز برابر C_{nk}^n است و بدیهی است که

$$L_{nk}^k = C_{nk}^n L_{nk-n}^{k-۱}$$

از این‌رو: $L_{nk}^n = C_{nk}^n C_{(k-۱)n}^n \dots C_{۲n}^n$

۳۸. فرض کنید مقدار جایگشت‌های n عنصر را در نظر بگیریم که در آن دو عنصر یعنی a و b کنار هم قرار گیرند. حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:

۱) a در مکان اول، دوم و ... و مکان $(n-۱)$ام قرار گیرد و b همواره در طرف راست آن است یعنی به‌ترتیب در مکان دوم، سوم، ...، مکان nام قرار گیرد.

۲) b در مکان اول و ...، سرآخر در مکان $(n-۱)$ام قرار گیرد که در تمام حالت‌ها بعد از a است. به‌این ترتیب، تعداد کل حالت‌ها برابر با $۲(n-۱)$ است که هر حالت متناظر با $(n-۲)!$ جایگشت است. بنابراین تعداد کل جای‌گشت‌ها که در آن دو عنصر یعنی a و b کنار هم قرار می‌گیرند برابر است با:

$$(n-۲)!۲(n-۱) = ۲(n-۱)!$$

درنتیجه، تعداد جایگشت‌های n عنصر که در آن دو عنصر a و b کنار هم قرار نمی‌گیرند برابر است با:

$$n! - ۲(n-۱)! = (n-۱)!(n-۲)$$

۳۹. فرض کنید n نمایش تعداد جایگشت‌های مطلوب باشد و قرار دهید $p_n = n!$. تعداد کل جایگشت‌های درست را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در میان آن‌ها، تعداد Q_n جایگشت وجود دارد که در آن هیچ‌یک از عنصرها در مکان اولیه خود قرار نمی‌گیرد. حال تعداد جایگشت‌هایی را پیدا می‌کنیم که در آن تنها یک عنصر در مکان اولیهٔ خود باقی می‌ماند. بدون شک این تعداد برابر $nQ_{n-۱}$ است. به‌همین ترتیب، تعداد جایگشت‌هایی که در آن تنها دو عنصر در مکان اولیهٔ خود قرار می‌گیرد برابر $\frac{n(n-۱)}{۱\times ۲}Q_{n-۲}$ است و همین‌طور تا آخر. سرانجام، تعداد جایگشت‌هایی که در آن تمام عنصرها در مکان اولیه خود قرار می‌گیرند برابر $Q_۰ = ۱$ است. به‌این ترتیب:

$$p_n = Q_n + nQ_{n-۱} + \frac{n(n-۱)}{۱\times ۲}Q_{n-۲} + \ldots + nQ_۱ + Q_۰$$

این برابری را می‌توان به‌صورت نمادی زیر نوشت:

$$p^n = (Q+۱)^n$$

در این‌جا پس از بسط، تمام توان‌ها (اندیس‌های بالا) باید به اندیس پایین تبدیل شود، طوری‌که Q^k به Q_k تبدیل می‌شود. درنتیجه، می‌توان اتحاد نمادی معتبر زیر را برای تمام مقدارهای x نوشت:

$$(P+x)^n = (Q+۱+x)^n$$

زیرا از نظر نمادی توان p را می‌توان در همه‌جا، تبدیل به همان توان $Q+۱$ کرد). در این‌جا قرار دهید $x = -۱$، به‌دست می‌آید:

$$Q^n = (p-۱)^n$$

پس از تبدیل برابری نمادی، برابری معمولی به‌دست می‌آید:

$$Q_n = P_n - \frac{n}{۱}P_{n-۱} + \frac{n(n-۱)}{۱\times ۲}P_{n-۲} + \ldots + (-۱)^{n-۱}nP_۱ + (-۱)^n,$$

$$Q_n = n!\left(\frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} - \ldots + \frac{(-۱)^{n-۱}}{(n-۱)!} + \frac{(-۱)^n}{n!}\right)$$

۴۰. همهٔ این‌گونه جای‌گشت‌های شامل n حرف را در نظر بگیرید که در آن مربع‌های خالی ممکن است در کنار مربع‌های اشغال شده قرار بگیرند. اگر $n = ۱$، آن‌گاه تعداد

طریقههایی که در آن یک حرف می‌تواند در r مربع قرار گیرد برابر r اس و مربع اول یک حرف، قرار می‌گیرد، بقیهٔ مربع‌ها خالی می‌مانند. در مربع دوم یک حرف قرار می‌گیرد، بقیهٔ مربع‌ها خالی می‌مانند و همین‌طور تا آخر. تمام جایگشت‌های دو حرف در r مربع، از r جایگشت بررسی شد و با تبدیل حرف دوم به‌ترتیب در مربع اول، دوم و ...، rام به‌دست می‌آید. به‌این ترتیب، تعداد جایگشت‌های دو حرف در r مربع برابر $r^{۲}$ است و همان‌طور که به‌سادگی دیده می‌شود تعداد کل جایگشت‌های n حرف در r مربع برابر r^n است. فرض کنید A_r نمایش تعداد طریق‌هایی باشد که در آن n حرف مختلف می‌تواند در r مربع طوری توزیع شود که در آن هر مربع دست‌کم شامل یک حرف باشد. تعداد چنین جایگشت‌هایی برابر A_r است. در آن صورت تمام این‌گونه جایگشت‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن یک و تنها یک مربع خالی است. تعداد آن‌ها برابر $rA_{r-۱}$ است. علاوه بر این، تعداد جایگشت‌هایی که در آن دو و تنها دو مربع آن خالی است برابر است با:

$$\frac{r(r-۱)}{۱\times ۲}A_{r-۲}$$

و همین‌طور تا آخر. بنابراین داریم:

$$Ar+rA_{r-۱}+\frac{r(r-۱)}{۱\times ۲}A_{r-۲}+\ldots+rA_۱+۱=r^n+۱$$

این برابری را می‌توان به‌طور نمادی، این‌طور نوشت:

$$(A+۱)^r=r^n+۱$$

(یعنی پس از بسط طرف چپ باید تمام A^kها به A_k تبدیل شود).

علاوه بر این داریم:

$$(A+۱+x)^r=\sum_{k=۰}^{r}C_r^k x^k(A+۱)^{r-k}$$

این برابری، عبارت نمادی زیر را نتیجه می‌دهد که به‌ازای تمام مقدارهای برقرار است:

$$(A+۱+x)^r=\sum_{k=۰}^{r}C_r^k x^k[(r-k)^n+۱]$$

در این‌جا قرار دهید: $x = -۱$. آن‌گاه

$$A^r = \sum_{k=۰}^{r} C_r^k(-۱)^k[(r-k)^n + ۱] = \sum_{k=۰}^{r}(-۱)^k(r-k)^n C_r^k + $$
$$+ \sum_{k=۰}^{r}(-۱)^k C_r^k$$

اما: $\sum_{k=۰}^{r}(-۱)^k C_r^k = (۱-r)^r = ۰$، بنابراین

$$A^r = \sum_{k=۰}^{r}(-۱)^k(r-k)^n C_r^k$$

با تبدیل آن از برابری نمادی به برابری معمولی، حاصل می‌شود:

$$A_r = \sum_{k=۰}^{r}(-۱)^k(r-k)^n C_r^k =$$
$$= r^n - \frac{r}{۱}(r-۱)^n + \frac{r(r-۱)}{۱\times ۲}(r-۲)^n - \ldots + (-۱)_r^{r-۱}$$

(مساله ۵۵ از فصل ۶ را ببینید.)

فصل ۱۰

۱. قرار دهید $a = \frac{۱}{b}$ طوری‌که $|b| > ۱$. ثابت می‌کنیم:

$$|b|^n > ۱ + n(|b|-۱) \qquad (n > ۱)$$

در واقع

$$|b|^m = \{۱ + (|b|-۱)\}^n = ۱ + n(|b|-۱) + \frac{n(n-۱)}{۱\times ۲}(|b|-۱)^۲ + \ldots$$

که از آن نتیجه می‌گیریم:

$$|b|^n > ۱ + n(|b|-۱) \qquad (n > ۱)$$

در آن صورت:

$$|x_n| = |a|^n = \frac{۱}{|b|^n} < \frac{۱}{۱ + n(|b| - ۱)}$$

و در واقع: $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n = ۰$

۲. بهسادگی دیده میشود که میتوان فرض کرد $a > ۰$. در آن صورت $x_i > ۰$ $(i = ۱, ۲, ۳, \ldots)$ فرض کنید k عددی درست باشد که در شرط $k < a < k + ۱$ صدق میکند طوریکه $\frac{a}{k+۱} < ۱$ قرار دهید $n > k$. در آن صورت

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times k} \times \frac{a}{k+۱} \times \frac{a}{k+۲} \cdots \frac{a}{n}$$

اما: $\frac{a}{k+۲} < \frac{a}{k+۱}, \frac{a}{k+۳} < \frac{a}{k+۱}, \ldots, \frac{a}{n} < \frac{a}{k+۱}$

بنابراین $\frac{a^n}{n!} < \frac{a^k}{k!}\left(\frac{a}{k+۱}\right)^{n-k}$

اما از آنجاکه $\frac{a}{k+۱} < ۱$. بنابراین $\left(\frac{a}{k+۱}\right)^{n-k} \to ۰$، اگر $n \to \infty$ و بنابراین، بهازای هر مقدار حقیقی a، داریم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, \frac{a^n}{n!} = ۰$$

یعنی فاکتوریل $n!$ سریعتر از توان nام هر عدد حقیقی افزایش مییابد.

۳. هم صورت و هم مخرج این کسر با بزرگ شدن n بدون هیچ کرانی افزایش مییابد. سه حالت را بهطور مستقل در نظر بگیرید: $k = h$، $k < h$ و $k > h$.

الف) $k = h$، صورت و مخرج کسر را بر $n^k = n^h$ تقسیم کنید. حاصل میشود:

$$\lim \frac{a_۰ n^h + a_۱ n^{h-۱} + \ldots + a_h}{b_۰ n^h + b_۱ n^{h-۱} + \ldots + b_h} = \lim \frac{a_۰ + \frac{a_۱}{n} + \ldots + \frac{a_h}{n^h}}{b_۰ + \frac{b_۱}{n} + \ldots + \frac{b_h}{n^h}} = \frac{a_۰}{b_۰}$$

ب) $k < h$، داریم:

$$\lim \frac{a_۰ n^k + a_۱ n^{k-۱} + \ldots + a_k}{b_۰ n^h + b_۱ n^{h-۱} + \ldots + b_h} = \lim \frac{\frac{a_۰}{n^{n-k}} + \ldots + \frac{a_k}{n^h}}{b_۰ + \frac{b_۱}{n} + \ldots + \frac{b_n}{n^h}} = ۰$$

ج) $h < k$، شبیه حالت قبل، در این حال داریم:

$$\frac{a_۰ n^k + a_۱ n^{k-۱} + \ldots + a_k}{b_۰ n^h + b_۱ n^{h-۱} + \ldots + b_h} \to \infty$$

۴. داریم:
$$\prod_{k=۲}^{n} \frac{k^۳ - ۱}{k^۳ + ۱} = \prod_{k=۲}^{n} \frac{k - ۱}{k + ۱} \times \prod_{k=۲}^{n} \frac{k^۲ + k + ۱}{k^۲ - k + ۱}$$
اما

$$\prod_{k=۲}^{n} \frac{k-۱}{k+۱} = \frac{۱ \times ۲ \times ۳ \ldots \times (n-۱)}{۳ \times ۴ \times ۵ \ldots (n+۱)} = \frac{۲}{n(n+۱)},$$
$$\prod_{k=۲}^{n} \frac{k^۲+k+۱}{k^۲-k+۱} = \frac{۷ \times ۱۳ \times ۲۱ \times \ldots \times (n^۲+n+۱)}{۳ \times ۷ \times ۱۳ \times \ldots \times (n^۲-n+۱)} = \frac{n^۲+n+۱}{۳}$$

بنابراین: $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{۲}{۳}\frac{n^۲+n+۱}{n^۲+n} = \frac{۲}{۳}$

۵. قرار دهید: $p_n^k = \frac{۱^k + ۲^k + ۳^k + \ldots + n^k}{n^{k+۱}}$

به‌ازای $k = ۱$ داریم: $p_n^۱ = \frac{n+۱}{۲n}$ و درنتیجه:

$$\lim_{n\to\infty} P_n^۱ = \frac{۱}{۲}$$

به‌همین ترتیب به‌سادگی به‌دست می‌آید که $\lim\limits_{n\to\infty} P_n^۲ = \frac{۱}{۳}$. حال فرض می‌کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} P_n^i = \frac{۱}{i+۱}$ ، به‌ازای تمام مقدارهای i کوچکتر از k، این دستور و ثابت می‌کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} P_n^k = \frac{۱}{k+۱}$ ، قرار دهید $S_i = ۱^i + ۲^i + \ldots + n^i$. در آن‌صورت، این دستور را داریم (مساله ۲۶ از فصل ۷ را ببینید.)

$$(k+۱)S_k + \frac{(k+۱)k}{۱ \times ۲} S_{k-۱} + \frac{(k+۱)k(k-۱)}{۱ \times ۲ \times ۳} S_{k-۲} + \ldots + (k+۱)S_۱ +$$
$$+ S_۰ = (n+۱)^{k+۱} - ۱$$

اما $P_n^k = \frac{S_k}{n^{k+۱}}$، بنابراین داریم:

$$P_n^k = \frac{۱}{k+۱}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{k+۱} - \frac{۱}{(k+۱)n^{k+۱}} - \frac{k}{۱\times ۲}\frac{P_n^{k-۱}}{n} - \ldots - \frac{۱}{k+۱}\frac{P_n^۵}{n^k}$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty} P_n^k = \frac{۱}{k+۱}$$

این قضیه را می‌توان به‌طور مستقیم ثابت کرد. از نابرابری (مسالهٔ ۵۰ فصل ۸ را ببینید.)

$$mx^{m-۱}(x-۱) > x^m - ۱ > m(x-۱)$$

استفاده می‌کنیم. ($x > ۰$ و مخالف یک، m یک عدد گویا و در فاصلهٔ ۰ و یک در این‌جا قرار دهید $m = k+۱$ و x را به $\frac{x}{y}$ تبدیل کنید. حاصل می‌شود:

$$(k+۱)x^k(x-y) > x^{k+۱} - y^{k+۱} > (k+۱)y^k(x-y)$$

نخست در این‌جا قرار دهید $x = p$ و $y = p-۱$ و آن‌گاه $x = p+۱$ و $y = p$. در آن‌صورت، حاصل می‌شود:

$$(p+۱)^{k+۱} - p^{k+۱} > (k+۱)p^k > p^{k+۱} - (p-۱)^{k+۱}$$

در این نابرابری، به‌جای p قرار دهید ۱، ۲، ۳ و ... و n و آن‌ها را با هم جمع کنید، به‌دست می‌آید:

$$(n+۱)^{k+۱} - ۱ > (k+۱)(۱^k + ۲^k + \ldots + n^k) > n^{k+۱}$$

تمام نابرابری‌ها را بر $(k+۱)n^{k+۱}$ تقسیم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{k+۱}\left\{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{k+۱} - \frac{۱}{n^{k+۱}}\right\} > \frac{۱^k + ۲^k + \ldots + n^k}{n^{k+۱}} > \frac{۱}{k+۱}$$

که از آن، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{۱^k + ۲^k + \ldots + n^k}{n^{k+۱}} = \frac{۱}{k+۱}$$

۶. با استفاده از نمادگذاری مساله قبل، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱^k + ۲^k + \ldots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+۱} = n\left(P_n^k - \frac{۱}{k+۱}\right)$$

با استفاده از عبارت مربوط به P_n^k که در مساله قبل به‌دست آمد، داریم:

$$n\left(P_n^k - \frac{۱}{k+۱}\right) = \frac{(n+۱)^{k+۱} - n^{k+۱}}{(n+۱)n^k} - \frac{۱}{(k+۱)n^k} - \frac{k}{۲}P_n^{k-۱} - \ldots - \frac{۱}{k+۱}\frac{p_n^{۰}}{n^{k-۱}}$$

از این‌رو

$$\text{حد}\, n\left(p_n^k - \frac{۱}{k+۱}\right) = \text{حد}\left\{\frac{(n+۱)^{k+۱} - n^{k+۱}}{(k+۱)n^k} - \frac{k}{۲}p_n^{k-۱}\right\} = \frac{۱}{۲}$$

چون

$$\text{حد}_{n\to\infty} \frac{(n+۱)^{k+۱} - n^{k+۱}}{(k+۱)n^k} = ۱ \quad \text{و} \quad \text{حد}_{n\to\infty} P_n^{k-۱} = \frac{۱}{k}$$

۷. از مساله ۴، فصل ۹ داریم:

$$x_n = \frac{۲x_۱ + x_۰}{۳} + (-۱)^{n-۱}\frac{(x_۱ - x_۰)}{۳ \times ۲^{n-۱}}$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\text{حد}_{n\to\infty} x_n = \frac{x_۰ + ۲x_۱}{۳}$$

۸. رابطهٔ زیر را داریم (مساله ۳، فصل ۹ را ببینید.):

$$\frac{x_n - \sqrt{N}}{x_n + \sqrt{N}} = \left(\frac{x_۰ - \sqrt{N}}{x_۰ + \sqrt{N}}\right)^{۲^n}$$

از آن‌جاکه $\left|\frac{x_۰ - \sqrt{N}}{x_۰ + \sqrt{N}}\right| < ۱$ ، داریم:

$$\text{حد}_{n\to\infty}\left(\frac{x_۰ - \sqrt{N}}{x_۰ + \sqrt{N}}\right)^{۲^n} = ۰$$

از این‌رو $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n-\sqrt{N}}{x_n+\sqrt{N}} = ۰$ و $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{N}$ و به‌این ترتیب، روشی برای تعیین ریشهٔ دوم یک عدد به‌دست می‌آید. این روش به‌صورت زیر است: هر عدد مثبت را با $x_۰$ نشان می‌دهیم. (مثلاً، مقدار تقریبی یک ریشه با تقریبی از واحد). N را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عامل نشان می‌دهیم که یکی از آن‌ها $x_۰$ است طوری‌که:

$$N = x_۰ \cdot \frac{N}{x_۰}$$

میانگین حسابی این عامل‌ها را به‌دست می‌آوریم و آن را با $x_۱$ نمایش می‌دهیم:

$$x_۱ = \frac{۱}{۲}\left(x_۰ + \frac{N}{x_۰}\right)$$

آن‌وقت، فرض می‌کنیم: $N = x_۱ \cdot \dfrac{N}{x_۱}$ و بار دیگر از این عامل‌ها میانگین حسابی می‌گیریم:

$$x_۲ = \frac{۱}{۲}\left(x_۱ + \frac{N}{x_۱}\right)$$

و همین‌طور تا آخر.

هرگاه x_n برای مقدار تقریبی $\sqrt{N}$ در نظر گرفته شود، خطای حاصل را می‌توان از این دستور به‌دست آورد:

$$\frac{x_n-\sqrt{N}}{x_n+\sqrt{N}} = \left(\frac{x_۰-\sqrt{N}}{x_۰+\sqrt{N}}\right)^{۲^n}$$

۹. قبل از همه ثابت می‌کنیم $x_p^m > N$

درحقیقت: $x_p^m = x_{p-۱}^m\left(۱+\dfrac{N-x_{p-۱}^m}{mx_{p-۱}^m}\right)^m$

اما: $\dfrac{N}{x_{p-۱}^m} = ۱+\dfrac{N-x_p^m-۱}{x_{p-۱}^m} < \left(۱+\dfrac{N-x_p^m-۱}{mx^m p-۱}\right)^m$

(مساله ۵۱، فصل ۸ را ببینید.)

بنابراین به‌ازای هر مقدار مثبت p: $x_p^m > N$

اکنون ثابت می‌کنیم، x_p یک متغیر نزولی است یعنی ثابت می‌کنیم:

$$x_p - x_{p-۱} < ۰$$

درواقع: $x_p - x_{p-1} = \dfrac{N - x_{p-1}^m}{m x_{p-1}^m} < 0$

و به‌این ترتیب، متغیر x_n نزولی ولی مثبت است. بنابراین دارای حد است. این حد را با λ نشان می‌دهیم. از رابطهٔ

$$x_n = \frac{m-1}{m} x_{n-1} + \frac{N}{m x_{n-1}^{m-1}}$$

وقتی $n \to \infty$، حاصل می‌شود:

$$\lambda = \frac{m-1}{m}\lambda + \frac{N}{m\lambda^{m-1}}, \quad \lambda^m = N, \quad \lambda = \sqrt[m]{N}$$

واضح است که: $\dfrac{N}{x_n^{m-1}} < \sqrt[m]{N} < x_n$ که ما را قادر می‌سازد حد بالای خطا را که در نتیجهٔ اختیار کردن x_n برای مقدار تقریبی $\sqrt[m]{N}$ به‌دست می‌آید، محاسبه کنیم.

۱۰. داریم: $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \le \sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}} < 0$ (مساله ۴، فصل ۸ را ببینید.) از این‌رو نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

۱۱. به‌سادگی نابرابری ثابت می‌شود:

$$\frac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} - 1 < \frac{x}{2} \quad (1 + x > 0)$$

در این‌جا قرار دهید $x = \dfrac{k}{n^2}$، حاصل می‌شود:

$$\frac{k}{2n^2 + k} < \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 < \frac{k}{2n^2}$$

از این‌رو: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2 + k} < S_n < \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} k$

طرف راست برابر است با: $\displaystyle\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{4n^2}$

بنابراین وقتی $n \to \infty$، حد طرف راست برابر است با $\frac{۱}{۴}$. از طرف دیگر

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}} \left(\frac{۱}{۲n^۲} \sum_{k=۱}^{n} k - \sum_{k=۱}^{n} \frac{k}{۲n^۲ + k} \right) = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \sum_{k=۱}^{n} \frac{k^۲}{۲n^۲(۲n^۲ + k)}$$

اما

$$\sum_{k=۱}^{n} \frac{k^۲}{۲n^۲(۲n^۲ + k)} < \sum_{k=۱}^{n} \frac{k^۲}{۴n^۲} = \frac{۱^۲ + ۲^۲ + \ldots + n^۲}{۴n^۴}$$

درنتیجه: $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left\{ \frac{۱}{۲n^۲} \sum_{k=۱}^{n} k - \sum_{k=۱}^{n} \frac{k}{۲n^۲ + k} \right\} = ۰$

و $\frac{۱}{۴} = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \sum_{k=۱}^{n} \frac{k}{۲n^۲ + k}$ بهاین ترتیب، هر دو متغیر که s_n بین آنها است بهسمت $\frac{۱}{۴}$ میل میکنند. یعنی $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} S_n = \frac{۱}{۴}$

۱۲. داریم: $x_n^۲ = a + x_{n-۱}$.

بهسادگی دیده میشود که متغیر x_n افزایش مییابد. حال نشان میدهیم که این مقدارها کوچکتر از عدد ثابتی است. داریم:

$$x_{n-۱}^۲ - x_{n-۱} - a < ۰$$

زیرا $x_{n-۱} < x_n$.

از اینرو: $\left(x_{n-۱} - \frac{\sqrt{۴a + ۱} + ۱}{۲} \right) \left(x_{n-۱} + \frac{\sqrt{۴a + ۱} + ۱}{۲} \right) < ۰$

اما چون عبارت پرانتز دوم بزرگتر از صفر است، باید $x_{n-۱} < \frac{\sqrt{۴a + ۱} + ۱}{۲}$ باشد یعنی متغیر افزایش یابندهٔ $x_{n-۱}$، کراندار است و درنتیجه دارای حد است. قرار دهید فرض میکنیم $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} x_n = \underset{x\to\infty}{\text{حد}} x_{n-۱} = a$ در رابطه اصلی بین x_n و $x_{n-۱}$ بهدست میآید:

$$\alpha^۲ - \alpha - a = ۰$$

و چون $\alpha \geq ۰$، پس $\alpha = \frac{\sqrt{۴\alpha + ۱} + ۱}{۲}$

۱۳. ثابت می‌کنیم، x_n یک متغیر کاهش‌یابنده است. داریم:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

اما $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
و درنتیجه: $x_{n+1} < x_n$

اما می‌توان ثابت کرد (مساله ۶، فصل ۸ را ببینید) که:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2$$

بنابراین: $x_n > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 2 > -2$

به‌این ترتیب متغیر کاهش‌یابندهٔ x_n پیوسته بزرگتر از ۲− است. از این‌رو دارای حد است.

۱۴. نخست نشان می‌دهیم که $x_n > y_n$. درحقیقت:

$$x_n - y_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} - \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_{n-1}} - \sqrt{y_{n-1}})^2 > 0$$

اما:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} - x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - x_{n-1}}{2} < 0$$

$$x_{n-1} > x_n$$

یعنی متغیر x_n یک متغیر کاهش‌یابنده است. از طرف دیگر،

$$y_n - y_{n-1} = \sqrt{y_{n-1}x_{n-1}} - y_{n-1} = \sqrt{y_{n-1}}(\sqrt{x_{n-1}} - \sqrt{y_{n-1}}) > 0$$

یعنی $y_n > y_{n-1}$ و y_n یک متغیر افزایش یابنده است که از آن نتیجه می‌گیریم هریک از متغیرهای x_n و y_n دارای حد است، قرار دهید $x = x_n$ حد، $y = y_n$ حد داریم: $x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}$، بنابراین $x = \frac{x+y}{2}$ و درنتیجه $x = y$.

۱۵. داریم: $s_1 = \frac{1}{1-q}$ ، $s = \frac{1}{1-Q}$ ، از این‌رو $q = 1 - \frac{1}{s_1}$ ، $Q = 1 - \frac{1}{s}$ ،
اما:

$$1 + qQ + q^2Q^2 + \ldots = \frac{1}{1-qQ} = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{s_1})(1-\frac{1}{s})} = \frac{ss_1}{s+s_1-1}$$

۱۶. داریم:

$$s = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots = u_1(q + q + q^2 + \ldots),$$
$$\sigma^2 = u_1^2(1 + q^2 + q^4 + \ldots)$$

علاوه بر این:

$$s_n = \frac{u_nq - u_1}{q-1} = u_1\frac{1-q^n}{1-q} = s(1-q^n)$$
$$\sigma^2 = \frac{u_1^2}{1-q^2}, \quad s^2 = \frac{u_1^2}{(1-q)^2}$$

داریم:

$$s^2 + \sigma^2 = \frac{2u_1^2}{(1-q)^2(1+q)}, \quad s^2 - \sigma^2 = \frac{2u_1^2q}{(1-q)^2(1+q)}$$

درنتیجه: $q = \frac{s^2 - \sigma^2}{s^2 + \sigma^2}$
و:

$$s_n = s(1-q^n) = s\left\{1 - \left[\frac{s^2-\sigma^2}{s^2+\sigma^2}\right]^n\right\}$$

۱۷. الف) قرار دهید $x = \frac{1}{y}$. در آن صورت $|y| > 1$ و می‌توان قرار داد:
$|y| = 1 + \rho$ که در آن $\rho > 0$، داریم:

$$|n^kx^n| = \frac{n^k}{(1+\rho)^n} =$$

$$= \frac{n^k}{1 + n\rho + \frac{n(n-1)}{1\times 2}\rho^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{1\times 2\times \ldots \times (x+1)}\rho^{k+1} + \ldots + \rho^n}$$

فرض می‌کنیم که $n > k$. به‌دست می‌آید:

$$|n^k x^n| = \frac{n^k}{(۱+\rho)^n} < \frac{n^k (k+۱)!}{n(n-۱)(n-۲)\ldots(n-k+۱)(n-k)\rho^{k+۱}} =$$
$$= \frac{(k+۱)!}{\rho^{k+۱}} \frac{۱}{(۱-\frac{۱}{n})(۱-\frac{۲}{n})\ldots(۱-\frac{k-۱}{n})(n-k)}$$

اما عبارت

$$\frac{(k+۱)!}{\rho^{k+۱}} \frac{۱}{(۱-\frac{۱}{n})(۱-\frac{۲}{n})\ldots(۱-\frac{k-۱}{n})(n-k)} \to ۰$$

وقتی $n \to \infty$ (k ثابت).

بنابراین: $\lim\limits_{n\to\infty} n^k x^n = ۰$

ب) قرار دهید $\alpha = \sqrt[n]{n} - ۱$ ($\alpha > ۰$). در آن صورت داریم: $n = (۱+\alpha)^n$.

بنابراین:

$$n = ۱ + n\alpha + \frac{n(n-۱)}{۱ \times ۲}\alpha^۲ + \ldots + \alpha^n$$

درنتیجه: $n > \frac{n(n-۱)}{۱\times ۲}\alpha^۲$ و به این ترتیب: $\alpha^۲ < \frac{۲}{n-۱} < \frac{۴}{n} \quad (n > ۲)$

$$\alpha < \frac{۲}{\sqrt{n}}, \quad ۰ < \sqrt[n]{n} - ۱ < \frac{۲}{n-۱} < \frac{۴}{n} \quad (n > ۲)$$

و روشن است که: $\lim \sqrt[n]{n} = ۱$

۱۸. داریم:

$$\frac{۱}{۱\times ۲} + \frac{۱}{۲\times ۳} + \ldots + \frac{۱}{n(n+۱)} = ۱ - \frac{۱}{n+۱},$$
$$\frac{۱}{۱\times ۲\times ۳} + \frac{۱}{۲\times ۳\times ۴} + \ldots + \frac{۱}{n(n+۱)(n+۲)} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{(n+۱)(n+۲)}\right)$$

(مساله ۴۰ فصل ۷ را ببینید).

اما:

$$\frac{۱}{۱\times ۲}+\frac{۱}{۲\times ۳}+\ldots+\frac{۱}{n(n+۱)}+\ldots=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{۱}{۱\times ۲}+\frac{۱}{۲\times ۳}+\ldots+\frac{۱}{n(n+۱)}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{۱-\frac{۱}{n+۱}\right\}=۱$$

به این ترتیب:

$$۱=\frac{۱}{۱\times ۲}+\frac{۱}{۲\times ۳}+\ldots+\frac{۱}{n(n+۱)}+\ldots$$

به‌طور مشابه:

$$۱=\frac{۱}{۱\times ۲}+\frac{۱}{۲\times ۳\times ۴}+\ldots+\frac{۱}{n(n+۱)(n+۲)}+\ldots$$

می‌توان دستور کلی‌تر زیر را ثابت کرد:

$$\frac{۱}{۱\times ۲\times ۳\times\ldots\times(q+۱)}+\frac{۱}{۲\times ۳\times ۴\times\ldots\times(q+۲)}+\ldots+$$
$$+\frac{۱}{n(n+۱)\ldots(q+n)}=\frac{۱}{q\cdot q!}$$

(مساله ۲۶، فصل ۹ را ببینید).

۱۹. فرض می‌کنیم این رشته همگرا باشد، یعنی فرض می‌کنیم

$$s_n=۱+\frac{۱}{۲}+\ldots+\frac{۱}{n}$$

دارای حد باشد که وقتی $n\to\infty$، برابر s است. در آن صورت $\lim_{n\to\infty} s_{۲n}=s$. اما از طرف دیگر:

$$s_{۲n}-s_n=\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\ldots+\frac{۱}{۲n}>\frac{۱}{۲}$$

(مساله ۱ فصل ۸ را ببینید)، که غیرممکن است. این رشته نمی‌تواند همگرا باشد، باوجود این واگرایی این رشته را می‌توان به روش دیگری نیز ثابت کرد. فرض کنید $۲^k<n<۲^{k+۱}$.

در آن صورت داریم:

$$s_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \left(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴}\right) + \left(\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{۱}{۲^{k-۱} + ۱} + \ldots + \frac{۱}{۲^k}\right) + \frac{۱}{۲^k + ۱} + \ldots + \frac{۱}{n}$$

اما: $\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} > \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} > \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}, \ldots$

بنابراین: $s_n > ۱ + \frac{k}{۲}$.

اما وقتی $n \to \infty$، $k \to \infty$. و درنتیجه $s_n \to \infty$. از این‌رو این رشته واگرا است. (مساله ۲۲ را نیز ببینید).

۲۰. فرض کنید $s_n = ۱ + \frac{۱}{۲^\alpha} + \frac{۱}{۳^\alpha} + \ldots + \frac{۱}{n^\alpha}$

برای اثبات همگرایی این رشته، کافی است ثابت کنیم $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, s_n$ وجود دارد. اما به‌سادگی دیده می‌شود که s_n با افزایش n، افزایش می‌یابد. باقی می‌ماند اثبات این مطلب که s_n کران‌دار است. فرض کنید $۲^{k-۱} < n \le ۲^k$. داریم:

$$s_k \le ۱ + \left(\frac{۱}{۲^\alpha} + \frac{۱}{۳^\alpha}\right) + \left(\frac{۱}{۴^\alpha} + \frac{۱}{۵^\alpha} + \frac{۱}{۶^\alpha} + \frac{۱}{۷^\alpha}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{۱}{(۲^{k-۱})\alpha} + \frac{۱}{(۲^{k-۱} + ۱)^\alpha} + \ldots + \frac{۱}{(۲^k - ۱)^\alpha}\right)$$

اما:

$$\frac{۱}{۲^\alpha} + \frac{۱}{۳^\alpha} < ۲\frac{۱}{۲^\alpha} = \frac{۱}{۲^{\alpha-۱}}$$

$$\frac{۱}{۴^\alpha} + \frac{۱}{۵^\alpha} + \frac{۱}{۶^\alpha} + \frac{۱}{۷^\alpha} < \frac{۴}{۴^\alpha} = \frac{۱}{۴^\alpha - ۱}$$

. . . .

$$\frac{۱}{(۲^{k-۱})^\alpha} + \frac{۱}{(۲^{k-۱} + ۱)^\alpha} + \ldots + \frac{۱}{(۲^k - ۱)^\alpha} \times \frac{۲^{k-۱}}{(۲^{k-۱})^\alpha} = \frac{۱}{(۲^{k-۱})^{\alpha-۱}}$$

و به‌این ترتیب: $s_n \le ۱ + \frac{۱}{۲^{\alpha-۱}} + \frac{۱}{(۲^۲)^{\alpha-۱}} + \ldots + \frac{۱}{(۲^{k-۱})^{\alpha-۱}}$

یا:
$$s_n \le ۱ + \frac{۱}{۲^{\alpha-۱}} + \frac{۱}{(۲^۲)^{\alpha-۱}} + \ldots + \frac{۱}{(۲^{k-۱})^{\alpha-۱}} + \ldots,$$
$$s_n \le \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۲^{\alpha-۱}}}$$

به‌این ترتیب، s_n کران‌دار است، حد آن وجود دارد و درنتیجه این رشته همگرا است.

۲۱. الف) داریم (مساله ۲۲، فصل ۷ را ببینید):

$$۱x + ۲x^۲ + \ldots + nx^n = \frac{x}{(x-۱)^۲}\{nx^{n+۱} - (n+۱)x^n + ۱\},$$
$$۱ + ۲x + ۳x^۲ + \ldots + nx^{n+۱} + \ldots = \lim_{n\to\infty}\{۱ + ۲x + ۳x^۲ + \ldots + nx^{n+۱}\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{(x-۱)^۲}\{nx^{n+۱} - (n+۱)x^n + ۱\} = \frac{۱}{(x-۱)^۲}$$

زیرا: $(|x| < ۱) \quad \lim_{n\to\infty} nx^n = ۰$ (مساله ۱۷، الف را ببینید).

ب) و ج): از نتیجهٔ مسالهٔ ۳۳، فصل ۷، به‌دست می‌آید:

$$۱ + ۴x + ۹x^۲ + \ldots + n^۲x^{n-۱} + \ldots = \frac{۱+x}{(۱-x)^۳},$$
$$۱ + ۲^۳x + ۳^۳x^۲ + \ldots + n^۳x^{n-۱} = \frac{۱ + ۴x + x^۳}{(۱-x)^۴}$$

۲۲. الف) بلافاصله از مساله ۴۱ فصل ۸ نتیجه می‌شود. از این‌جا، می‌توان اثبات دیگری از واگرایی رشته

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{n} + \ldots$$

به‌دست آورد. قرار دهید:

$$\lim_{n\to\infty}\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n = e$$

از آن‌جا که متغیر $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ به‌طور صعودی به l میل می‌کند، به‌ازای هر مقدار مثبت n داریم: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < l$. بنابراین

$$n \log \left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$$

اگر لگاریتم در مبنای e اختیار شود. به‌عبارت دیگر:

$$\frac{1}{n} > \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > \log 2+\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+$$
$$+\ldots+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log\frac{2\times 3\times 4\times\ldots x(n+1)}{1\times 2\times 3\times\ldots\times n}=\log(n+1)$$

بنابراین: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > \log(n+1)$ و نتیجه می‌گیریم که این رشته واگرا است.

ب) با استفاده از دستور دو جمله‌ای، حاصل می‌شود:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\times 2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}\frac{1}{n^3}+$$
$$+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\times 2\times 3\times\ldots\times n}\cdot\frac{1}{n^n}=2+\frac{1}{1\times 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+$$
$$+\frac{1}{1\times 2\times 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+$$
$$+\ldots+\frac{1}{1\times 2\times 3\times\ldots\times n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

برای سادگی کار فرض می‌کنیم:

$$\frac{1}{1\times 2\times 3\times\ldots\times k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=u_k$$

در آن صورت:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n = ۲ + u_۲ + u_۳ + \ldots + u_k + u_{k+۱} + u_{k+۲} + \ldots + u_n$$

و داریم:

$$u_k < \frac{۱}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \times k}, \quad \frac{u_{k+۱}}{u_k} = \frac{۱ - \frac{k}{n}}{k+۱} \times \frac{۱}{k+۱}$$

از این‌رو:

$$u_{k+۱} < u_k \frac{۱}{k+۱}$$
$$u_{k+۲} < u_{k+۱} \frac{۱}{k+۲} < u_k \frac{۱}{(k+۱)^۲}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n < u_k \frac{۱}{(k+۱)^{n-k}}$$

و به‌این ترتیب:

$$u_{k+۱} + u_{k+۲} + \ldots + u_n < \frac{u_k}{k+۱}\left[۱ + \frac{۱}{k+۱} + \ldots + \frac{۱}{(k+۱)^{n-k-۱}}\right] < \frac{u_k}{k}$$

درنتیجه:

$$u_{k+۱} + u_{k+۲} + \ldots + u_n < \frac{۱}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times k} \times \frac{۱}{k}$$

از این‌رو

$$\circ < \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n - (۲ + u_۲ + \ldots + u_k) < \frac{۱}{۱ \times ۲ \times \ldots \times k} \cdot \frac{۱}{k}$$

اگر $n \to \infty$، آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} u_k = \frac{۱}{۱ \times ۲ \times \ldots \times k}$$

و درنتیجهٔ آن،

$$۰ < e - \left(۲ + \frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۱ \times ۲ \times ۳} + \ldots + \frac{۱}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times k}\right) <$$
$$< \frac{۱}{۱ \times ۲ \times \ldots \times k} \cdot \frac{۱}{k}$$

که از آن نتیجه می‌شود $(۰ < \theta < ۱)$:

$$e = ۲ + \frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۱ \times ۲ \times ۳} + \ldots +$$
$$+ \frac{۱}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times k} + \frac{\theta}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times k \times k}$$

به این ترتیب می‌توان نوشت:

$$e = ۲ + \frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۱ \times ۲ \times ۳} + \ldots + \frac{۱}{۱ \times ۲ \times ۳ \times k} + \ldots$$

۲۳. داریم:

$$۲ \sin \frac{۱}{۲}x - \sin x = ۲ \sin \frac{۱}{۲}x \left(۱ - \cos \frac{۱}{۲}x\right) = ۴ \sin \frac{۱}{۲}x \sin^۲ \frac{۱}{۴}x$$

از این‌رو:

$$۲ \sin \frac{۱}{۲}x - \sin x < ۴ \frac{x}{۲} \left(\frac{x}{۴}\right)^۲$$

زیرا به‌ازای $\alpha > ۰$، داریم: $\sin \alpha < \alpha$.

به‌زبان دیگر:

$$۲ \sin \frac{۱}{۲}x - \sin x < \frac{۱}{۸}x^۳ \qquad (۱)$$

به‌جای x مقدارهای $\frac{۱}{۲}x$، ...، $\frac{۱}{۲^{n-۱}}x$ را قرار دهید، به‌دست می‌آید:

$$۲ \sin \frac{۱}{۴}x - \sin \frac{۱}{۲}x < \frac{۱}{۸} \left(\frac{x}{۲}\right)^۳ \qquad (۲)$$

$$۲\sin\frac{۱}{۸}x - \sin\frac{۱}{۴}x < \frac{۱}{۸}\left(\frac{x}{۴}\right)^۳ \qquad (۳)$$

. . . .

$$۲\sin\frac{۱}{۲^n}x - \sin\frac{۱}{۲^{n-۱}}x < \frac{۱}{۸}\left(\frac{x}{۲^{n-۱}}\right)^۳ \qquad (n)$$

نابرابری‌های (۱) و (۲) و (۳) و . . . و (n) را به‌ترتیب در ۱ و ۲ و . . . و $۲^{n-۱}$ ضرب و آن‌ها را با هم جمع کنید، حاصل می‌شود:

$$۲^n\sin\frac{۱}{۲^n}x - \sin x < \frac{۱}{۸}x^۳\left\{۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۴^۲} + \ldots + \frac{۱}{۲^{۲n-۲}}\right\}$$

با میل دادن n به‌سمت بی‌نهایت، داریم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left\{\frac{\sin\frac{x}{۲^n}}{\frac{x}{۲^n}}x - \sin x\right\} \leq \frac{۱}{۸}x^۳\lim_{n\to\infty}\left\{۱ + \frac{۱}{۴^۱} + \frac{۱}{۴^۲} + \ldots + \frac{۱}{۴^{n-۱}}\right\}$$

اما:

$$\text{حد}\left\{۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴^۲} + \ldots + \frac{۱}{۴^{n-۱}}\right\} = \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۴}} = \frac{۴}{۳},$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{\sin\frac{x}{۲n}}{\frac{x}{۲^n}} = ۱$$

درنتیجه: $x - \sin \leq \frac{۱}{۶}x^۳$.

۲۴. الف) قرار دهید: $s_n = \frac{a_۱}{۱۰} + \frac{a_۲}{۱۰^۲} + \ldots + \frac{a_n}{۱۰^n}$

لازم است ثابت کنیم که وقتی $n \to \infty$، s_n دارای یک حد است. همان‌طور که به‌سادگی دیده می‌شود، s_n با افزایش n افزایش می‌یابد، طوری‌که $s_{n+۱} \geq s_n$. حال ثابت

می‌کنیم که s_n کران‌دار است. داریم:

$$s_n = \frac{a_۱}{۱۰} + \frac{a_۲}{۱۰^۲} + \ldots + \frac{a_n}{۱۰^n} \leq ۹\left(\frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰^۲} + \ldots + \frac{۱}{۱۰^n}\right) <$$
$$< ۹\left(\frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰^۲} + \ldots + \frac{۱}{۱۰^n} + \ldots\right)$$

و به‌این ترتیب، $s_n < ۱$. و این رشته همگرا است.

ب) از آن‌جا که ω در فاصله بین ۰ و ۱ قرار دارد، این فاصله را به ده بخش برابر تقسیم می‌کنیم. با این عمل، عدد w یا در یکی از این زیرفاصله‌ها و یا در یکی از کران‌های آن قرار می‌گیرد. درنتیجه می‌توان عدد درست $a_۱(۰ \leq a_۱ \leq a)$ را طوری تعیین کرد که $\frac{a_۱}{۱۰} \leq \omega \leq \frac{a_۱ + ۱}{۱۰}$ ، یعنی

$$۰ \leq \omega - \frac{a_۱}{۱۰} < \frac{۱}{۱۰}$$

به‌این ترتیب، عدد $\omega - \frac{a_۱}{۱۰}$ در فاصله ۰ و $\frac{۱}{۱۰}$ قرار دارد. حال این فاصله را به ده بخش برابر تقسیم می‌کنیم، در آن صورت، داریم:

$$\frac{a_۲}{۱۰^۲} \leq \omega - \frac{a_۱}{۱۰} < \frac{a_۲ + ۱}{۱۰^۲}$$

از این رو:

$$\frac{a_۱}{۱۰} + \frac{a_۲}{۱۰^۲} \leq \omega < \frac{a_۱}{۱۰} + \frac{a_۲ + ۱}{۱۰^۲}$$

این عمل را می‌توان به‌همین ترتیب ادامه داد. ثابت می‌کنیم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(\frac{a_۱}{۱۰} + \frac{a_۲}{۱۰^۲} + \ldots + \frac{a_n}{۱۰^n}\right) = \omega$$

در این‌جا متغیر افزایش می‌یابد اما همواره کوچکتر از $\frac{a_1 + 1}{10}$ است، درنتیجه، دارای یک حد است. متغیر زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

به آسانی دیده می‌شود که این متغیر کاهش می‌یابد، اما بزرگتر از $\frac{a_1}{10}$ باقی می‌ماند و درنتیجه، دارای یک حد است. از آن‌جاکه تفاضل

$$\left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_{n+1}}{10^n}\right) - \left(\frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right) = \frac{1}{10^n}$$

وقتی $n \to \infty$، به‌سمت صفر میل می‌کند، هردوی این متغیرها به‌سمت حد یک میل می‌کنند که باتوجه به نابرابری‌های

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \leq \omega < \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n}{10^n}$$

برابر ω خواهد بود.

ج) اگر کسر متناهی باشد، در آن صورت، بی‌شک برابر یک عدد گویا است.

اکنون حالت متناوب بودن آن را در نظر می‌گیریم؛ در این حالت داریم:

$$\omega = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}\left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{10^{2n}}\left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right) + \ldots = \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + \ldots\right) = \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right)\frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} =$$

$$= \frac{a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1} 10 + a_n}{10^n - 1}$$

یعنی ω یک عدد گویا است.

به‌همین ترتیب، می‌توان نشان داد که یک کسر متناوب مرکب (یعنی کسری که دورهٔ تناوب آن با a_1 شروع نمی‌شود بلکه از رقم‌های بعدی شروع می‌شود) نیز یک عدد گویا است. با استفاده از منطق حساب می‌توان عکس آن را نیز ثابت کرد، یعنی اگر یک عدد گویا باشد، در آن صورت بسط آن به یک کسر دهدهی یا متناهی خواهد بود یا متناوب (تناوب ساده یا تناوب مرکب).

به‌این ترتیب، هر کسر نامتناهی غیرتناوب الزاماً یک عدد گنگ است.

۲۵. الف) فرض کنید ω گویا باشد یعنی $\omega = \frac{z}{N}$ که در آن z و N عددهایی درست‌اند. داریم:

$$\frac{z}{N} = \frac{1}{l} + \frac{1}{l^4} + \frac{1}{l^9} + \ldots + \frac{1}{l^{n^2}} + \frac{1}{l^{(n+1)^2}} + \frac{1}{l^{(n+2)^2}} + \ldots$$

حال دو طرف این برابری را در $l^{n^2}N$ ضرب می‌کنیم و n جملهٔ اول را از طرف راست به‌طرف چپ منتقل می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$zl^{n^2} - N(l^{n^2-1} + l^{n^2-4} + \ldots + l^{n^2-(n-1)^2} + 1) =$$
$$= N\left\{\frac{1}{l^{2n+1}} + \frac{1}{l^{4n+4}} + \frac{1}{l^{6n+9}} + \ldots\right\}$$

از این‌رو:

$$|zl^{n^2} - N(l^{n^2-1} + l^{n^2-4} + \ldots + 1)| <$$
$$< N\left\{\frac{1}{l^{2n+1}} + \frac{1}{l^{2(n+1)}} + \frac{1}{l^{3(2n+1)}} + \ldots\right\} = N\frac{\frac{1}{l^{2n+1}}}{1 - \frac{1}{l^{2n+1}}}$$

و به‌این ترتیب:

$$|zl^{n^2} - N(l^{n^2-1} + l^{n^2-4} + \ldots + 1)| < N\frac{1}{l^{2n+1} - 1}$$

اگر n به‌قدر کافی بزرگ اختیار شود، آن‌گاه طرف راست می‌تواند بی‌نهایت کوچک شود، حال آن‌که طرف چپ یک عدد درست مخالف صفر است.

ب) مانند (الف) ثابت می‌شود.

۲۶. داریم:

$$e = ۲ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \ldots + \frac{۱}{n!} + \frac{۱}{(n+۱)!} + \ldots$$

فرض می‌کنیم $e = \frac{z}{N}$ که در آن z و N، عددهایی درست مثبت‌اند.

در آن صورت:

$$\frac{z}{N} = ۲ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \ldots + \frac{۱}{N!} + \frac{۱}{(N+۱)!} + \ldots$$

یا

$$Z(N-۱)! - \left(۲ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \ldots + \frac{۱}{N!}\right) N! =$$
$$= \frac{۱}{N+۱} + \frac{۱}{(N+۱)(N+۲)} + \ldots$$

از این‌رو:

$$|Z(N-۱)! - \left(۲ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \ldots + \frac{۱}{N!}\right) N!| <$$
$$< \frac{۱}{N+۱} + \frac{۱}{(N+۱)^۲} + \frac{۱}{(N+۱)^۳} + \ldots = \frac{۱}{N}$$

که غیرممکن است، زیرا در طرف راست یک کسر معمولی و در طرف چپ یک عدد درست مخالف صفر داریم. به‌این ترتیب، e یک عدد گنگ است. اگر e نمایش یک کسر دهدهی باشد، آن‌گاه کسر نامتنهاهی غیرمتناوب است. در این‌جا مقدار e با تقریب ۲۵۰۰ رقم اعشار

$e =$ ۲٫۷۱۸۲۸ ۱۸۲۸۴ ۵۹۰۴۵ ۲۳۵۳۶ ۰۲۸۷۴ ۷۱۳۵۲ ۶۶۲۴۹ ۷۷۵۷۲ ۴۷۰۹۳ ۶۹۹۹۵
۹۵۷۴۹ ۶۶۹۶۷ ۶۲۷۷۲ ۴۰۷۶۶ ۳۰۳۵۳ ۵۴۷۵۹ ۴۵۷۱۳ ۸۲۱۷۸ ۵۲۵۱۶ ۶۴۲۷۴
۲۷۴۶۶ ۳۹۱۹۳ ۲۰۰۳۰ ۵۹۹۲۱ ۸۱۷۴۱ ۳۵۹۶۶ ۲۹۰۴۳ ۵۷۲۹۰ ۰۳۳۴۲ ۹۵۲۶۰
۵۹۵۶۳ ۰۷۳۸۱ ۳۲۳۲۸ ۶۲۷۹۴ ۳۴۹۰۷ ۶۳۲۳۳ ۸۲۹۸۸ ۰۷۵۳۱ ۹۵۲۵۱ ۰۱۹۰۱
۱۵۷۳۸ ۳۴۱۸۷ ۹۳۰۷۰ ۲۱۵۴۰ ۸۹۱۴۹ ۹۳۴۸۸ ۴۱۶۷۵ ۰۹۲۴۴ ۷۶۱۴۶ ۰۶۶۸۰
۸۲۲۶۴ ۸۰۰۱۶ ۸۴۷۷۴ ۱۱۸۵۳ ۷۴۲۳۴ ۵۴۴۲۴ ۳۷۱۰۷ ۵۳۹۰۷ ۷۷۴۴۹ ۹۲۰۶۹
۵۵۱۷۰ ۲۷۶۱۸ ۳۸۶۰۶ ۲۶۱۳۳ ۱۳۸۴۵ ۸۳۰۰۰ ۷۵۲۰۴ ۴۹۳۳۸ ۲۶۵۶۰ ۲۹۷۶۰
۶۷۳۷۱ ۱۳۲۰۰ ۷۰۹۳۲ ۸۷۰۹۱ ۲۷۴۴۳ ۷۴۷۰۴ ۷۲۳۰۶ ۹۶۹۷۷ ۲۰۹۳۱ ۰۱۴۱۶
۹۲۸۳۶ ۸۱۹۰۲ ۵۵۱۵۱ ۰۸۶۵۷ ۴۶۳۷۷ ۲۱۱۱۲ ۵۲۳۸۹ ۷۸۴۴۲ ۵۰۵۶۹ ۵۳۶۹۶
۷۷۰۷۸ ۵۴۴۹۹ ۶۹۹۶۷ ۹۴۶۸۶ ۴۴۵۴۹ ۰۵۹۸۷ ۹۳۱۶۳ ۶۸۸۹۲ ۳۰۰۹۸ ۷۹۳۱۲
۷۷۳۶۱ ۷۸۲۱۵ ۴۲۴۹۹ ۹۲۲۹۵ ۷۶۳۵۱ ۴۸۲۲۰ ۸۲۶۹۸ ۹۵۱۹۳ ۶۶۸۰۳ ۳۱۸۲۵
۲۸۸۶۹ ۳۹۸۴۹ ۶۴۶۵۱ ۰۵۸۲۰ ۹۳۹۲۳ ۹۸۲۹۴ ۸۸۷۹۳ ۳۲۰۳۶ ۲۵۰۹۴ ۴۳۱۱۷
۳۰۱۲۳ ۸۱۹۷۰ ۶۸۴۱۶ ۱۴۰۳۹ ۷۰۱۹۸ ۳۷۶۷۹ ۳۲۰۶۸ ۳۲۸۲۳ ۷۶۴۶۴ ۸۰۴۲۹
۵۳۱۱۸ ۰۲۳۲۸ ۷۸۲۵۰ ۹۸۱۹۴ ۵۵۸۱۵ ۳۰۱۷۵ ۶۷۱۷۳ ۶۱۳۳۲ ۰۶۹۸۱ ۱۲۵۰۹
۹۶۱۸۱ ۸۸۱۵۹ ۳۰۴۱۶ ۹۰۳۵۱ ۵۹۸۸۸ ۸۵۱۹۳ ۴۵۸۰۷ ۲۷۳۸۶ ۶۷۳۸۵ ۸۹۴۲۲
۸۷۹۲۲ ۸۴۹۹۸ ۹۲۰۸۶ ۸۰۵۸۲ ۵۷۴۹۲ ۷۹۶۱۰ ۴۸۴۱۹ ۸۴۴۴۳ ۶۳۴۶۳ ۲۴۴۹۶
۸۴۸۷۵ ۶۰۲۳۳ ۶۲۴۸۲ ۷۰۴۱۹ ۷۸۶۲۳ ۲۰۹۰۰ ۲۱۶۰۹ ۹۰۲۳۵ ۳۰۴۳۶ ۹۹۴۱۸
۴۹۱۴۶ ۳۱۴۰۹ ۳۴۳۱۷ ۳۸۱۴۳ ۶۴۰۵۴ ۶۲۵۳۱ ۵۲۰۹۶ ۱۸۳۶۹ ۰۸۸۸۷ ۰۷۰۱۶
۷۶۸۳۹ ۶۴۲۴۳ ۷۸۱۴۰ ۵۹۲۷۱ ۴۵۶۳۵ ۴۹۰۶۱ ۳۰۳۱۰ ۷۲۰۸۵ ۱۰۳۸۳ ۷۵۰۵۱
۰۱۱۵۷ ۴۷۷۰۴ ۱۷۱۸۹ ۸۶۱۰۶ ۸۷۳۹۶ ۹۶۵۵۲ ۱۲۶۷۱ ۵۴۶۸۸ ۹۵۷۰۳ ۵۰۳۵۴
۰۲۱۲۳ ۴۰۷۸۴ ۹۸۱۹۳ ۳۴۳۲۱ ۰۶۸۱۷ ۰۱۲۱۰ ۱۵۶۲۷ ۸۸۰۲۳ ۵۱۹۳۰ ۳۳۲۲۴
۷۴۵۰۱ ۵۸۵۳۹ ۰۴۷۳۰ ۴۱۹۹۵ ۷۷۷۷۰ ۹۳۵۰۳ ۶۶۰۴۱ ۶۹۹۷۳ ۲۹۷۲۵ ۰۸۸۶۸
۷۶۹۶۶ ۴۰۳۵۵ ۵۷۰۷۱ ۶۲۲۶۸ ۴۴۷۱۶ ۲۵۶۰۷ ۹۸۸۲۶ ۵۱۷۸۷ ۱۳۴۱۹ ۵۱۲۴۶
۶۵۲۰۱ ۰۳۰۵۹ ۲۱۲۳۶ ۶۷۷۱۹ ۴۳۲۵۲ ۷۸۶۷۵ ۳۹۸۵۵ ۸۹۴۴۸ ۹۶۹۷۰ ۹۶۴۰۹
۷۵۴۵۹ ۱۸۵۶۹ ۵۶۳۸۰ ۲۳۶۳۷ ۰۱۶۲۱ ۱۲۰۴۷ ۷۴۲۷۲ ۲۸۳۶۴ ۸۹۶۱۳ ۴۲۲۵۱
۶۴۴۵۰ ۷۸۱۸۲ ۴۴۲۳۵ ۲۹۴۸۶ ۳۶۳۷۲ ۱۴۱۷۴ ۰۲۳۸۸ ۹۳۴۴۱ ۲۴۷۹۶ ۳۵۷۴۳
۷۰۲۶۳ ۷۵۵۲۹ ۴۴۴۸۳ ۳۷۹۹۸ ۰۱۶۱۲ ۵۴۹۲۲ ۷۸۵۰۹ ۲۵۷۷۸ ۲۵۶۲۰ ۹۲۶۲۲
۶۴۸۳۲ ۶۲۷۷۹ ۳۳۳۸۶ ۵۶۶۴۸ ۱۶۲۷۷ ۲۵۱۶۴ ۰۱۹۱۰ ۵۹۰۰۴ ۹۱۶۴۴ ۹۹۸۲۸
۹۳۱۵۰ ۵۶۶۰۴ ۷۲۵۸۰ ۲۷۷۸۶ ۳۱۸۶۴ ۱۵۵۱۹ ۵۶۵۳۲ ۴۴۲۵۸ ۶۹۸۲۹ ۴۶۹۵۹
۳۰۸۰۱ ۹۱۵۲۹ ۸۷۲۱۱ ۷۲۵۵۶ ۳۴۷۵۴ ۶۳۹۶۴ ۴۷۹۱۰ ۱۴۵۹۰ ۴۰۹۰۵ ۸۶۲۹۸
۴۹۶۷۹ ۱۲۸۷۴ ۰۶۸۷۰ ۵۰۴۸۹ ۵۸۵۸۶ ۷۱۷۴۷ ۹۸۵۴۶ ۶۷۷۵۷ ۵۷۳۲۰ ۵۶۸۱۲
۸۸۴۵۹ ۲۰۵۴۱ ۳۳۴۰۵ ۳۹۲۲۰ ۰۰۱۱۳ ۷۸۶۳۰ ۰۹۴۵۵ ۶۰۶۸۸ ۱۶۶۷۴ ۰۰۱۶۹
۸۴۲۰۵ ۵۸۰۴۰ ۳۳۶۳۷ ۹۵۳۷۶ ۴۵۲۰۳ ۰۴۰۲۴ ۳۲۲۵۶ ۶۱۳۵۲ ۷۸۳۶۹ ۵۱۱۷۷
۸۸۳۸۶ ۳۸۷۴۴ ۳۹۶۶۲ ۵۳۲۲۴ ۹۸۵۰۶ ۵۴۹۹۵ ۸۸۶۲۳ ۴۲۸۱۸ ۹۹۷۰۷ ۷۳۳۲۷
۶۱۷۱۷ ۸۳۹۲۸ ۰۳۴۹۴ ۶۵۰۱۴ ۳۴۵۵۸ ۸۹۷۰۷ ۱۹۴۲۵ ۸۶۳۹۸ ۷۷۲۷۵ ۴۷۱۰۹
۶۲۹۵۳ ۷۴۱۵۲ ۱۱۱۵۱ ۳۶۸۳۵ ۰۶۲۷۵ ۲۶۰۲۳ ۲۶۴۸۴ ۷۲۸۷۰ ۳۹۲۰۷ ۶۴۳۱۰
۰۵۹۵۸ ۴۱۱۶۶ ۱۲۰۵۴ ۵۲۹۷۰ ۳۰۲۳۶ ۴۷۲۵۴ ۹۲۹۶۶ ۶۹۳۸۱ ۱۵۱۳۷ ۳۲۲۷۵
۳۶۴۵۰ ۹۸۸۸۹ ۰۳۱۳۶ ۰۲۰۵۷ ۲۴۸۱۷ ۶۵۸۵۱ ۱۸۰۶۳ ۰۳۶۴۴ ۲۸۱۲۳ ۱۴۹۶۵
۵۰۷۰۴ ۷۵۱۰۲ ۵۴۴۶۵ ۰۱۱۷۲ ۷۲۱۱۵ ۵۵۱۹۴ ۸۶۶۸۵ ۰۸۰۰۳ ۶۸۵۳۲ ۲۸۱۸۳
۱۵۲۱۹ ۶۰۰۳۷ ۳۵۶۲۵ ۲۷۹۴۴ ۹۵۱۵۸ ۲۸۴۱۸ ۸۲۹۴۷ ۸۷۶۱۰ ۸۵۲۶۳ ۹۸۱۳۹
۵۵۹۹۰ ۰۶۷۳۷ ۶۴۸۲۹ ۲۲۴۴۳ ۷۵۲۸۷ ۱۸۴۶۲ ۴۵۷۸۰ ۳۶۱۹۲ ۹۸۱۹۷ ۱۳۹۹۱
۴۷۵۶۴ ۴۸۸۲۶ ۲۶۰۳۹ ۰۳۳۸۱ ۴۴۱۸۲ ۳۲۶۲۵ ۱۵۰۹۷ ۴۸۲۷۹ ۸۷۷۷۹ ۹۶۴۳۷
۳۰۸۹۹ ۷۰۳۸۸ ۸۶۷۷۸ ۲۲۷۱۳ ۸۳۶۰۵ ۷۷۲۹۷ ۸۸۲۴۱ ۲۵۶۱۱ ۹۰۷۱۷ ۶۶۳۹۴
۶۵۰۷۰ ۶۳۳۰۴ ۵۲۷۹۵ ۴۶۶۱۸ ۵۵۰۹۶ ۶۶۶۱۸ ۵۶۶۴۷ ۰۹۷۱۱ ۳۴۴۴۷ ۴۰۱۶۰
۷۰۴۶۲ ۶۲۱۵۶ ۸۰۷۱۷ ۴۸۱۸۷ ۷۸۴۴۳ ۷۱۴۳۶ ۹۸۸۲۱ ۸۵۵۹۶ ۷۰۹۵۹ ۱۰۲۵۹
۶۸۶۲۰ ۰۲۳۵۳ ۷۱۸۵۸ ۸۷۴۸۵ ۶۹۶۵۲ ۲۰۰۰۵ ۰۳۱۱۷ ۳۴۳۹۲ ۰۷۳۲۱ ۱۳۹۰۸
۰۳۲۹۳ ۶۳۴۴۷ ۹۷۲۷۳ ۵۵۹۵۵ ۲۷۷۳۴ ۹۰۷۱۷ ۸۳۷۹۳ ۴۲۱۶۳ ۷۰۱۲۰ ۵۰۰۵۴
۵۱۳۲۶ ۳۸۳۵۴ ۴۰۰۰۱ ۸۶۳۲۳ ۹۹۱۴۹ ۰۷۰۵۴ ۷۹۷۷۸ ۰۵۶۶۹ ۷۸۵۳۳ ۵۸۰۴۸
۹۶۶۹۰ ۶۲۹۵۱ ۱۹۴۳۲ ۴۷۳۰۹ ۹۵۸۷۶ ۵۵۲۳۶ ۸۱۲۸۵ ۹۰۴۱۳ ۸۳۲۴۱ ۱۶۰۷۲
۲۶۰۲۹ ۹۸۳۳۰ ۵۳۵۳۷ ۰۸۷۶۱ ۳۸۹۳۹ ۶۳۹۱۷ ۷۹۵۷۴ ۵۴۰۱۶ ۱۳۷۲۲ ۳۶۱۳۳

حال لگاریتم این عدد را با تقریب ۲۸۲ رقم دهدهی در مبنای ۱۰ ارائه می‌دهیم.

$\log_{۱۰} e = ۰/$ ۴۳۴۲۹ ۴۴۸۱۹ ۰۳۲۵۱ ۸۲۷۶۵ ۱۱۲۸۹
۱۸۹۱۶ ۶۰۵۰۸ ۲۲۹۴۳ ۹۷۰۰۵ ۸۰۳۶۶
۶۵۶۶۱ ۱۴۴۵۳ ۷۸۳۱۶ ۵۸۶۴۶ ۴۹۲۰۸
۸۷۰۷۷ ۴۷۲۹۲ ۲۴۹۴۹ ۳۳۸۴۳ ۱۷۴۸۳
۱۸۷۰۶ ۱۰۶۷۴ ۴۷۶۶۳ ۰۳۷۳۳ ۶۴۱۶۷
۹۲۸۷۱ ۵۸۹۶۳ ۹۰۶۵۶ ۹۲۲۱۰ ۶۴۶۶۲
۸۱۲۲۶ ۵۸۵۲۱ ۲۷۰۸۶ ۵۶۸۶۷ ۰۳۲۹۵
۹۳۳۷۰ ۸۶۹۶۵ ۸۸۲۶۶ ۸۸۳۳۱ ۱۶۳۶۰
۷۷۳۸۴ ۹۰۵۱۴ ۲۸۴۴۳ ۴۸۶۶۶ ۷۶۸۶۴
۶۵۸۶۰ ۸۵۱۳۵ ۵۶۱۴۸ ۲۱۲۳۴ ۸۷۶۵۳
۴۳۵۴۳ ۴۳۵۷۳ ۱۷۲۴۷ ۴۸۰۴۹ ۰۵۹۹۳
۵۵۳۵۳ ۰۵

۲۷. به‌سادگی دیده می‌شود، اگر l_k (که با یک k شروع می‌شود) همگی برابر هم باشند، آن‌گاه با یک تصاعد هندسی نزولی و نامتناهی سروکار داریم و ω یک عدد گویا است. باقی می‌ماند اثبات این مطلب که اگر چنین شرایطی (برابر بودن تمام l_kها که با k شروع می‌شوند) رخ ندهد، در آن صورت ω یک عدد گنگ است. (می‌توان آن را به‌طور مشابه مانند مساله ۲۵ ثابت کرد.)

۲۸. فرض کنید متغیر u_n نزولی باشد یعنی $u_{n+1} < u_n$. داریم:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \log(n+1)$$

از این‌رو:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n = \frac{1}{n+1} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

متغیر $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که نزولی است یعنی $v_{n+1} < v_n$ یا این‌که

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

یعنی نشان می‌دهیم که:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{\frac{n+۱}{n+۲}} > ۱+\frac{۱}{n+۱}$$

داریم: $(۱+\alpha)^{\frac{m}{n}} > ۱+\alpha\frac{m}{n}$ ،$(۱+\alpha > ۱)$. (مساله ۴۰، الف فصل ۸ را ببینید.)

در این‌جا به‌جای α، $\frac{۱}{n}$ و به‌جای $\frac{m}{n}$، مقدار $\frac{n+۱}{n+۲}$ قرار دهید، به‌دست می‌آید:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{\frac{n+۱}{n+۲}} > ۱+\frac{۱}{n}\frac{(n+۱)}{(n+۲)}$$

اما

$$۱+\frac{n+۱}{n(n+۲)} > ۱+\frac{۱}{n+۱}$$

و به‌این ترتیب، متغیر $v_n = \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱}$ نزولی است. حال نشان می‌دهیم که

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱} = e$$

داریم: $\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n} = \dfrac{(۱+\frac{۱}{n})^{n+۱}}{(۱+\frac{۱}{n})}$

اما: $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(۱+\frac{۱}{n}\right) = ۱$ و $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n} = e$

درنتیجه، $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱} = e$ و به‌این ترتیب:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱} > e$$

بنابراین: $(n+۱)\log\left(۱+\frac{۱}{n}\right) > ۱$ و $\log\left(۱+\frac{۱}{n}\right) > \frac{۱}{n+۱}$ و $u_{n+۱}-u_n < ۰$

و متغیر u_n نزولی است.

از طرف دیگر:

$$u_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{n} - \log n >$$
$$> \log(n + ۱) - \log n > \log\left(۱ + \frac{۱}{n}\right) > ۰$$

از آن‌جا که متغیر u_n نزولی است اما بزرگتر از صفر می‌باشد پس دارای حد است. این حد را با C نشان می‌دهیم.

$$C = \text{حد}\left\{۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{n} - \log n\right\}$$

C ثابت اویلر نامیده می‌شود. در زیر مقدار ثابت اویلر با دقت ۲۶۳ رقم اعشار ارائه شده است.

$C = ۰/$ ۵۷۷۲۱ ۵۶۶۴۹ ۰۱۵۳۲ ۸۶۰۶۰ ۶۵۱۲۰
۹۰۰۸۲ ۴۰۲۴۳ ۱۰۴۲۱ ۵۹۳۳۵ ۹۳۹۹۲
۳۵۹۸۸ ۰۵۷۶۷ ۲۳۴۸۸ ۴۸۶۷۷ ۲۶۷۷۷
۶۶۴۶۷ ۰۹۳۶۹ ۴۷۰۶۳ ۲۹۱۷۴ ۶۷۴۹۵
۱۴۶۳۱ ۴۴۷۲۴ ۹۸۰۷۰ ۸۲۴۸۰ ۹۶۰۵۰
۴۰۱۴۴ ۸۶۵۴۲ ۸۳۶۲۲ ۴۱۷۳۹ ۹۷۶۴۴
۹۲۳۵۳ ۶۲۵۳۵ ۰۰۳۳۳ ۷۴۲۹۳ ۷۳۳۷۷
۳۷۶۷۳ ۹۴۲۷۹ ۲۵۹۵۲ ۵۸۲۴۷ ۰۹۴۹۱
۶۰۰۸۷ ۳۵۲۰۳ ۹۴۸۱۶ ۵۶۷۰۸ ۵۳۲۳۳
۱۵۱۷۷ ۶۶۱۱۵ ۲۸۶۲۱ ۱۹۹۵۰ ۱۵۰۷۹
۸۴۷۹۳ ۷۴۵۰۸ ۵۶۹

۲۹. داریم:

$$\sin x = ۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}$$

$$\sin\frac{x}{۲} = ۲\sin\frac{x}{۲^۲}\cos\frac{x}{۲^۲}$$

$$\sin\frac{x}{۲^۲} = ۲\sin\frac{x}{۲^۳}\cos\frac{x}{۲^۳}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin \frac{x}{۲^{n-۱}} = ۲ \sin \frac{x}{۲^n} \cos \frac{x}{۲^n}$$

با ضرب برابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$\sin x = ۲^n \sin \frac{x}{۲^n} \cos \frac{x}{۲} \cos \frac{x}{۲^۲} \cos \frac{x}{۲^۳} \ldots \cos \frac{x}{۲^n}$$

در آن صورت:

$$\frac{۲^n \sin \frac{x}{۲^n}}{\sin x} = \frac{۱}{\cos \frac{x}{۲} \cos \frac{x}{۲^۲} \cos \frac{x}{۲^۳} \ldots \cos \frac{x}{۲^n}}$$

داریم:

$$\lim_{n\to\infty} ۲^n \sin \frac{x}{۲^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{x}{۲^n}}{\frac{x}{۲^n}} x = x$$

قرار دهید:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos \frac{x}{۲} \cos \frac{x}{۲^۲} \cos \frac{x}{۲^۳} \ldots \cos \frac{x}{۲^n} \right) =$$
$$= \cos \frac{x}{۲} \cos \frac{x}{۲^۲} \cos \frac{x}{۲^۳} \ldots$$

در آن صورت داریم:

$$\frac{x}{\sin x} = \cos \frac{x}{۲} \cos \frac{x}{۲^۲} \cos \frac{x}{۲^۳} \ldots$$

در این‌جا $x = \frac{\pi}{۲}$ قرار دهید، دستور مطلوب به‌دست می‌آید. عدد π، مانند عدد e یک عدد گنگ است و درنتیجه نمی‌توان آن را به‌صورت کسر دهدهی متناوب یا متناهی نمایش

داد. در این‌جا مقدار عدد π تا ۲۰۳۵ رقم دهدهی داده شده است.

$\pi =$ ۳/ ۱۴۱۵۹ ۲۶۵۳۵ ۸۹۷۹۳ ۲۳۸۴۶ ۲۶۴۳۳ ۸۳۲۷۹ ۵۰۲۸۸ ۴۱۹۷۱ ۶۹۳۹۹ ۳۷۵۱۰
۵۸۲۰۹ ۷۴۹۴۴ ۵۹۲۳۰ ۷۸۱۶۴ ۰۶۲۸۶ ۲۰۸۹۹ ۸۶۲۸۰ ۳۴۸۲۵ ۳۴۲۱۱ ۷۰۶۷۹
۸۲۱۴۸ ۰۸۶۵۱ ۳۲۸۲۳ ۰۶۶۴۷ ۰۹۳۸۴ ۴۶۰۹۵ ۵۰۵۸۲ ۲۳۱۷۲ ۵۳۵۹۴ ۰۸۱۲۸
۴۸۱۱۱ ۷۴۵۰۲ ۸۴۱۰۲ ۷۰۱۹۳ ۸۵۲۱۱ ۰۵۵۵۹ ۶۴۴۶۲ ۲۹۴۸۹ ۵۴۹۳۰ ۳۸۱۹۶
۴۴۲۸۸ ۱۰۹۷۵ ۶۶۵۹۳ ۳۴۴۶۱ ۲۸۴۷۵ ۶۴۸۲۳ ۳۷۸۶۷ ۸۳۱۶۵ ۲۷۱۲۰ ۱۹۰۹۱
۴۵۶۴۸ ۵۶۶۹۲ ۳۴۶۰۳ ۴۸۶۱۰ ۴۵۴۳۲ ۶۶۴۸۲ ۱۳۳۹۳ ۶۰۷۲۶ ۰۲۴۹۱ ۴۱۲۷۳
۷۲۴۵۸ ۷۰۰۶۶ ۰۶۳۱۵ ۵۸۸۱۷ ۴۸۸۱۵ ۲۰۹۲۰ ۹۶۲۸۲ ۹۲۵۴۰ ۹۱۷۱۵ ۳۶۴۳۶
۷۸۹۲۵ ۹۰۳۶۰ ۰۱۱۳۳ ۰۵۳۰۵ ۴۸۸۲۰ ۴۶۶۵۲ ۱۳۸۴۱ ۴۶۹۵۱ ۹۴۱۵۱ ۱۶۰۹۴
۳۳۰۵۷ ۲۷۰۳۶ ۵۷۵۹۵ ۹۱۹۵۳ ۰۹۲۱۸ ۶۱۱۷۳ ۸۱۹۳۲ ۶۱۱۷۹ ۳۱۰۵۱ ۱۸۵۴۸
۰۷۴۴۶ ۲۳۷۹۹ ۶۲۷۴۹ ۵۶۷۳۵ ۱۸۸۵۷ ۵۲۷۲۴ ۸۹۱۲۲ ۷۹۳۸۱ ۸۳۰۱۱ ۹۴۹۱۲
۹۸۳۳۶ ۷۳۳۶۲ ۴۴۰۶۵ ۶۶۴۳۰ ۸۶۰۲۱ ۳۹۴۹۴ ۶۳۹۵۲ ۲۴۷۳۷ ۱۹۰۷۰ ۲۱۷۹۸
۶۰۹۴۳ ۷۰۲۷۷ ۰۵۳۹۲ ۱۷۱۷۶ ۲۹۳۱۷ ۶۷۵۲۳ ۸۴۶۷۴ ۸۱۸۴۶ ۷۶۶۹۴ ۰۵۱۳۲
۰۰۰۵۶ ۸۱۲۷۱ ۴۵۲۶۳ ۵۶۰۸۲ ۷۷۸۵۷ ۷۱۳۴۲ ۷۵۷۷۸ ۹۶۰۹۱ ۷۳۶۳۷ ۱۷۸۷۲
۱۴۶۸۴ ۴۰۹۰۱ ۲۲۴۹۵ ۳۴۳۰۱ ۴۶۵۴۹ ۵۸۵۳۷ ۱۰۵۰۷ ۹۲۲۷۹ ۶۸۹۲۵ ۸۹۲۳۵
۴۲۰۱۹ ۹۵۶۱۱ ۲۱۲۹۰ ۲۱۹۶۰ ۸۶۴۰۳ ۴۴۱۸۱ ۵۹۸۱۳ ۶۲۹۷۷ ۴۷۷۱۳ ۰۹۹۶۰
۵۱۸۷۰ ۷۲۱۱۳ ۴۹۹۹۹ ۹۹۸۳۷ ۲۹۷۸۰ ۴۹۹۵۱ ۰۵۹۷۳ ۱۷۳۲۸ ۱۶۰۹۶ ۳۱۸۵۹
۵۰۲۴۴ ۵۹۴۵۵ ۳۴۶۹۰ ۸۳۰۲۶ ۴۲۵۲۲ ۳۰۸۲۵ ۳۳۴۴۶ ۸۵۰۳۵ ۲۶۱۹۳ ۱۱۸۸۱
۷۱۰۱۰ ۰۰۳۱۳ ۷۸۳۸۷ ۵۲۸۸۶ ۵۸۷۵۳ ۳۲۰۸۳ ۸۱۴۲۰ ۶۱۷۱۷ ۷۶۶۹۱ ۴۷۳۰۳
۵۹۸۲۵ ۳۴۹۰۴ ۲۸۷۵۵ ۴۶۸۷۳ ۱۱۵۹۵ ۶۲۸۶۳ ۸۸۲۳۵ ۳۷۸۷۵ ۹۳۷۵۱ ۹۵۷۷۸
۱۸۵۷۷ ۸۰۵۳۲ ۱۷۱۲۲ ۶۸۰۶۶ ۱۳۰۰۱ ۹۲۷۸۷ ۶۶۱۱۱ ۹۵۹۰۹ ۲۱۶۴۲ ۰۱۹۸۹
۳۸۰۹۵ ۲۵۷۲۰ ۱۰۶۵۴ ۸۵۸۶۳ ۲۷۸۸۶ ۵۹۳۶۱ ۵۳۳۸۱ ۸۲۷۹۶ ۸۲۳۰۳ ۰۱۹۵۲
۰۳۵۳۰ ۱۸۵۲۹ ۶۸۹۹۵ ۷۷۳۶۲ ۲۵۹۹۴ ۱۳۸۹۱ ۲۴۹۷۲ ۱۷۷۵۲ ۸۳۴۷۹ ۱۳۱۵۱
۵۵۷۴۸ ۵۷۲۴۲ ۴۵۴۱۵ ۰۶۹۵۹ ۵۰۸۲۹ ۵۳۳۱۱ ۶۸۶۱۷ ۲۷۸۵۵ ۸۸۹۰۷ ۵۰۹۸۳
۸۱۷۵۴ ۶۳۷۴۶ ۴۹۳۹۳ ۱۹۲۵۵ ۰۶۰۴۰ ۰۹۲۷۷ ۰۱۶۷۱ ۱۳۹۰۰ ۹۸۴۸۸ ۲۴۰۱۲
۸۵۸۳۶ ۱۶۰۳۵ ۶۳۷۰۷ ۶۶۰۱۰ ۴۷۱۰۱ ۸۱۹۴۲ ۹۵۵۵۹ ۶۱۹۸۹ ۴۶۷۶۷ ۸۳۷۴۴
۹۴۴۸۲ ۵۵۳۷۹ ۷۷۴۷۲ ۶۸۴۷۱ ۰۴۰۴۷ ۵۳۴۶۴ ۶۲۰۸۰ ۴۶۶۸۴ ۲۵۹۰۶ ۹۴۹۱۲
۹۳۳۱۳ ۶۷۷۰۲ ۸۹۸۹۱ ۵۲۱۰۴ ۷۵۲۱۶ ۲۰۵۶۹ ۶۶۰۲۴ ۰۵۸۰۳ ۸۱۵۰۱ ۹۳۵۱۱
۲۵۳۳۸ ۲۴۳۰۰ ۳۵۵۸۷ ۶۴۰۲۴ ۷۴۹۶۴ ۷۳۲۶۳ ۹۱۴۱۹ ۹۲۷۲۶ ۰۴۲۶۹ ۹۲۲۷۹
۶۷۸۲۳ ۵۴۷۸۱ ۶۳۶۰۰ ۹۳۴۱۷ ۲۱۶۴۱ ۲۱۹۹۲ ۴۵۸۶۳ ۱۵۰۳۰ ۲۸۶۱۸ ۲۹۷۴۵
۵۵۷۰۶ ۷۴۹۸۳ ۸۵۰۵۴ ۹۴۵۸۸ ۵۸۶۹۲ ۶۹۹۵۶ ۹۰۹۲۷ ۲۱۰۷۹ ۷۵۰۹۳ ۰۲۹۵۵
۳۲۱۱۶ ۵۳۴۴۹ ۸۷۲۰۲ ۷۵۵۹۶ ۰۲۳۶۴ ۸۰۶۶۵ ۴۹۹۱۱ ۹۸۸۱۸ ۳۴۷۹۷ ۷۵۳۵۶
۶۳۶۹۸ ۰۷۴۲۶ ۵۴۲۵۲ ۷۸۶۲۵ ۵۱۸۱۸ ۴۱۷۵۷ ۴۶۷۲۸ ۹۰۹۷۷ ۷۷۲۷۹ ۳۸۰۰۰
۸۱۶۴۷ ۰۶۰۰۱ ۶۱۴۵۲ ۴۹۱۹۲ ۱۷۳۲۱ ۷۲۱۴۷ ۷۲۳۵۰ ۱۴۱۴۴ ۱۹۷۳۵ ۶۸۵۴۸
۱۶۱۳۶ ۱۱۵۷۳ ۵۲۵۵۲ ۱۳۳۴۷ ۵۷۴۱۸ ۴۹۶۴۸ ۴۳۴۵۲ ۳۳۲۳۹ ۰۷۳۹۴ ۱۴۳۳۳
۴۵۴۷۷ ۶۲۴۱۶ ۸۶۲۵۱ ۸۹۸۳۵ ۶۹۴۸۵ ۵۶۲۰۹ ۹۲۱۹۲ ۲۲۱۸۴ ۲۷۲۵۵ ۰۲۵۴۲
۵۶۸۸۷ ۶۷۱۷۹ ۰۴۹۴۶ ۰۱۶۵۳ ۴۶۶۸۰ ۴۹۸۸۶ ۲۷۲۳۲ ۷۹۱۷۸ ۶۰۸۵۷ ۸۴۳۸۳
۸۲۷۹۶ ۷۹۷۶۶ ۸۱۴۵۴ ۱۰۰۹۵ ۳۸۸۳۷ ۸۶۳۶۰ ۹۵۰۶۸ ۰۰۶۴۲ ۲۵۱۲۵ ۲۰۵۱۱
۷۳۹۲۹ ۸۴۸۹۶ ۰۸۴۱۲ ۸۴۸۸۶ ۲۶۹۴۵ ۶۰۴۲۴ ۱۹۶۵۲ ۸۵۰۲۲ ۲۱۰۶۶ ۱۱۸۶۳
۰۶۷۴۴ ۲۷۸۶۲ ۲۰۳۹۱ ۹۴۹۴۵ ۰۴۷۱۲ ۳۷۱۳۷ ۸۶۹۶۰ ۹۵۶۳۶ ۴۳۷۱۹ ۱۷۲۸۷
۴۶۷۷۶ ۴۶۵۷۵ ۷۳۹۶۲ ۴۱۳۸۹ ۰۸۶۵۸ ۳۲۶۴۵ ۹۹۵۸۱ ۳۳۹۰۴ ۷۸۰۲۷ ۵۹۰۰۹
۹۴۶۵۷ ۶۴۰۷۸ ۹۵۱۲۶ ۹۴۶۸۳ ۹۸۳۵۲ ۵۹۵۷۰ ۹۸۲۵۸